結び目の数学と物理

KNOTS AND PHYSICS

L.H.カウフマン著

鈴木晋一・河内明夫 監訳

培風館

To Diane

KNOTS AND PHYSICS

by

Louis H. Kauffman

まえがき

本書は1985年の秋に著者がイタリアのBolognaとTorinoで行った二つの短期講義を基にしている. 当時, 統計物理とJones多項式の間の関係はまさに現れ始めたばかりのところであり, 『結び目と物理 (Knots and Physics)』という表題の講義録を執筆するのは良いアイデアであると思えた.

結び目多項式という主題は, 結び目とその鏡像を識別できる最初の絡み目多項式であるJones多項式によって, 新しい展開を始めた. しかし, 我々は氷山の一角を眺めていたにすぎない. この分野は, 数学者と物理学者の注目すべき貢献——それは素晴らしい学際的な相互作用であった——によって, 一足飛びに成長した. 本書を書くに際しては, Bologna/Torinoの古いノートの趣を保持したいと思い, またより最近の出来事へ導く道も用意したいと考えた. いろいろ調査したあげく, 1989年にこの本を二つの部分に分けようと決心した. 第I部は, 組合せ的, 初等的なもので, ステイト模型としてのブラケット多項式, 分配関数, Yang-Baxter模型などに当てられる. ブラケット多項式はまた量子群という主題への入門の準備でもあり, またそれはPenroseのスピン・ネットワーク理論 (第II部, 第13節を見よ) への重要な一般化の出発点でもある. 第II部は, 関連するトピックスの展覧会の様相を呈しており, その中には最近の発展に関する展示部屋も用意してある. その最初の具体例として, 私はPotts模型とスピン・ネットワークを題材に選んだ.

第I部はどんどん増大して, JonesとTuraevによって発見されたHomfly多項式とKauffman多項式に対するYang-Baxter模型の解説と, Francois JaegerとHubert Saleurおよび筆者の仕事を基礎にしたAlexander多項式の取扱いをも含むことになった. Yang-Baxter模型を用いることによって, Jones多項式とその一般化の存在について, 帰納法を用いない導入法が得られる. 後に第I部はさらに増大して, ReshetikhinとTuraevの3次元多様体の不変量をLickorishによって再構成された形で取り上げることになった. Lickorishの模型は完全に初等的なもので, ブラケット多項式と絡み目表示のトリックおよびTemperley-Lieb代数のタングル図式的な解釈の他は, 何も用いない. これらの3次元多様体の不変量は, Edward Wittenによって, 量子場の理論とJones多項式に関する彼の画期的な論文の中で予言されたものである. 第I部は, Wittenの汎関数の積分による形式化の導入で終るが, これに関連して, 結び目多項式がいかにして発生するかがそこで示される. 付録では, 2次元におけるスピン保存のR行列に関するYang-Baxter方程式の解を計算する. ここから, Jones多項式とAlexander多項式が双子のように現れるの

である.

第II部は, 上手に作られた丁字木にあなたの馬を巻結びでつなぐとき, 馬が逃げ出すことができないことをいかにして証明するかという, 結策 (hitches) の Bayman の理論で始まる. 次に, 輪ゴムを用いた有効な実験の議論が続く. 第3節と第4節では, 絡み目の表示に関する通常の Reidemeister 移動のもとで, 進路をつくる試みを議論する. 我々の足元には未発見の分野がまだたくさんある. 次には, 平面的な3–正則グラフの色付けに関する Penrose の彩色反復と, その一般化の議論を行う. これは, スピン・ネットワーク, および彩色と再結合理論への初等的な入門となる. 彩色と Potts 模型に関する第7節と第8節には, Torino における講義録をそのまま取り入れた. ここでは, ブラケット模型が, 有向彩色多項式や Jones 多項式および Potts 模型をいかにして含むかが示される. 第9節は, スピン, 量子力学, および特殊相対論に関するノートである. 第10節と第11節では, 4元数, Cayley 数および Dirac の紐のトリックで遊ぶ. 第11節では, はさみと紙とテープの他は何も使わずに, あなたがトポロジー的なあるいはまた力学的な4元数の専門家になるための教育を行う. 第12節と第13節では, スピン・ネットワークと q–変形スピン・ネットワークを議論する. 第13節の終りでは, Turaev-Viro 型の3次元多様体の不変量を q–変形スピン・ネットワークを用いて構成するという, 筆者と Sostenes Lins との仕事の概略を述べる. 第II部は, 紐と DNA と Lorenz Attractor に関する三つのエッセイで締めくくる. これらの分離したエッセイは, さらに先の楽しみについて多くの暗示を含んでいる.

たくさんのことを言い残した. 特に, Witten の不変量を共形場の理論を用いて定義しようする Louis Crane の研究方法と, 量子重力に対する Lee Smolin の研究方法についての議論にはスペースを割きたかった. これらの研究方法では, ステイトが結び目や絡み目上の汎関数として現れる. これについては次の機会を待たねばならない! このプロジェクトが進められた数年間にわたって, 素晴らしい会話や知的な栄養を与えてくれた次の人々に対して, 心から感謝を捧げる.

Corrado Agnes, Jack Armel, Randy Baadhio, Gary Berkowitz, Joan Birman, Joe Birman, Herbert Brun, William Browder, Steve Bryson, Scott Carter, Naomi Caspe, John Conway, Paolo Cotta-Ramusino, Nick Cozzarelli, Louis Crane, Anne Dale, Tom Etter, Massimo Ferri, David Finkelstein, Michael Fisher, James Flagg, George Francis, Peter Freund, Larry Glasser, Seth Goldberg, Fred Goodman, Arthur Greenspoon, Bernard Grossman, Victor Guggenheim, Ivan Handler, John Hart, Mark Hennings, Kim Hix, Tom Imbo, Francois Jaeger, Herbert Jehle, Vaughan Jones, Alice Kauffman, Akio Kawauchi, Milton Kerker, Doug Kipping, Robion Kirby, Peter Landweber, Ruth Lawrence, Vladimir Lepetic, Anatoly Libgober, Laymond Lickorish, Sostenes Lins, Roy Lisker, Mary Lupa, Maurizio Martellini, Hohn Mathias, Ken Millett, John Milnor, Jose

Montesinos, Hugh Morton, Kunio Murasugi, Jeanette Nelson, Frank Nijhoff, Pierre Noyes, Kathy O'Hara, Eddie Oshins, Gordon Pask, Annetta Pedretti, Mary-Minn Peet, Roger Penrose, Mario Rasetti, Nicolai Reshetikhin, Dennis Roseman, Hubert Saleur, Dan Sandin, Jon Simon, Isadore Singer, Milton Singer, Diane Slaviero, Lee Smolin, David Solzman, George Spencer-Brown, Sylvia Spengler, Joe Staley, Stan Tenen, Tom Tieffenbacher, Volodja Turaev, Sasha Turbiner, David Urman, Jean-Michel Vappereau, Rasa Varanka, Francisco Varela, Oleg Viro, Heinz von Foerster, Miki Wadati, Randall Weiss, Steve Winker, Edward Witten, John Wood, Nancy Wood, David Yetter

(これでリストのすべてであるが, これは必ずしも完全なものではない. コミュニケイションと援助のネットワークは世界中に広がっている.) 私はまた, 1988–1989 の 1 年間, フランスの Bures-Sur-Yvette の高等科学研究所 (the Institute des Hautes Etudes Scientifiques) で受けた手厚いもてなしに対して感謝する. 本書はこの時に始まったのある.

最後に, イリノイ大学シカゴ校の数学・統計学・計算機科学教室におけるワードプロセッサーのスーパーヴァイザーである Shirley Roper 女史に, 彼女のたいへんなタイプセッテイング作業とその職務をはるかに超えた忍耐とに対し, 感謝を捧げたい.

なお, このプロジェクトは, NSF 補助金 (Number DMS-8822602) とカリフォルニア州 Berkeley のカリフォルニア州立大学バークレイ校における数学と分子生物学のための研究計画によって, 部分的に援助されたものである.

イリノイ州シカゴにて, 1991 年 1 月

日本語版へのまえがき

本の著者にとって，その著作が深く広く興味・関心をもたれて，他の言語に翻訳されるということは，とても嬉しいことである．『Knots and Physics』の場合には，著作そのものが，数学の結び目理論と物理学の結び目理論の関係を統合することを主題として，図形的な言葉で構成されている．私は，日本語の文字の背後にある素晴らしい図形的なものが理解できたらいいのになあと思う．そこには，多くのトポロジー的なもの，また恐らく物理的なものが隠されているものと推測している．

この翻訳書の新しい読者が，そのページから喜びを感じ，理解を深めて下さることを期待している．

シカゴにて，1994 年 12 月　　Louis H.Kauffman

訳者まえがき

結び目理論はトポロジー（位相幾何学）の一分野として研究されてきたが, 1985年に V.F.R.Jones が Alexander 多項式の発見から約60年ぶりに新しい多項式不変量を発表したのを契機に, 新しい時代に入った. Jones 多項式の発見の後, 多くの数学者・物理学者により結び目の新しい多項式不変量が発見・創案されたが, 統計力学の厳密に解ける模型を用いる構成法は, これら一連の多項式を統一的な枠組みの中で導くことを可能にし, その結果それらの特徴付けをも可能にした. 同時期, 高分子の研究に結び目理論を活用しようという機運が盛り上がり, 両分野の交流が盛んに行われるようになった. この辺の事情を, 渦中にあって精力的に活躍してきた著者が, 時に詳しく, 時に大胆に, 生々しく解説したのが, 本書である.

本書の原題は『Knots and Physics』であり, 「結び目と物理 (学)」と訳すのが自然で, 著者の意図に沿うことにもなる, とも考えたが, 全体のページ数に比べて物理学に割かれている割合が少ないこと, また物理学的な部分に関する記述に曖昧な点や不完全な点が見受けられることなどから, あえて「結び目の数学と物理」という表題にした.

本書は, 結び目理論の基本用語の説明から始まるが, 若干乱暴なところも散見する. 初めて結び目理論を学ばれる方には [鈴木]* の一読をお奨めする. また一段上の入門書として [村杉]* がある. [河内]* は本格的な研究書で, 座右にあると便利である. 量子群や Yang-Baxter 方程式については [神保]*が参考になる. 本書の訳語の多くもこの書に従った. [河野]* には, 本書と重複する話題がいくつも取り上げられており, 参考にされるとよい. 空間グラフの入門書として [小林]* がある.

翻訳に予想以上の時間がかかり, 原著の出版からかなり時間が経ったが, その内容はどれもまだまだ新鮮で, 今後の研究課題がたくさん含まれている. その後の発展や関連する話題に関しては, [BA]*, [BM]*, [LK31]*, [MS]*, [TU8]* などを参照されたい.

翻訳には, 主として鈴木, 大山, 宮澤, 岡本, 塩見が分担して当たった. この原稿を鈴木と河内が総合的に調整・校閲した. また, 物理学的な部分の校閲を, 物理学者の出口にお願いした. 物理学者として納得できない部分も多くて苦心したようだが, 明らかな誤りを除いては原著を訂正する作業は行わず, 若干の訳注を付け加えるにとどめた. さらに, 原と衛藤が原稿の整理とタイプ打ち・校正を担当した.

翻訳・出版にあたり, 初めから終りまで培風館編集部の岩田誠司氏にお世話になった. 紙面を借りて, 心からお礼を申し上げる.

1995 年 9 月　　監訳者しるす

目　次

第 I 部　結び目の数学と物理：速成コース

第 II 部　結び目の数学と物理：雑録集

第 I 部

結び目の数学と物理：速成コース

本書の第 I 部は, 結び目の数理と物理に関する速成コースであり, キーとなる概念や例題へ一気に入っていく. 本書の第 II 部は, 特別なトピックス (例えば, Potts 模型, 地図の彩色, スピン・ネットワーク理論, 3 次元多様体のトポロジーなど) への周遊旅行になっている. これらのトピックスは, それぞれ独立して読むことができるが, それらの理解に必要な知識や情報は第 I 部で与えられている.

この速成コースでは, 抽象化の作業, 数学的な思考の変換, 視点の転換などは例外ではなく, むしろ日常茶飯事である. このコースは, 断崖を直接に登るような, 早わかりのガイドであるが, 後になってこの景色をもっとゆっくりと眺めて歩くプラニングのためと, もっと複雑な登攀のプロッテングのための, 両方のために利用するつもりである.

この速成コースの計画は, 次のようになっている. 最初に, 結び目理論のための図形的なモデルを議論する. それから, ブラケット多項式 [LK4] を構成し, それを用いて本来の Jones 多項式を得る. 次に図形的なモデル, つまり結び目 "図形表示" に戻り, 抽象的テンソル, Yang-Baxter 方程式および量子群の概念を明らかにしていく. ブラケット多項式に対するステイトとテンソルのモデルを手に入れた後, 他の (一般化された) 絡み目多項式を紹介する. 続いて, はじめは組合せ的なモデルによって, 次には汎関数の積分とゲージ場の理論を用いて, Witten の不変量のスケッチを行う. この概念と技術は, 外見は場の理論と 3 次元トポロジーの周辺で, いろいろなものを巻き込んでいく. 途中で統計力学のモデルが現れるが, これは本書全体を通して陰に陽に組み込まれていく. トポロジーの構造と物理的な概念のもとで, グラフ, マトロイド, 彩色問題, 彩色多項式, 組合せ的構造, 数え上げなどの, 組合せ論のテーマが音を奏でる. そして最後に, 全体を通して, 空間と符号, 幾何学とシンボル, そして数学, 物理学, 言語学その他すべてのものへの共通する根源的なものの間の関係の中で, 奥深い活動がなされる.

さて, いよいよ始めよう. 物理学の教科書では, 数学的な背景か, 経験的な結果から始めるのが慣習である. しかしこれは結び目の本であるので, 結び目の物理から始めようか? 摩擦の性質にしようか? "徳利 (とっくり) 結び" と "もやい結び" のデザインにしようか? とにかく, ここでは結び目のわかりやすい実際的な物理を述べることにしよう.

1 節　物理的な結び目

徳利結び (とっくり結び; clove-hitch) は, 紐を柱や木の幹に縛りつけるために用いられる. 図 1 の説明図は, この結びの作り方である.

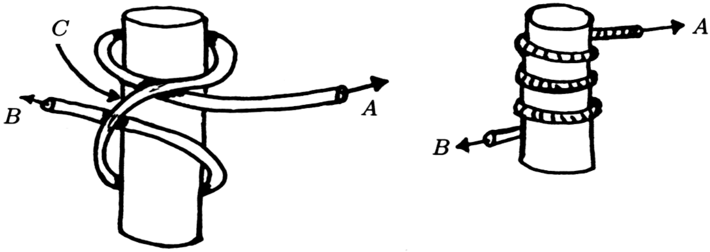


図 1.　徳利結び (clove-hitch)

徳利結びを使ってちょっとした実験をしてみると, A における張力によって C の部分の紐が B をきつく締め上げ, 滑って抜けるのを防いでいることがわかる. この結びは実によくもちこたえる.

このような話題に関する物理数学的な取扱いもいくつかあるのだが, それらは第 II 部に譲る. ここでは, ただ実験をしていただきたい. 例えば, 図 1 の右の図のように, 柱にただ巻きつけてみよう. すると, ロープが柱からすり抜けるために必要な A における張力の総和は, 巻数に応じて指数関数的に増加することが容易にわかるであろう (ここで, ロープは B においてある一定の張力で軽く固定しておく). 織物や編み物の最初のところでは, 徳利結びのように, 連動した張力や摩擦があってはじめて見事に締まるのである.

図 2 の一連の絵は, **もやい結び** (bowline) の結び方を示す. このもやい結びから, 紐をかたく縛るのに優れた結び目が得られる. この結び目の込み入った部分のループ μ を, 任意のサイズにすることができる.

このループは, A での張力には影響されずに保たれる. A を引っ張るとループ λ が縮み, そこを通る 2 本の紐をしっかりと締めつける. これによって μ はかたく固定される. A での張力を緩めると結び目は容易に解け, ループの調整も簡単にできる.

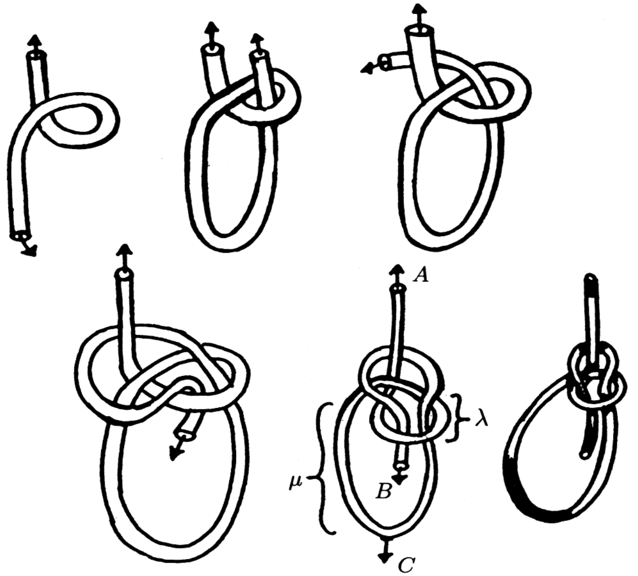


図 2.　もやい結び (bowline)

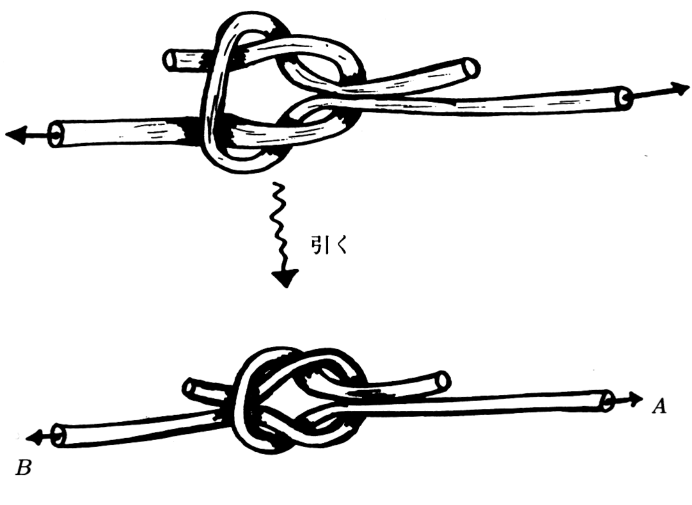


図 3.　横結び (square knot)

図 3 は, **横結び** (square knot; こま結び, 真結び, 二重結びなどともよぶ) を示すが, これは 2 本のロープをつなぐのに優れている. A と B を引っ張ると, 互いの締めつけの効果が増大し, 滑らずに結び目が保たれる.

結び目やロープの掛け結びを並べてきたが, 最後に図 4 の**縦結び** (granny) をあげよう. これは横結びと関係があるが, まったくの裏切り者である. この 2 本のロープには互いの連動性がなく, 矢印の向きに引っ張ると容易にロープが抜けて, 結び目が解けてしまう.

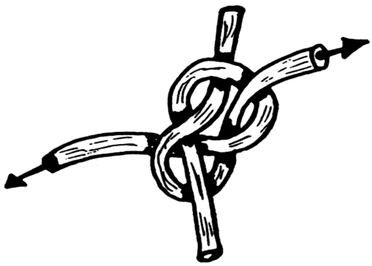


図 4. 縦結び (granny)

これらの結び目がどのように働くかについて, いくらか実際的に知っておくことは重要である. 横結びはかたく縛るのに, 縦結びは解けてしまうという事実などは, 実際のロープを使って観察するには最適である. これらの現象の良い数学的な解析法を与えることは, 極めて難しい問題である. 張力, 摩擦とトポロジーが影響し合って形態が決まり, その形態の中に, 滑り具合とか連動性などが起こっているのである.

結び目現象に関するこのような直接的な物理的問題を取り上げたが, その理由は, それらに答えようというよりはむしろ, 我々が置かれている状況の難しさを指摘するためである. 結び目の物理に関する書物は, 空間におけるロープによってできる結び目の物理的具象性を無視することができない. 我々がこれまでに成功しているものは, 極めて抽象的な, より言語学的な, また様式化され, 様式の内的な論理とそれらの外的な実現との間に均衡が保たれている, 原石のようなものにすぎない. また, このような話の脱線が, 結び目現象やまた他の領域に対するトポロジー的で物理的な問題の本質に深く迫っているのかもしれない.

結び目現象に対する直接的な物理的問題はまだほかにもある. 本書の中で, これらの話題にもふれることにしよう.

2節　結び目の図形表示と移動

現実の結び糸で起こる事柄をそれに伴なうトポロジー的な問題に移し変えることは, 1本のロープでできた閉じたループを**結び目** (knot) に対応させることで容易に達成できる. (絡み目 (link) はこのようなループをいくつか合わせたものである.) したがって, 横結び目は図5に示したような閉じたループとして描かれる. この図には, 縦結び目のループ形も示してある.

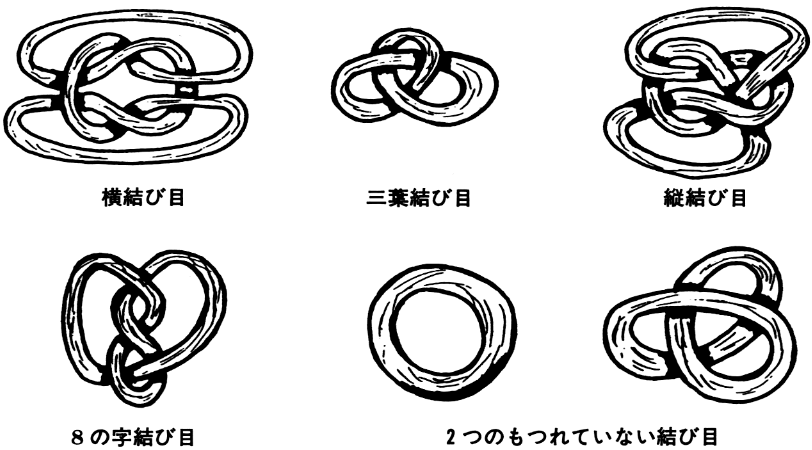


図 5.

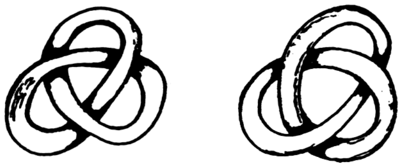
このようなループ形がトポロジー的な研究にとって便利であることは明らかである. 結び目を作り, その両端をつなぎ合わせ, ロープの端がするっとはずれたりして形態が変わったりしないようにしながら, ループをいろいろと変形させることによって実験を行うことができる.

一方, 結び目を閉じたループ形にすることによって, その結び目の利用に関する本来の動機づけのあるものが失われることもある. 横結びは2つのロープをつなぐために用いられるが, ループ形ではこのことはどこにも現れない.

トポロジーにとって, 閉じたループ形の方が圧倒的に便利である. ループ形にすることで結び目あるいは絡み目の統一的な定義が可能となり, 対応して, **もつれて**

いないこと (unknottedness) の定義も可能となる. 図 5 に示したような標準的な輪は, 典型的なもつれていない結び目である. この輪を (ロープを引きちぎることなく) 連続的に変形して得られる任意の結び目は “もつれていない”, あるいは “**平凡である** (trivial)” という.

結び目や絡み目の数学的な定義は, まだ抽象化されていないことに注意しよう (これは, 今となっては比較的容易であるが). むしろ, 実験的なトポロジー的な仕事をするにあたって, このような閉じたループ形の便利さをここでは強調したい. 例えば, 図 5 と図 6 に示したような三葉結び目 T と, その鏡像 T^* (図 6) の両方をつくることができる. この三葉結び目 T はその鏡像 T^* に連続的に変形することはできない. この事実を証明することは, とても微妙な問題である. この問題を正しく理解するために, モデルを使っての変形を実際にやってみるとよい.



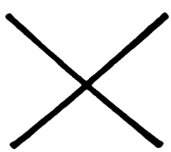
T T^*

図 6. 三葉結び目とその鏡像

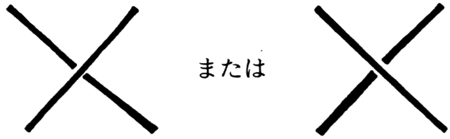
結び目 K は, その鏡像 K^* とトポロジー的に異なるとき, **カイラル** (**非双手型**(ひもろてがた); chiral) であるといわれる. また K がその鏡像 K^* に変形できるとき, **アキラル** (**双手型**(もろてがた); achiral) であるといわれる. 注目すべきことに, 8 の字結び目 (図 5 を見よ) はその鏡像に変形することができるのである (演習:この変形を実際にやってみよ). したがって, 8 の字結び目はアキラルであり, 一方, 三葉結び目はカイラルである.

ところで, 三葉結び目のカイラル性へと話を進める前に, カイラルか否かとか, もつれているか否かのような, 結び目の性質が証明できたり反証をあげることができるような, 数学的なモデルを創る必要がある.

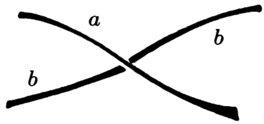
そのようなモデルを創る一つの方法は, 結び目の**図形表示** (diagrams) と**移動** (moves) を使用することである. **図形表示** (単に**表示**ともいう) とは, 平面上で, 2 重点のみを許して, 横断的に交差する曲線から構成される結び目や絡み目の抽象的で図式化された絵である.



各 2 重点では, 一方の線分の一部を削除するというように, 特別な構造を与える:



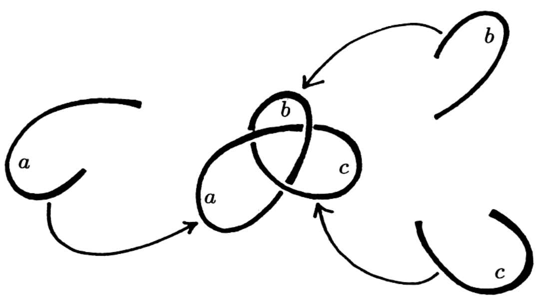
この削除している部分は, **下交差線** (undercrossing line) を表している. したがって, 次の図



においては, ラベル a を付けた線は, ラベル b を付けた線の上を通過する. したがって, 図 6 の三葉結び目 T の図形表示は, 次のようになる:



各交差点において短い線分を削除したので, 結び目や絡み目の図形表示は, 相互に関係する**弧** (arcs) の集まりとみなすことができる. そこで三葉結び目 T に対して, その図形表示上で, 下図のように弧 a, b, c とラベル付けする:



各弧は下交差点から始まり, 別の下交差点に到達するまで, 切れることなく続く.

このような図形表示は, コンパクトな縫い込みのパターンで, これからただ一つのロープモデルを正確に作ることができる. 図形表示は, 結び目の平面への射影または影のように思える. そこで, **影** (shadow) という語を, 結び目あるいは絡み目の '削除なし' の図形表示 (すなわち, 上交差, 下交差の情報のない表示) を指し示す専門用語として採用することにする. 図 7 では, 三葉結び目, ホップ絡み目 (Hopf link), ボロミアン環 (Borromean Rings) およびそれらの影を示してある. 影は, 各

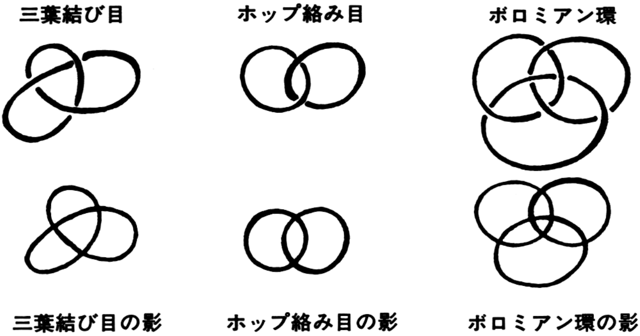
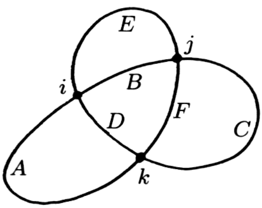


図 7.

頂点の次数が 4 であるような平面グラフである. ここでいう**グラフ** (専門的には多重グラフ) とは「グラフ理論」で扱うグラフの意味である. グラフ G は 2 つの集合から構成されている; その 1 つは**頂点** (vertex) の集合 $V(G)$ で, もう 1 つは**辺** (edge) の集合 $E(G)$ である. 各辺に対しては, 1 つまたは 2 つの頂点 (その辺の**端点** (endpoint)) の集合が指定されている. グラフは一般に, 辺を曲線として, またこれらの辺の端点を頂点として実現される.

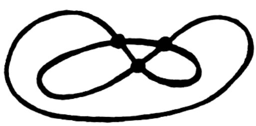
三葉結び目の影において, それを線で描いたグラフ G は, 下に示すようなラベル付きの図形によって描くことができる:



G

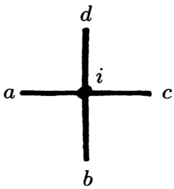
$$E(G) = \{A, B, C, D, E, F\}$$
$$V(G) = \{i, j, k\}$$
$$bA = \{i, k\} \qquad bD = \{i, k\}$$
$$bB = \{i, j\} \qquad bE = \{i, j\}$$
$$bC = \{j, k\} \qquad bF = \{j, k\}.$$

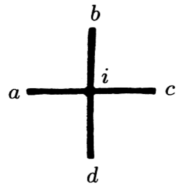
ここで bX は, 辺 X の端点の集合を表す. そのグラフを平面上の埋蔵 (embedding) として実現しなければならないので, 上で示した代数的なデータは, その影を特定するにはまだ十分ではない. 例えば, 次の図



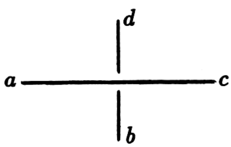
は上の三葉結び目の影と抽象グラフとしては同じである.

影の中に, あるいは図形表示の中に, 情報をいかにコード化するかという問題はとても魅力的な話題である. ここでは, (平面上に与えられた) 図形が結び目や絡み目をはっきりと示すようにしてみよう. しかし, その前に頂点の平面上への埋蔵は, その頂点に接続する辺に (反時計回りの) 順序を与えることによって特定できるということに注目したい. 例えば, $(i : a, b, c, d)$ によって下図の左側の頂点を表すことができるし, 一方 $(i : a, d, c, b)$ によって右側の頂点を表すことができる.



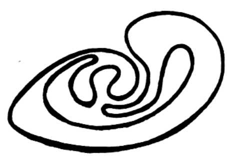


$(i : a, b, c, d)$ と $(i : a, d, c, b)$ はともに同一の交差線 ($a \to c$ と $b \to d$) をもつことに注意されたい. この図柄を持ち上げ, 裏返しにして平面上に戻すと, 一方から他方が得られる. このコードを付けることによって, 上交差と下交差の状態を指定することができる. そこで, $(i : \bar{a}, b, \bar{c}, d)$ によって, 線分 ac が線分 bd の上にあることを指定することにする.

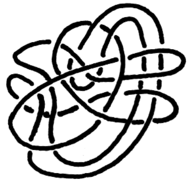
$(i : \bar{a}, b, \bar{c}, d) \leftrightarrow$ 

これでグラフのコード化については十分である.

次に, 前にあげた結び目の図形表示を考えよう. 図形表示は, 文字や数学的な表現において用いられるその他の記号と同じ基準で, ひとつの表記法とみる. さて, 読者の皆さんに, こうした図形表示をトポロジストの目をもって見てくれるようにお願いする. トポロジー的な目とは,

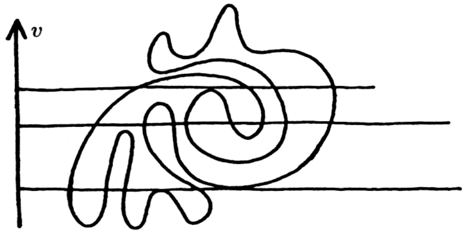
 と 

の間, あるいは

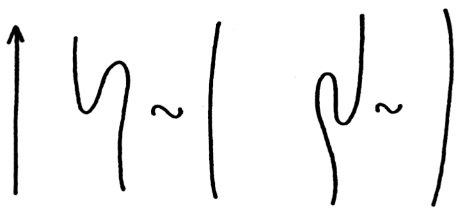
 と 

の間に違いはないと見るのである.

平面上に滑らかに描かれた単純閉曲線 (自分自身で交差しない閉じた曲線) に対して, ある方向 ($\vec{v}$) が存在して, 次の性質を満たしていることがわかる: この方向 ($\vec{v}$) と直交する直線は, この閉曲線と横断的に (接ベクトルと線形独立となるように) 交わるか, または接するように交わる.



この特別な方向に関して, 次のような移動



を繰り返し用いて, この単純閉曲線を, 唯一の (局所的な) 最大点と唯一の (局所的な) 最小点だけをもつようなものにまで単純化することができる.



後に, この考え方がとても有効となる. ちょうど今, 平面上の滑らかな (微分可能な, ゼロでない接ベクトルをもつ) 曲線に関する Jordan の曲線定理 [ST] の証明の概略を与えたことになる. Jordan の曲線定理は, そのような曲線は平面を 2 つの共有点をもたない領域に分割し, その各々は円盤と同相であることを主張している. 曲線を標準的な形に移動することによって, これらの同相写像が得られる.

Jordan の曲線定理は, 上に書いたように平面に関する一つの事実を意味する. これは, 結び目や絡み目の図による表示をそれらの数学に対応させるための, 基礎となる事実である. これは, 数学の基本的な定理が同じ数学に関する土台である, という注目すべき状況を与えている.

ともかく, 平面曲線の上で述べた基礎的なトポロジー的変形を**移動 0** (move zero) とよぶことにする.

移動 0.



そこで, 結び目や絡み目の図形表示に関する **Reidemeister 移動** (Reidemeister moves) を, 図 8 に示すように定める.

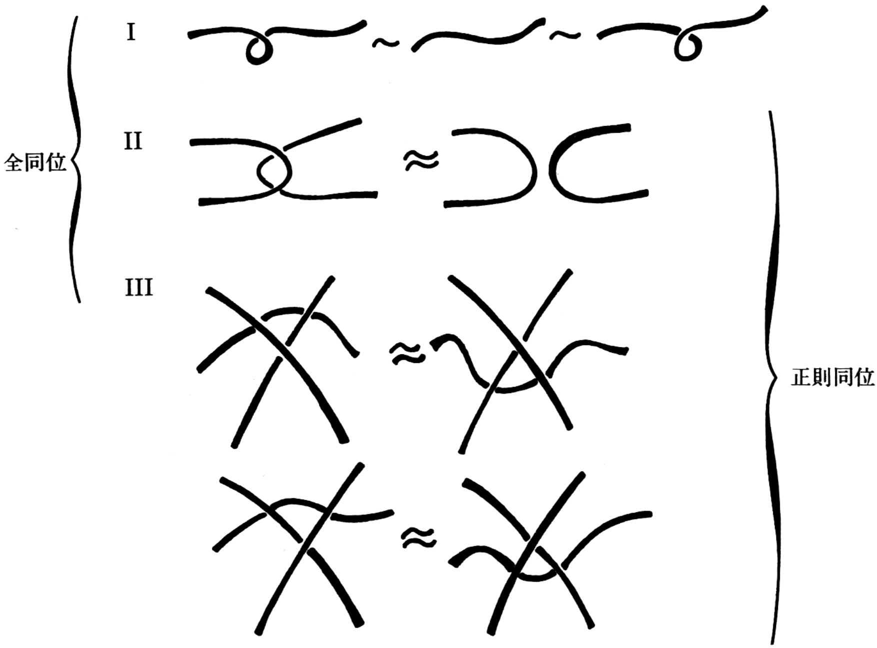
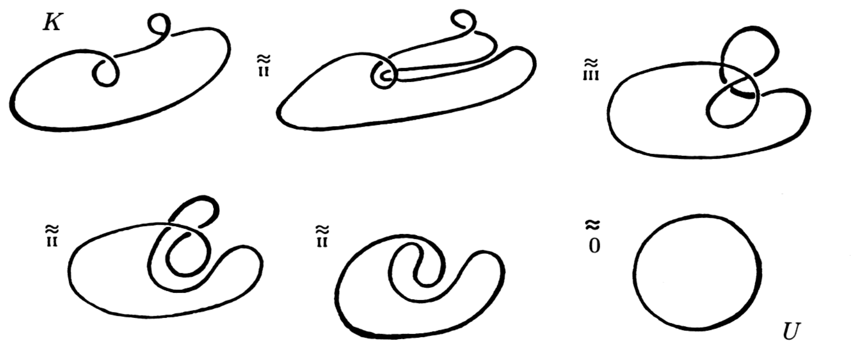


図 8.　Reidemeister 移動

図形表示の 3 つの移動 (I, II, III) は, 図形表示のグラフ的な構造を変えるが, 対応する結び目や絡み目の埋蔵のトポロジー的な型を保存する. すなわち, 各移動は, そこに描かれていない図形表示の部分は移動することなく, 図形表示の上で局所的に実行されるものと解釈する. 例えば, 次に示すのは, 図形表示 K から標準的なもつれていない結び目 U への移動の列である:



この列においては, 移動 II と移動 III (と移動 0) のみを用いた. 移動 II と移動 III によって生成される同値関係を**正則同位** (regular isotopy) とよぶ. 上図で示したように, 互いに逆の形の 2 つのカール () は相殺できるので, 移動 I だけが正則同位関係からはずされる.

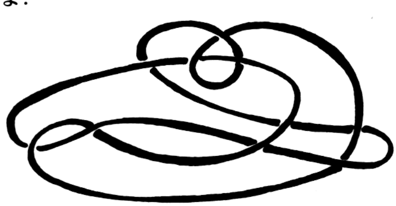
4 つの Reidemeister 移動すべてによって生成される表示の同値関係を, **全同位** (ambient isotopy) とよぶ. 実際, Reidemeister [REI] は次のことを証明した: 3 次元空間内の 2 つの結び目, あるいは絡み目が一方から他方へ連続的に変形できる (全同位の通常の概念) ための必要十分条件は, Reidemeister 移動 (0, I, II, III) の列によって, 一方の絡み目の (平面上に射影して得られた) 任意の図形表示が他方の絡み目のある図形表示に変換できることである.

したがって, これらの移動は, 3 次元空間における絡み目に対するすべてのトポロジー的なシナリオを捕らえている.

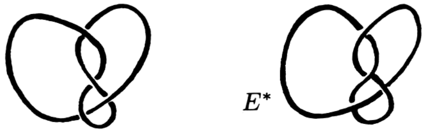
なお, Reidemeister の定理の現代的な証明については [BZ] を見られたい.

絡み目の図形表示と移動とを合わせた図による形式的システムに精通するには, 図を描くことと演習をすることがとても役立つ. 初心者のためにいくつか演習問題をあげておく.

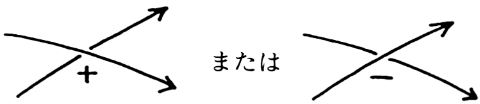
演習問題　**1.** 次の結び目から, もつれていない結び目への Reidemeister 移動 (全同位) の列を与えよ.



2. 8 の字結び目 E からその鏡像 E^* への Reidemeister 移動の列を与えよ.



3. 結び目あるいは絡み目が**有向**である (oriented) とは, その図形表示の各弧に向きが指定されていて, 各交差点において向きが



のように現れる場合をいう.

これらの有向交差点の各々は, プラス (+) またはマイナス (−) の符号によってラベル付けされることに注意する. これを **(有向) 交差の符号** (the sign of the (oriented) crossing) とよぶ.

$L = \{\alpha, \beta\}$ を 2 つの成分 α と β の絡み目とする. L の**絡み数** (linking number) $\mathrm{lk}(L) = \mathrm{lk}(\alpha, \beta)$ を次のように定義する:

$$\mathrm{lk}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \sum_{p \in \alpha \sqcap \beta} \varepsilon(p).$$

ここで $\alpha \sqcap \beta$ は α と β の交差点 (自分自身の交差点は含まず) の集合を表し, $\varepsilon(p)$ は交差点 p の符号を表す.

したがって, 例えば次のように計算される:



$\mathrm{lk}(L) = \frac{1}{2}(1+1) = 1$　　　　$\mathrm{lk}(L') = -1.$

次を証明せよ: L_1 と L_2 を 2–成分の有向絡み目の図形表示とし, L_1 が L_2 と全同位であるとすると, $\mathrm{lk}(L_1) = \mathrm{lk}(L_2)$ である. (有向絡み目の図形表示に関する Reidemeister 移動をチェックせよ.)

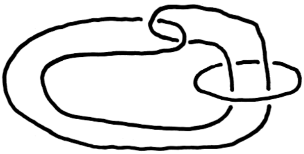
4. K を有向絡み目の図形表示とする. K の**捻り数**(ひねりすう) (writhe, または twist number) $w(K)$ を次のように定義する:

$$w(K) = \sum_{p \in C(K)} \varepsilon(p)$$

ここで $C(K)$ は図形表示 K の交差点の集合を表す. すると, $w($  $) = +3$ である.

正則同位である絡み目は同じ捻り数をもつことを証明せよ.

5. 下図左の絡み目 Wの絡み数は, その成分にどのように向きを与えても, 常に 0 であることを確かめよ.





6. ボロミアン環 (上図の右と図 7 に示す) は, 絡み合っているが, その中のどの成分を取り除いても絡んでいない 2 つの環が残る, という性質をもつ. 絡み合っている 4 成分の絡み目で, その中のどの成分を取り除いても絡んでいない 3 つの環が残るものを作れ. さらに, これを n 成分に一般化せよ. (解答の一例は、第 3 節の最後の図.)

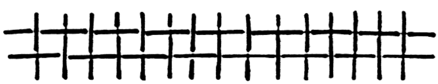
7. 次の議論では何が間違っているか? 三葉結び目 T は, 例えば

 $\underset{\text{II}}{\approx}$ 

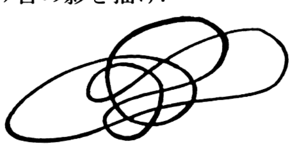
のように, これをより複雑にするような Reidemeister 移動しか実行できない. したがって, 表示 T は最小形であり, よって T は本当にもつれている (もつれていない結び目と同値でない).

8. 次の議論では何が不足しているか? 三葉結び目 T は (T にどう向きを与えようとも, 向きに関係なく) 捻り数 $w(T) = +3$ をもつ. 一方, その鏡像 T^* は捻り数 $w(T^*) = -3$ をもつ. したがって, T は T^* に全同位ではない.

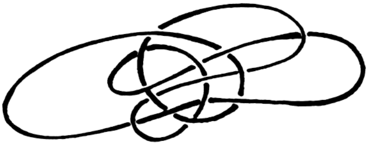
9. 図形表示が**交代** (alternating) であるとは, その成分に沿って一周するとき上交差点と下交差点が交互に現れるときをいう.



任意に結び目または絡み目の影を描け.



この影の 2 重点にうまく交差の上下を指定して, 交代図形表示にしてみよ.



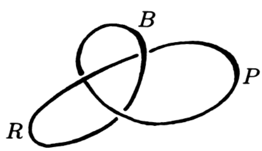
これはいつも可能であるか? 結び目の交代図形表示はどんなときにもつれているか? (経験的に調べよ.) どんな結び目も交代図形表示をもつか? (答: 否. 最小の例は 8 個の交差点をもつ.)

議論 演習問題の **1** から **4** までは, 本書のこれから先に不可欠である. 読者がこれらの演習問題をやっているものとして, 話を進める. 演習問題 **5** と **6** については後に注解する. 演習問題 **7** での誤った論法は, 「交差点の数を減らす移動を許さないような, もつれていない結び目を表す図形表示があり得る」という事実から導かれる.

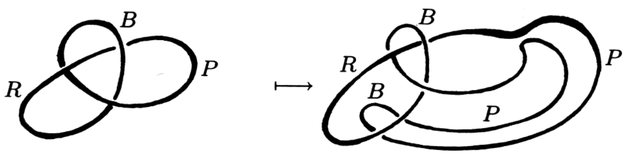
演習問題 **8** と **9** についてはこの節で議論する.

三葉結び目はもつれている

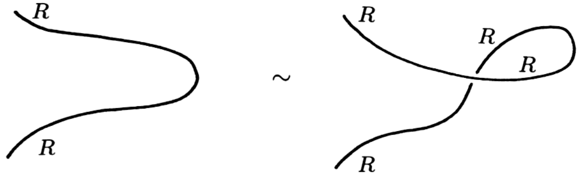
三葉結び目がもつれていることをいかにして証明するかの説明をして, この節の結びとする. 三葉結び目の図形表示の 3 つの弧を, 3 つの異なる色 (R–赤, B–青, P–紫) で色付け (ラベル付け) したものがある.



色付けを適当に考えることによって, 3 色で色付けされるという性質が Reidemeister 移動によって保存される, ということを主張する. 例えば:



しかし, 移動 I のもとでは, 1 つの頂点において唯一の色が現れるという条件にしなければならないことに注意されたい.

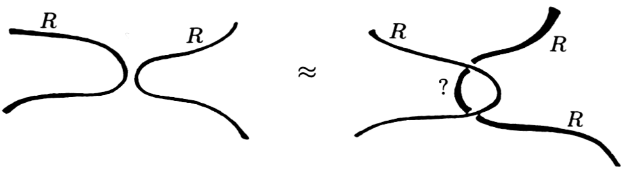


したがって, 結び目の図形表示 Kが **3彩色** (three-colored) であるとは, Kの各弧に 3 色 (R, B, P) の中の 1 色が塗られていて, 3 色すべてがこの図形表示に現れ, かつ各交差点では 3 色または 1 色が生じているときをいう. (2 色が生じる交差点は許されない.)

このような交差点の規則から, (3 色または 1 色規則に従った) 局所的な塗り変えによっては, 1 色で彩色された表示から 3 色で彩色された図形表示に変換すること

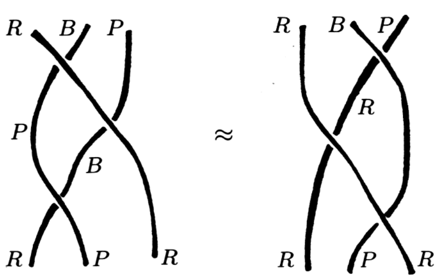


はできないことが, 直ちにわかる. 例えば, 次の場合を考えよう.



この問題の ? のついた弧には, その両端の頂点において既に 2 つの R が現れているので, R を塗らねばならない.

各 Reidemeister 移動は, その移動によって生じる新しい弧に色付けしたり, または色付けされた弧を消し去ることによって, 局所的な色の塗り変えができる. 移動 III を考察する:

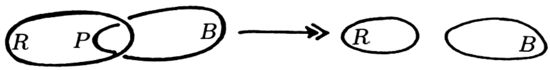


(局所的ではない) 入力 (R, B, P) と出力 (R, P, R) を保つために, 三角形移動の結果として, 単色頂点を導入することを認めなければならないことに注意する. この例の他のどんな色の入力に関しても移動 III のもとで再構成され, 3 彩色が保たれることを確かめよ (演習問題).

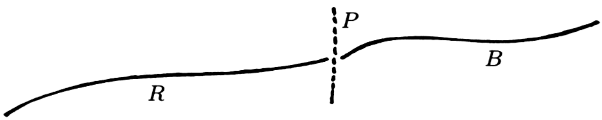
最後に, 次のようなシナリオを心配しなければならない:



移動 II で交差点を減らす方を実行する際には, 色付きの辺が消える! 下の絡み目の場合のように, 3 色すべてが現れるという条件が失われることもある.



ところが, 結び目の場合はこの難しさは生じない. 結び目では, R と B がラベル付けされた 2 つの弧は, 結局はある交差点で出会うはずである:



この交差点で交差する弧は, 3 彩色表示においては P で塗られている. したがって, 局所的な弧から P が消え失せてしまっても, それはその図形表示のほかのどこかに必ず現れるであろう.

これで三葉結び目がもつれていることの証明のスケッチが完了する. もし T がもつれていない結び目と全同位ならば, T からもつれていない結び目への Reidemeister 移動の列に上の考察を合わせると, $3 = 1$ の証明が得られることになり, よって矛盾が生じることになる. □

結び目図形表示の彩色は, 物理系のエネルギーステイト[†] の類似として, 結び目図形表示の**ステイト** (state) とよばれる. 表示のステイトでは, この系はトポロジー的な変形を許容するが, 特に 3 彩色の場合には, 系が変形されてもステイト構造が保存される方法があることを, 既にみた. よって, ステイトの不変的性質は結び目や絡み目のトポロジー的な不変量となる.

また, 与えられた図形表示のすべての可能なステイトを考えることによって (ステイト語という言葉を適当に解釈すると) トポロジー的な不変量を得ることができ

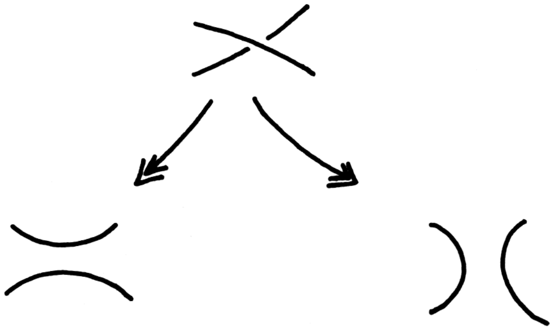
[†]訳注： エネルギー固有状態のこと.

る．不変量は, 1 つの図形表示に対するすべてのステイトの集合にわたって合計する (平均化する), あるいは積分することによって発生する．次節では, この観点を取り上げる．

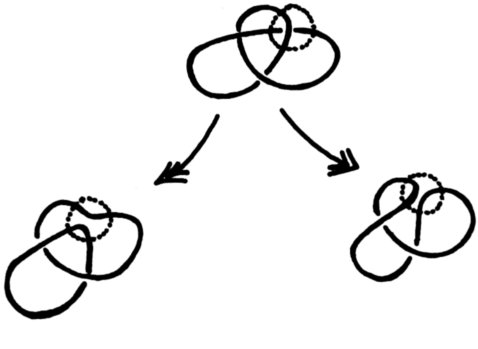
これら 2 つの観点 —— ステイトのトポロジー的な展開と, 与えられた系に対するステイトの空間にわたる積分 —— は, 結び目や絡み目のトポロジーの研究において極めて相互補完的であるようにみえる．本書の進行に沿って, これから先もこのテーマから目を離さないでほしい．ステイトの展開は, 結び目の基本群やその類似の一般化 (第 13 節) ともっとも密接に関わっている．すべてのステイトにわたる積分は, 本書の基本的なテーマなのである．

3節　ステイト多項式とブラケット多項式

向きを定めていない絡み目の図形表示の中の1つの交差点を考えよう．次の図のように，この交差点を**分離する** (split) ことによって[†]，2つの随伴する図形表示が得られる：



例題.



このプロセスを反復することによって，もともとの絡み目の図形表示を唯一の祖先とする図形表示の全家族が得られる (次ページの図9を参照).

[†]訳注：原書では，分離する (split) の他に，組継ぎする (splice) という言葉も同じ意味で使用している．本書では "分離する" に統一した．また，交差点の平滑化 (smoothing a crossing) という言葉も同じ意味でよく使われる．

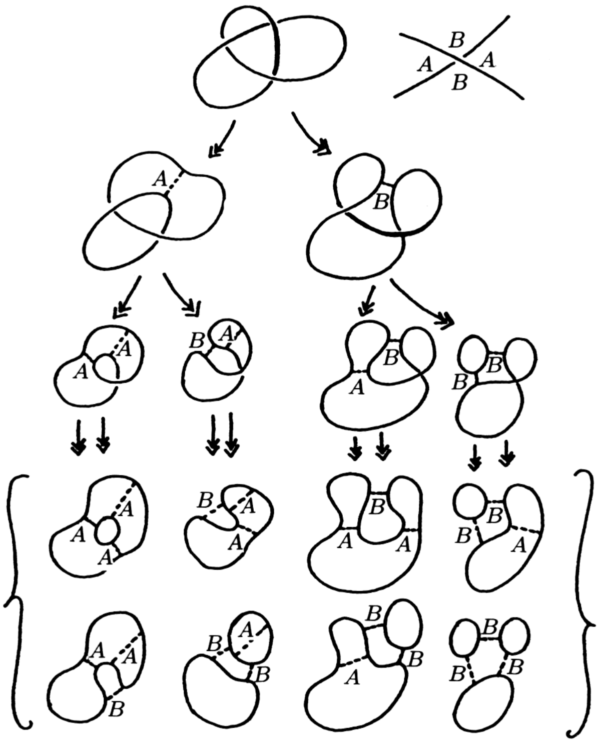
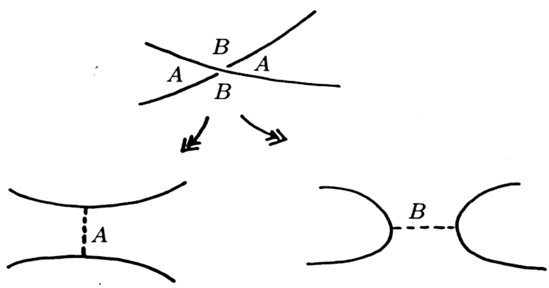


図 9.

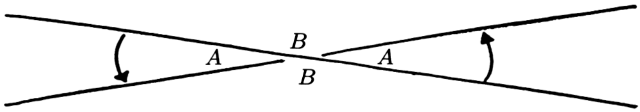
図 9 では, 次に示した規則に従って分離のタイプの指示をつけて, この分離のプロセスを表している.



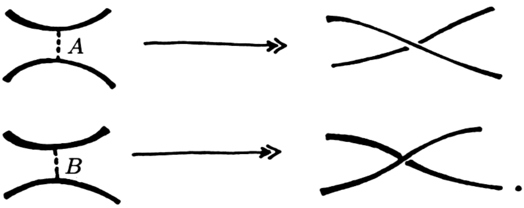
つまり, 与えられた分離が **タイプ** A であるとは, **その交差点で** A **がラベル付けされた領域が結ばれる場合**をいい, これを A **分離** (A-split) ともいう. また**タイプ**

B であるとは, その交差点で B がラベル付けされた領域が結ばれる場合であり, B **分離** (B-split) ともいう. A **領域** (A-region) とは, 下交差線に沿ってその交差点に向かって歩く観察者の**左側**に現れる領域のことをいい, B 領域は, この観察者にとって右側に現れる領域のことをいう.

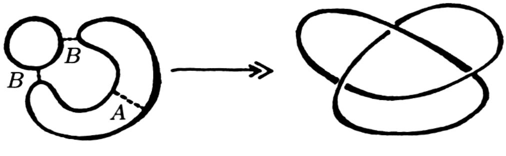
A 領域を特定するもう一つの方法は, **上交差線を反時計回りに回転するとき, この線が掃き出す方を A 領域とする**ことである.



どの場合でも, A または B がラベル付けされた分離の位置は, そのもとの交差の形に再構成できる:

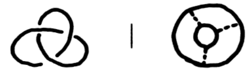


したがって, これらの A と B の痕跡を残しておけば, その子孫のどれからでも祖先の絡み目を再構成することができる. もっとも幼い子孫は平面上の Jordan 曲線の集まりである. ここでは, すべての交差点が分離されている. 図 9 では, このような子孫が 8 個ある. 次図は再構成の見本である:



与えられた結び目または絡み目 K のこれらのもっとも幼い子孫, つまり最終子孫を, K の**ステイト** (states) とよぶ. 各 (ラベル付きの) ステイトから, もとの K を再構成できる. これらのステイト全体にわたって平均をとることによって, 結び目や絡み目の不変量を構成しよう.

平均化の特別な形として, 次のようになものがあげられる: σ を K のステイトとする. そこで $\langle K|\sigma\rangle$ によって, σ に付いたラベルの (可換な) 積を表す. すると, 例えば, 次のようになる:

$\Big\langle$  $\Big\rangle = A^3.$

[ラベルは, K と関係するステイトの構造から導かれることに注意する.]

$||\sigma||$ によって, σ の中のループの個数から 1 を引いた数を表す. すると, 次のようになる:

$\Big\|$  $\Big\| = 2 - 1 = 1.$

定義 3.1. 絡み目 Kのブラケット多項式を, 次の公式で定義する:

$$\langle K\rangle = \langle K\rangle(A, B, d) = \sum_{\sigma} \langle K|\sigma\rangle d^{||\sigma||}$$

ただし, A, B, d は可換な変数である. また $\sum$ は K のステイト全体をわたって動くものとする.

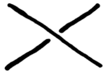
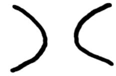
注意. ブラケットのステイト和は, 離散的な力学における分配関数 [BA1] の類似である. 実際, A, B, d を適当に選ぶと, ブラケット多項式は, Potts 模型に関する分配関数を表すのに用いられる. この関係については, 第 II 部の第 7 節および第 8 節を参照されたい.

例題. 図 9 から, 三葉結び目のブラケット多項式が, 次のようにして得られる:

$$\begin{aligned}\langle K\rangle &= A^3d^{2-1} + A^2Bd^{1-1} + A^2Bd^{1-1} + AB^2d^{2-1} + A^2Bd^{1-1}\\ &\quad + AB^2d^{2-1} + AB^2d^{2-1} + B^3d^{3-1}\\ \langle K\rangle &= A^3d^1 + 3A^2Bd^0 + 3AB^2d^1 + B^3d^2.\end{aligned}$$

このブラケット多項式は, このままではトポロジー的な不変量ではない. そこで, それが Reidemeister 移動の下でどのような行動をするかを調べ, それが不変量となるための A, B, d の条件を決定する.

命題 3.2.

$\Big\langle$  $\Big\rangle = A \Big\langle$  $\Big\rangle + B \Big\langle$  $\Big\rangle.$

注意. この命題の意味は, 各部分的な図形表示の次のような解釈に基づいている: 各小さな図形表示を大きな図形表示の一部分とみなし, それら 3 つの大きな表示は, これらの 3 つの局所的な場所を除いて, 同一であるとする. したがって, 命題 3.2 の特別な場合は, 次のようになる:



ラベル A と B は, それぞれ, A 分離と B 分離に対応して付けられる.

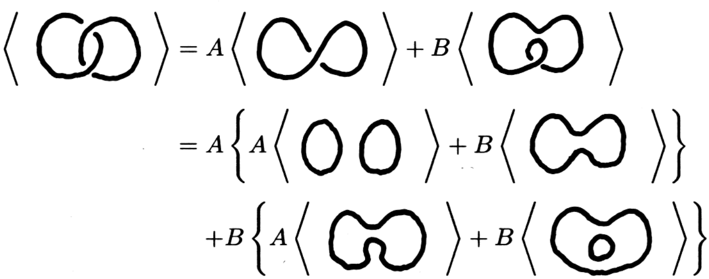
証明. 与えられた交差点は 2 通りに分離されるから, 図形表示 K のステイトは, その交差点で A 分離をして K から得られた図形を K' とし, B 分離をして K から得られた図形を K'' とするとき, K' と K'' のステイトを併せたものである. すると, $\langle K \rangle$ の定義から, $\langle K \rangle = A\langle K' \rangle + B\langle K'' \rangle$ であることが直ちにわかる. これでこの命題の証明が完了する. □

注意. 上の証明は, 任意のステイト評価 $\langle \sigma \rangle$ が矛盾なく定義されていれば,

$$\langle K \rangle = \sum_{\sigma} \langle K|\sigma \rangle \langle \sigma \rangle$$

の形をしたより一般的なブラケット多項式に対しても適用できる. ここで, 上のように $\langle \sigma \rangle = d^{||\sigma||}$ を用いた. 平面のトポロジーによって, ステイト評価のこの型が必然的であることが, まもなくわかるであろう.

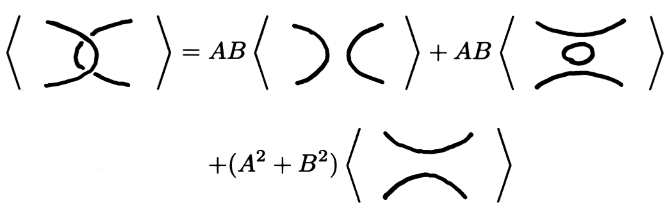
注意. 命題 3.2 は, ブラケット多項式を計算するためにも用いられる. 例えば, 次のように使用する:



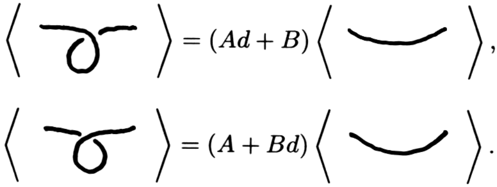
$$= A^2 d^{2-1} + ABd^{1-1} + BAd^{1-1} + B^2 d^{2-1}$$
$$= A^2 d^1 + 2ABd^0 + B^2 d^1.$$

命題 3.3.

(a)

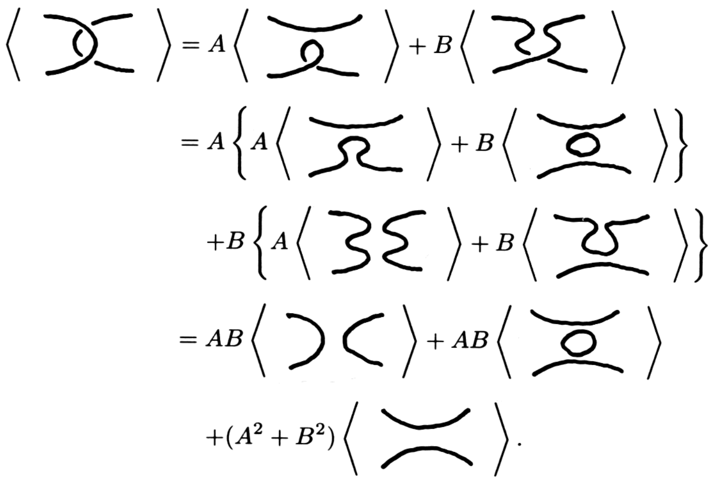


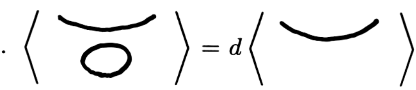
(b)

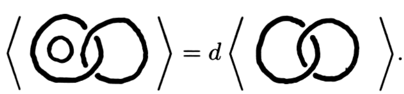


証明.

(a)



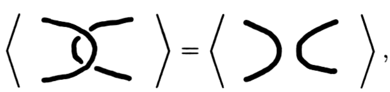
(b) の証明は読者に委ねる.  であり, 一般に, $\langle \bigcirc K \rangle = d\langle K \rangle$ が成り立つことに注意する. ここで $\bigcirc K$ は, 図形 K にこれと交わらない円周を加えて得られる図形を表す. したがって, 次が成り立つ:



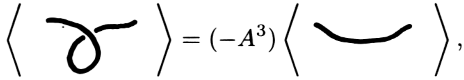
□

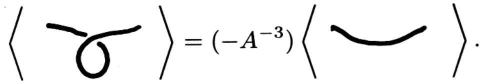
系 3.4. $B = A^{-1}, d = -A^2 - A^{-2}$ とすると, 次が成り立つ:

(a)



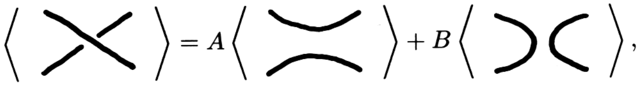
(b)

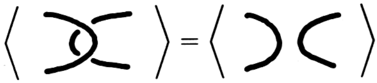




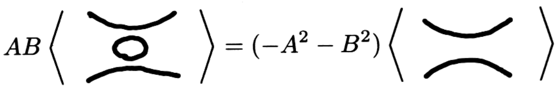
証明. 最初の式は, 命題 3.3 から直ちに得られる. 第 2 の式は, 命題 3.3 と計算 $Ad + B = A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1} = -A^3$ から得られる. □

注意. 公式 3.3(a) は, 次の二つの仮定

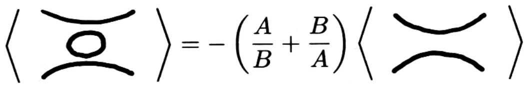




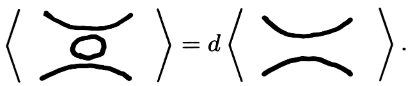
を基にすれば, $AB = 1$ と, 等式



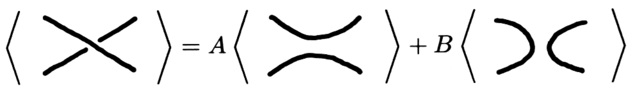
が必要であることを示している. この式は, 次の関係式に由来する:



または,



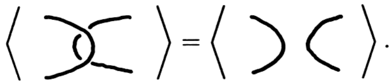
これは, いま採用している “すべての単純閉曲線を数え上げる” という規則が, 移動 II に関して不変であるために必要であることを示す. したがって, トポロジー的な観点からみると, ブラケット多項式は, 帰納的な関係



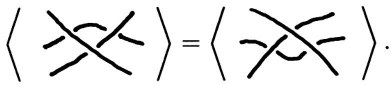
から完全に明らかになる.

以上により多項式 $\langle K \rangle$ が移動 II のもとで不変となるように調整できることが示された. 実際, 次のようにまとめられる:

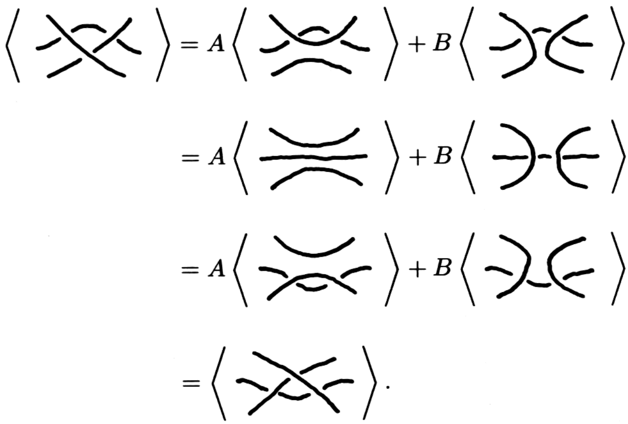
命題 3.5. $B = A^{-1}, d = -A^2 - A^{-2}$ と仮定すると, 次が成り立つ:



すると, さらに次が成り立つ:



証明.



□

$B = A^{-1}, d = -A^2 - A^{-2}$ とすると, ブラケット多項式は移動 II と移動 III のもとで不変である. 全同位 (移動 I,II,III) の不変量を求めるには, これを正規化すればよい.

定義 3.6. K を有向絡み目の図形表示とする. K の**捻り数** (writhe) $w(K)$ を, 次の等式によって定義する:

$$w(K) = \sum_p \varepsilon(p)$$

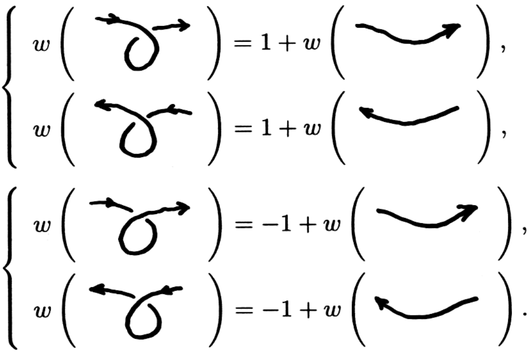
ここで, p は K のすべての交差点にわたって動き, $\varepsilon(p)$ は次の規則で定める交差点の符号である:



$\varepsilon = +1$　　　　$\varepsilon = -1$

(演習問題 3 および 4 と比較せよ.) $w(K)$ は正則同位 (移動 II,III) の不変量であり,

また次が成り立つことに注意する:



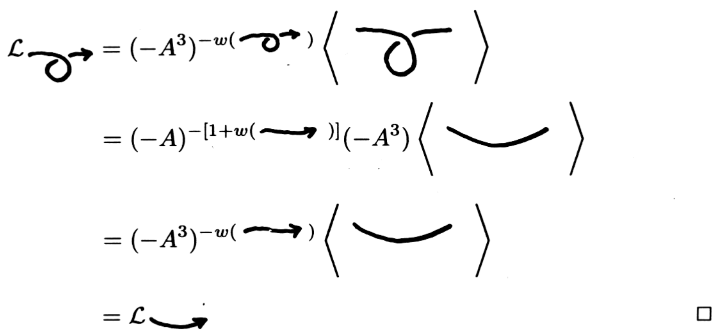
そこで, 有向絡み目 K に対して, **正規化ブラケット多項式** (normalized bracket) $\mathcal{L}_K$ を次の公式で定義する:

$$\mathcal{L}_K = (-A^3)^{-w(K)}\langle K\rangle.$$

すると次が成り立つ:

命題 3.7. 正規化ブラケット多項式 $\mathcal{L}_K$ は全同位の不変量である.

証明. $w(K)$ は正則同位の不変量であり, $\langle K\rangle$ もまた正則同位の不変量であるから, $\mathcal{L}_K$ も正則同位の不変量であることが直ちにわかる. よって, $\mathcal{L}_K$ が移動 I のもとで不変であることのみを調べればよいが, これは直ちにわかる. 例えば, 次のようになる:



最後に, 鏡像のもとでの $\langle K\rangle$ と $\mathcal{L}_K$ の特に重要な振舞いを示そう.

注意. 特に断らない限り, ブラケット多項式では, 次を仮定する:

$$B = A^{-1}, \qquad d = -A^2 - A^{-2}$$

命題 3.8. K^* を (無向) 絡み目 K の鏡像とし, K のすべての交差点において交差の上下を交換することによって得られたものとする. すると, $\langle K^* \rangle (A^{-1}) = \langle K \rangle (A)$ で, かつ次が成り立つ:

$$\mathcal{L}_{K^*}(A) = \mathcal{L}_K(A^{-1}).$$

証明. $\langle K \rangle$ と $\mathcal{L}_K$ の定義において, すべての交差を逆にすることは, A と A^{-1} の役割を交換することである. □

注意. 第 5 節 (定理 5.2) において, 適当な変数変換をすると, $\mathcal{L}_K$ はもともとの Jones 多項式であることが示される.

例題. 命題 3.8 から, もし $\mathcal{L}_K$ を計算して $\mathcal{L}_K(A) \neq \mathcal{L}_K(A^{-1})$ であることがわかれば, K はその鏡像 K^* と全同位でないことが結論される. したがって, $\mathcal{L}_K$ を使ってカイラル性を判定できる場合がある. 実際, 次で示すように, 三葉結び目の場合がこれにあたる.

(i)



$$= A(-A^3) + A^{-1}(-A^{-3})$$

$$\langle K \rangle = -A^4 - A^{-4}.$$

(ii)



$$= A(-A^4 - A^{-4}) + A^{-1}(-A^{-3})^2$$

$$\langle T \rangle = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$$

$w(T) = 3$ (T が結び目であるから, 向きの選択に依存しない)

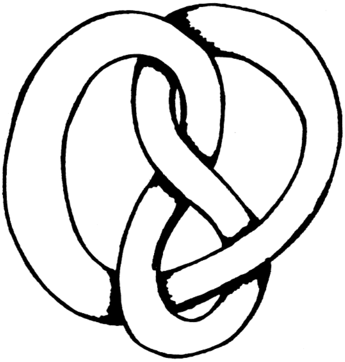
$$\therefore\ \mathcal{L}_T = (-A^3)^{-3}\langle T \rangle = -A^{-9}(-A^5 - A^{-3} + A^{-7})$$

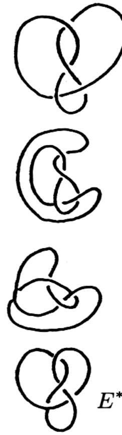
$$\therefore\ \mathcal{L}_T = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

$$\therefore\ \mathcal{L}_{T^*} = A^4 + A^{12} - A^{16}.$$

$\mathcal{L}_{T^*} \neq \mathcal{L}_T$ であるから, 三葉結び目はその鏡像と全同位ではないことが結論された. ついでに, 三葉結び目は平凡型でないこと, Hopf 絡み目 K は絡んでいることも証明したことになる.

(iii) 8 の字結び目:





E

E^*

$\langle E \rangle = A \Big\langle$  $\Big\rangle + A^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle$

$= A(-A^3) \Big\langle$  $\Big\rangle + A^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle$

$$= -A^4[-A^4 - A^{-4}] + A^{-1}[-A^{-5} - A^{-3} + A^{-7}]$$

$$= A^8 + 1 - A^4 - A^{-4} + A^{-8}$$

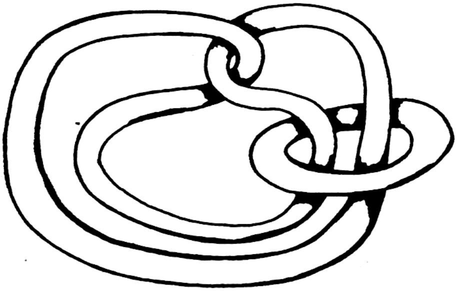
$$\langle E \rangle = A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}.$$

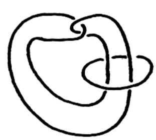
ところで, $w(E) = 0$ であるから, 次がわかる:

$$\mathcal{L}_E = \langle E \rangle, \qquad \mathcal{L}_{E^*} = \mathcal{L}_E.$$

実際, E はその鏡像 E^* と全同位である.

(iv) Whitehead 絡み目:





W

Whitehead 絡み目 W は, その成分にどう向きを与えようとも, 絡み数は 0 であるが, ブラケット多項式を計算すると, それが絡んでいることがわかる.

$\langle W \rangle = A \Big\langle$  $\Big\rangle + A^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle$

$= A \Big\langle$  $\Big\rangle + (A^{-1})(-A^{-3}) \Big\langle$  $\Big\rangle$

$= A(-A^3) \Big\langle$  $\Big\rangle + A^{-4} \Big\langle$  $\Big\rangle$

$= (-A^4) \Big\langle$  $\Big\rangle - A^{-4}\langle E^* \rangle$

$$
\begin{aligned}
&= (-A^4)(-A^{-3})\langle T^* \rangle - A^{-4}\langle E^* \rangle \\
&= (+A^1)[-A^{-5} - A^3 + A^7] - A^{-4}[A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8}] \\
&= -A^{-4} - A^4 + A^8 - A^4 + 1 - A^{-4} + A^{-8} - A^{-12} \\
\langle W \rangle &= A^8 + A^{-8} - 2A^4 - 2A^{-4} + 1 - A^{-12}.
\end{aligned}
$$

(v)     $\cdots$

K_1 K_2 K_3 K_4 $\cdots$

ここで K_n は $(2, n)$ 型**トーラス絡み目** (torus link) を表す (下図参照).

$2n$ 交差点

$\Big\langle$  $\Big\rangle = A \Big\langle$  $\Big\rangle$

$+A^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle$

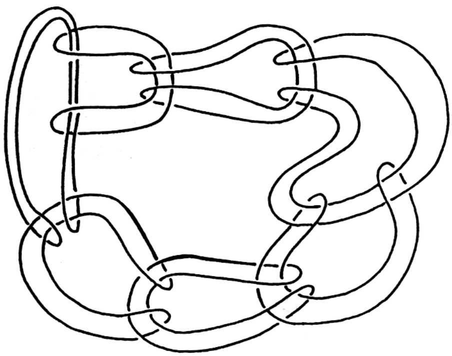
$$\Rightarrow \langle K_n \rangle = A\langle K_{n-1} \rangle + A^{-1}(-A^{-3})^{n-1}.$$

$$\boxed{\langle K_n \rangle = A\langle K_{n-1} \rangle + (-1)^{n-1}A^{-3n+2}}$$

$$\langle K_1\rangle = -A^3$$
$$\langle K_2\rangle = A(-A^3) + (-1)^1 A^{-3\cdot 2+2} = -A^4 - A^{-4}$$
$$\langle K_3\rangle = A(-A^4 - A^{-4}) + (-1)^2 A^{-7} = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$$
$$\langle K_4\rangle = A(-A^5 - A^{-3} + A^{-7}) + (-1)^3 A^{-10} = -A^6 - A^{-2} + A^{-6} - A^{-10}$$

(脚注参照)†

この手順を用いて, 次のことを示せ: $(2,n)$ 型のトーラス絡み目 $(n>1)$ はすべてその鏡像と全同位ではない.

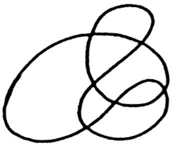


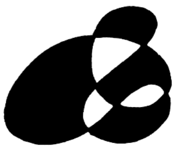
†訳注： 上の漸化式を解くと, 次のようになる:

$$\langle K_n\rangle = -A^{n+2} - \frac{A^{n-2} + (-1)^n A^{-3n+1}}{A^4+1}.$$

4 節　交代絡み目とチェス盤曲面

本節は, 全体が一つの長い例題である. 始めに, 任意の絡み目の影 (これには上交差と下交差が指示されていない) をとる.

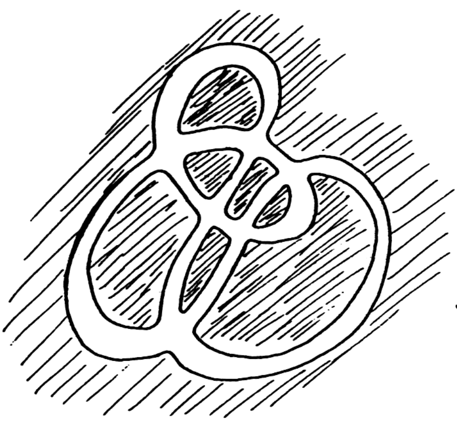




そこでその領域を 2 色 (黒と白) で塗り分けるが, 外部領域には白を塗り, 辺を共有する 2 つの領域には異なる色が塗られるようにする.

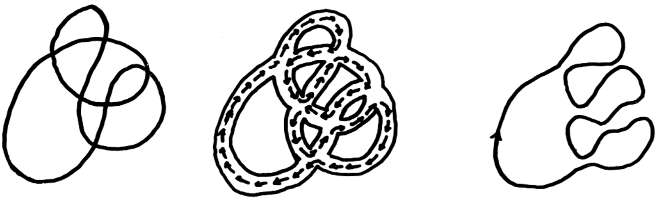
試みにやってみたどんな例についても, このような彩色が可能であることに気づくであろう. これがいつでも可能であることを証明せよ!

この証明に取り掛かっている間に, ここにもう一つ別のパズルがある. 影 U を太らせて, 交差点がある道路網のような図を作る.



そこで, この道路地図で, すべての道を 1 度だけ辿り, また各交差点で必ず曲がるようなルートを見つけよ.

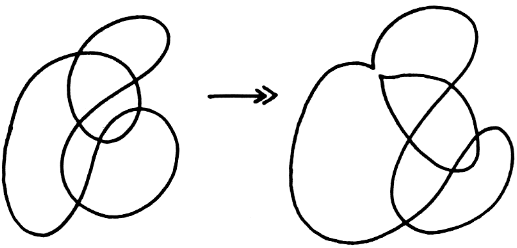


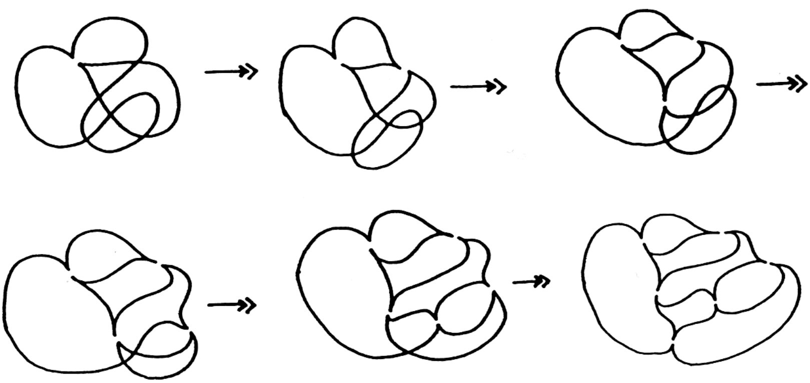


この道路問題は, 次の問題に置き換えられることがわかる: **図形表示のすべての交差点を分離して, 得られたステイトが唯一の成分をもつようにせよ.**

すると, このような分離の存在を証明することは容易である. **一つ一つ順に図形表示の交差点を分離していくが, 各段階で図形表示が連結であるように分離すればよい**のである.

例えば, 次のように実行する:





連結性を保つことはいつでも可能である. なぜならば, 分離 >< を実行して非連結となったとすると, その状態は図 (a) の形をしているはずであるが, このとき図 (b) は連結であるからである.



(a) (b)

ここでは **Jordan の曲線定理**「平面上の単純閉曲線は平面を 2 つの連結な部分に分割する」を, 暗黙のうちに使っている.

前述の道路問題が解決されると, **任意の絡み目の図形表示が 2 色で彩色可能であること**がわかる. 実際, 次の図のように行えばよい:



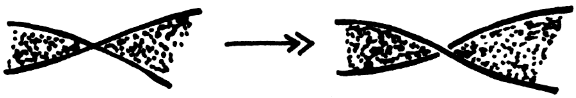
与えられた絡み目の図形表示を分離して, 1 つの単純閉曲線にする. この閉曲線の内部に色を塗る. そして, 元の絡み目の図形表示の対応する領域に色を塗る.

そこで, 絡み目の図形表示のこのような 2 彩色を**チェッカー彩色**とよぶ.

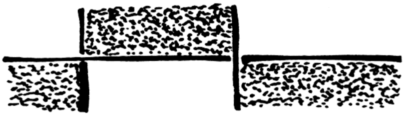
絡み目の図形表示が 2 彩色可能 (つまり, チェッカー彩色可能) であることがわかると, 次の基本定理が証明できることになる.

定理 4.1. U を任意の絡み目の影とする. U のすべての 2 重点に対して上交差または下交差をうまく選定すると, できた図形表示 K が**交代** (alternating) となるようにできる. (図形表示が交代であるとは, 図形表示の弧に沿って一周するとき, 通過する交差点が上, 下, 上, 下,$\cdots$と交互に現れる場合をいう.)

証明. 図形表示 U を白と黒の 2 色で彩色し, 各交差点で次の図の規則に従って上・下を指定する:

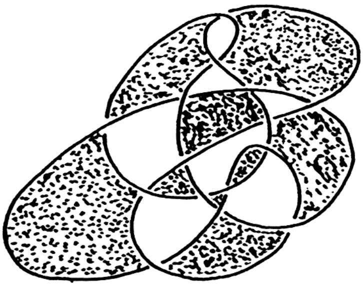


つまり, この交差点の A 領域が黒となるようにする. 次の図により, 上の規則で得られた図形表示 K が交代であることがわかるであろう:

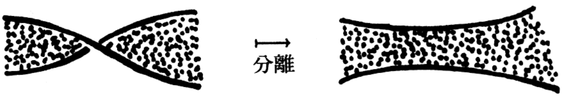


これで証明が完了する. □

例題.



これで, この節の中心部分にやってきた. 交代絡み目の図形表示 K のブラケット多項式 $\langle K \rangle$ を考察しよう. K を上の証明のように白と黒でチェッカー彩色すると, A 領域のどの対も黒が塗られている. そこで, 各交差点で次の図のように分離して得られるステイトを S とする.



S は, $\langle K \rangle$ においては

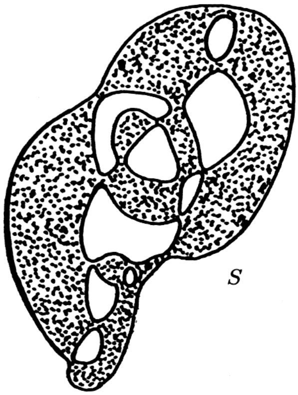
$$A^{\#C(K)}(-A^2 - A^{-2})^{\ell(S)-1}$$

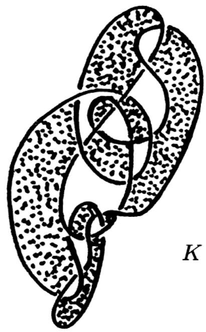
だけの寄与をする. ただし, $C(K)$ は図形 K の交差点の集合であり, $\ell(S)$ はこのステイト S の中のループの個数である. また, $V(K)$ を $C(K)$ の個数とする; $V(K) = \#C(K)$. すると, S が寄与する最高次数の項は,

$$(-1)^{\ell(S)-1} A^{V(K)-2\ell(S)-2}$$

である. **これが $\langle K \rangle$ の最高次数の項であり, また最高次数の項の係数はちょうど $(-1)^{\ell(S)-1}$ であることを主張する.**

この主張を示すために, まずステイト S をよく調べてみよう:


S


K

$$\left.\begin{array}{rcrcr} V & = & V(K) & = & 17 \\ W & = & W(K) & = & 10 \\ B & = & B(K) & = & 9 \\ R & = & R(K) & = & 19 \end{array}\right\}$$

構成法から, 次の等式を得る:

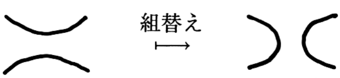
$$||S|| = \ell(S) - 1 = W - 1.$$

ただし, $W = W(K)$ は, この表示を白黒 2 色でチェッカー彩色したときの白領域の個数である. (黒領域の個数を $B = B(K)$ で, 領域の総数を $R = R(K)$ で表す.) すると, ブラケット多項式の最高次数が

$$\max\deg\langle K\rangle = V + 2W - 2$$

であることを主張している.

さて, この公式が正しいことを示すために, K の任意の他のステイト S'を考えよう. S' は, S における分離のいくつかを転換することによって, S から得られる:



ここで表示 K は**既約** (reduced) であると仮定する. これは, K が, 次の図のような, 2 つの部分をつなぎかつ交差を含むような, 2 本の橋をもたないことを意味する.



この仮定と S の構成から, S' が S から 1 回の転換で得られるならば, $||S'|| = ||S|| - 1$ である. したがって, S の寄与が $A^{V(K)}(-A^2 - A^{-2})^{||S||}$ ならば, S' の寄与は

$A^{V(K)-2}(-A^2-A^{-2})^{||S||-1}$ であり, S' が寄与する最大次数は S が寄与する最大次数より 4 だけ少ない. よって, S' をさらに転換して得られるどのようなステイトについても, S に対する最大次数を上回ることはできない. この単純な議論で, 最大次数に関する主張が証明された.

同じ論拠によって, 最小次数は次の公式で与えられる:

$$\min\deg\langle K\rangle = -V-2B+2.$$

上で証明したことを定式化すると, 次のようになる:

命題 4.2. K を既約な交代結び目図形とし, 白と黒でチェッカー彩色され, 特に非有界領域は白で塗られているとする. このとき, $\langle K\rangle$ の最大次数と最小次数は, 次の公式で与えられる:

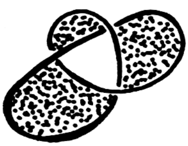
$$\max\deg\langle K\rangle = V+2W-2,$$
$$\min\deg\langle K\rangle = -V-2B+2.$$

ここで, Vは表示 K における交差点の個数を, W は白領域の個数を, B は黒領域の個数を表す. □

例えば, 右手系三葉結び目 T のブラケット多項式が

$$\langle T\rangle = -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$$

であることは既にわかっている. また下の 2 彩色において,



$$V=3,\quad W=2,\quad B=3$$

であるから,

$$\begin{aligned} V+2W-2 &= 3+4-2 &= 5,\\ -V-2B+2 &= -3-6+2 &= -7 \end{aligned}$$

となり, これらは実際に $\langle T\rangle$ の最大次数と最小次数である.

定義 4.3. 無向な結び目の図形表示 K の**径間** (span) を, そのブラケット多項式の最大次数と最小次数の差と定める. したがって,

$$\mathrm{span}(K) = \max\deg\langle K\rangle - \min\deg\langle K\rangle$$

である. $\mathcal{L}_K = (-A^3)^{-w(K)}\langle K\rangle$ は全同位の不変量であるから, $\mathrm{span}\langle K\rangle$ も全同位の不変量であることがわかる.

さて, K を既約な交代図形表示とすると, 次が成り立つことがわかっている:

$$\max\deg\langle K\rangle = V + 2W - 2,$$
$$\min\deg\langle K\rangle = -V - 2B + 2$$

したがって, $\mathrm{span}\langle K\rangle = 2V + 2(W+B) - 4$ である.

しかし, $W + B = R$ でこれはこの図形表示の領域の総数であり, $R = V + 2$ であることが容易に示される. したがって, 次が得られる:

$$\mathrm{span}\langle K\rangle = 2V + 2(V+2) - 4$$
$$\mathrm{span}\langle K\rangle = 4V.$$

定理 4.4.([LK4], [MUR1]) K を既約な交代図形表示とする. K の交差点の個数 $V(K)$ は, K の全同位に関する不変量である. □

これは, ブラケット多項式 (したがって, Jones 多項式) のかなり特殊な応用である. 交差点の個数がトポロジー的な不変量であることは, Tait や Kirkman や Little などが 1800 年代の後半に結び目の表を作り始めたときから予想されていた. ブラケット多項式は, その証明に対して驚くほど見事に順応したのである.

この過程において, 交差点をもつ既約な交代図形が非平凡型の結び目や絡み目を表現することも示した. 定理 4.4 の, いわゆる [adequate] とよばれる絡み目への一般化については, [LICK1] を参照されたい.

演習問題 4.5. 本節の方法を用いて, 交代結び目または絡み目のカイラル性に関して, 可能な限り最良の結果を得よ. (ヒント: K^* を K の鏡像とすると, $\mathcal{L}_{K^*}(A) = \mathcal{L}_K(A^{-1})$ である.)

解. $\mathcal{L}_K(A) = (-A^3)^{-w(K)}\langle K\rangle$ であることに注意すると,

$$\max\deg\mathcal{L}_K = -3w(K) + \max\deg\langle K\rangle,$$
$$\min\deg\mathcal{L}_K = -3w(K) + \min\deg\langle K\rangle$$

である. もし $\mathcal{L}_K(A) = \mathcal{L}_K(A^{-1})$ ならば, $\max\deg\mathcal{L}_K = -\min\deg\mathcal{L}_K$ であるから,

$$6w(K) = +\max\deg\langle K\rangle + \min\deg\langle K\rangle$$

である. したがって, もし K が既約で交代ならば, 命題 4.2 より,

$$6w(K) = 2(W - B),$$

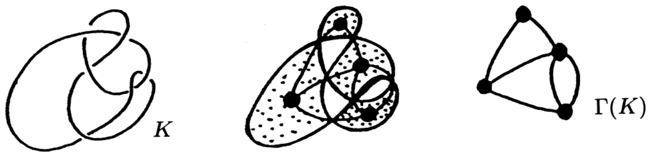
よって $3w(K) = W - B$ が得られる.

例えば, K を三葉結び目  とすると, $B = 3, W = 2, w(K) = 3$ である. $W - B = -1 \neq 9$ であるから, K はその鏡像と全同位ではない, と結論することが

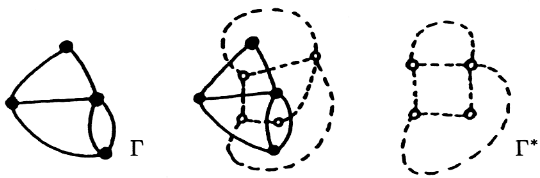
できる.

もし図形表示 K が既約で交代ならば, K がアキラルであるとき $3w(K) = W - B$ であることを示した. この結果はもっとよくできるが, これ自身なかなか素晴らしく, また簡単な出発点となり得る (Thistlethwaite [TH4] と Murasugi [MUR2] は, 既約で交代な絡み目の表示図形 K について, $w(K)$ は全同位の不変量であることを示した). また, $w(K) = 0$ **で K がアキラルという条件のもとでは $B = W$ である**, ことも既に示したことに注意する. この演習問題の [adequate] 絡み目に対する一般化については, [LICK1] と [TH3] を見よ.

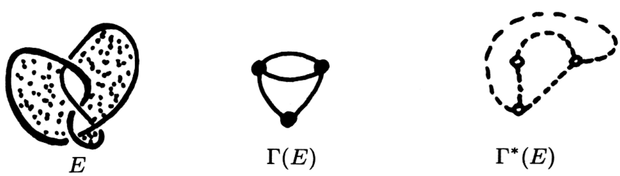
例題 4.6. 絡み目図形 K のグラフ $\Gamma(K)$ を, 次のように定義する: K の領域を白黒 2 色でチェッカー彩色するが, その際, 外部領域が白となるようにする. 各黒領域に対して頂点を選び, その 2 つの頂点を $\Gamma(K)$ の 1 辺で結ぶのは, 対応する K の領域が 1 つの交差点で出会うときとする.



同じ K について, 白領域から構成される対応するグラフ $\Gamma^*(K)$ は, $\Gamma(K)$ の (平面的な) 双対である. すなわち, $\Gamma^*(K)$ は, Γ^* の頂点を $\Gamma(K)$ の各領域に対応させ, Γ^* の辺を Γ の 2 つの領域が共通辺をもつときと定めることによって, $\Gamma(K)$ から得られる:



例えば, 8 の字結び目 E の場合には, $\Gamma(E)$ と $\Gamma^*(E)$ が同型なグラフであることがわかる.



これらのグラフが同型であるという事実は, 結び目 E がその鏡像と全同位であるという事実と関係している. 実際, もし $\Gamma(K)$ と $\Gamma^*(K)$ が 2 次元球面 S^2 (つま

り, 平面に無限遠点を付加して得られるもの) 上で同型なグラフであるならば, それらに随伴する交代結び目 K と (その鏡像) K^* は全同位である (演習問題). この命題の逆の 1 つは, **鏡予想** (Mirror Conjecture) といわれるもので, 次のように述べられる: K が交代結び目で, K がその鏡像に全同位ならば, K の交代図形表示 $\mathbf{K}$ が存在して, $\Gamma(\mathbf{K})$ と $\Gamma^*(\mathbf{K})$ が 2 次元球面 S^2 上で同型なグラフとなる.

5節 Jones 多項式とその一般化

本来の 1 変数 Jones 多項式は, Artin の組み紐群の新しい表現を経て発見された [JO2]. このことについては第 7 節で述べる.

次の定義から, ブラケット多項式からどのようにして Jones 多項式が生まれるのかを, 簡単に示すことができる.

定義 5.1. 1 変数 Jones 多項式 $V_K(t)$ とは, 有向絡み目 K に対して定まる変数 t の Laurent 多項式 (すなわち, 変数 t の正巾および負巾の有限個の項からなる多項式) で, 次の性質を満たすものをいう:

(i) K が K' と全同位ならば, $V_K(t) = V_{K'}(t)$.

(ii) V $= 1$.

(iii) $t^{-1}V$ $- tV$ $= \left(\sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) V$.

この最後の式において, 3 つの小さな図は, これらの小さな図によって指示された部分のみが指示通りに違っていて, それ以外の部分は同一であるような 3 つの絡み目の図形表示を意味している.

例えば, (i) と (ii) より, V $= V$ $= V$ $= 1$ である. したがって (iii) より,

$$t^{-1} - t = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V$$.

ここで, $\delta = \dfrac{t^{-1} - t}{\sqrt{t} - 1/\sqrt{t}} = \dfrac{(t^{-1} - t)(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t})}{t - t^{-1}}$ とおくと,

$$\delta = -(\sqrt{t} + 1/\sqrt{t})$$

が得られる. この定義によって, 絡み目の図形表示の Jones 多項式を帰納的に計算することができる (これについてはまもなく議論する). このような不変量が存在するかどうか, また存在するとしたとき, それが一意的に定まるかどうかは, この定義からはわからない. しかし, Jones は, 彼の不変量についての定理として, (i),(ii),(iii) を証明したのである. 実際には次が成り立つ:

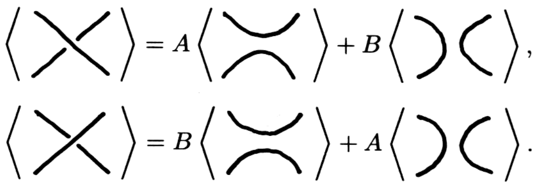
定理 5.2. 第 4 節のように, $\mathcal{L}_K(A) = (-A^3)^{-w(K)}\langle K\rangle$ とすると, 次が成り立つ:

$$\mathcal{L}_K(t^{-1/4}) = V_K(t).$$

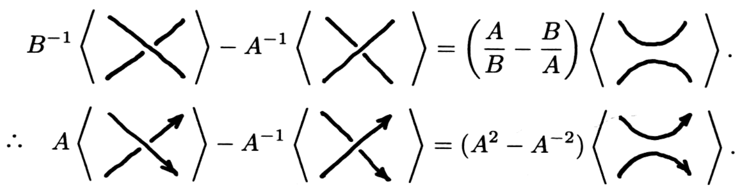
このようにして, 1 変数 Jones 多項式は, 正規化ブラケット多項式から得られる.

注意. この定理は次のように解釈をすることもできる: $V_K(t) = \mathcal{L}_K(t^{-1/4})$ とおけば, $V_K(t)$ は定義 5.1 の性質 (i),(ii),(iii) を満たす. したがって, この定理は, 1 変数 Jones 多項式の存在 (と定義の正当性 well-definedness) を証明している. また, (i),(ii),(iii) を満たす多項式としての $V_K(t)$ におなじみの読者にとっては, この定理は $V_K(t)$ とブラケット多項式との関係を示しているともいえる.

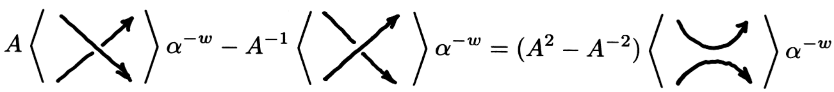
定理 5.2 の証明. $B = A^{-1}$ であることに注意すると, ブラケット多項式について, 次の公式が得られる:



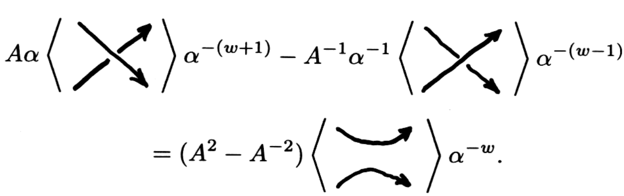
したがって,



ここで $w = w($$)$ とおくと, $w($$) = w + 1$, $w($$) = w - 1$ となる. $\alpha = -A^3$ とすると,



したがって,



$A\alpha\mathcal{L}$  $-A^{-1}\alpha^{-1}\mathcal{L}$  $=(A^2-A^{-2})\mathcal{L}$ 

$-A^4\mathcal{L}$  $+A^{-4}\mathcal{L}$  $=(A^2-A^{-2})\mathcal{L}$  .

ここで $A=t^{-1/4}$ とおくと, 次の等式が導かれる:

$t^{-1}\mathcal{L}$  $-t\mathcal{L}$  $=\left(\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathcal{L}$  .

これで定義 5.1 の性質 (iii) が証明された. 性質 (i) と (ii) は, $\mathcal{L}_K$ の対応する性質から, 直接に導かれる. これで証明が完了する. □

Jones 多項式に対するこのようなアプローチの効果は, 次に示す**逆転性質** (reversing property) の直接的で単純な証明が得られることである.

命題 5.3. K と K' を 2 つの有向絡み目とし, K' は成分 $K_1 \subset K$ の向きを逆転させることによって得られたものとする. $\lambda = \mathrm{lk}(K_1, K-K_1)$ によって, K_1 と K の残りの成分との全絡み数を表す. (すなわち, λ は, K_1 と K の残りの成分との絡み数の総和である.) すると, 次が成り立つ:

$$V_{K'}(t) = t^{-3\lambda}V_K(t).$$

証明. K と K' の捻り数の間には, 次の関係式が成り立つことが容易にわかる: $w(K') = w(K) - 4\lambda$. ただし, $\lambda = \mathrm{lk}(K_1, K-K_1)$ は, この命題の中で述べたとおりとする. したがって,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{K'}(A) &= (-A^3)^{-w(K')}\langle K'\rangle\\ &= (-A^3)^{-w(K')}\langle K\rangle\\ &= (-A^3)^{-w(K)+4\lambda}\langle K\rangle\\ \therefore\ \mathcal{L}_{K'}(A) &= (-A^3)^{4\lambda}\mathcal{L}_K(A).\end{aligned}$$

したがって, 定理 5.2 より,

$$V_{K'}(t) = \mathcal{L}_{K'}(t^{-1/4}) = t^{-3\lambda}\mathcal{L}_K(t^{-1/4}) = t^{-3\lambda}V_K(t)$$

が得られる. これで証明が完了する. □

Jones 多項式のこの逆転性質は, この多項式が定義 5.1 の (iii) の関係式

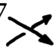
$t^{-1}V$  $-tV$  $=\left(\sqrt{t}-\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)V$ 

のおかげであるという観点に立つと, まさに驚くべきことである ([MO1] と [LM2] を見よ). この関係式は, 構造上次に示す Alexander-Conway 多項式 $\nabla_K(z) \in \mathbf{Z}[z]$

(変数 z の整数係数の多項式環) の定義関係式と似ている:

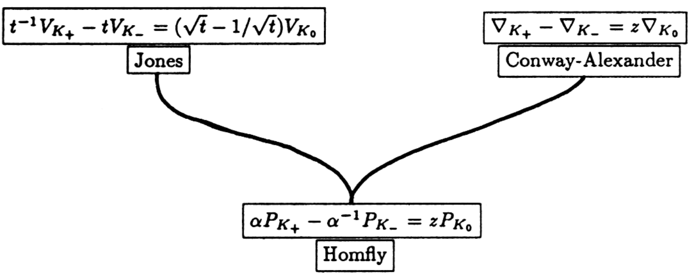
(i) 有向絡み目 K と K' が全同位ならば, $\nabla_K(z) = \nabla_{K'}(z)$

(ii) ∇  $= 1$

(iii) ∇  $- \nabla$  $= z\nabla$ 

これらの性質は, John H.Conway [CON] によってなされた Alexander 多項式 [A] の再構成 (と一般化) である. Alexander 多項式については, 第 12 節と第 13 節において, かなり長くまたいろいろな観点から議論する. 上記の 3 つの性質 ((i),(ii),(iii)) がこの多項式を特徴づけることを看破した人物こそが Conway であった. さらに, $\nabla_K(z)$ は向きの変化に極めて敏感で, それは変数の絡み数乗を単純に掛けるといったものではない.

Jones 多項式と Conway-Alexander 多項式に関する単位元を適当に変換して揃えることによって, それらの共通の一般化を求めることにいきつく. この一般化は存在し, 多くの発見者 ([F], [PT]) の頭文字をとって Homfly 多項式とよばれる.



上図において, **有向 2 変数多項式** (oriented 2-variable polynomial) $P_K(\alpha, z)$ に対する基本的な変換関係を指示した. $P_K(\alpha, z)$ において,

$\alpha = t^{-1}$, $z = \sqrt{t} - 1/\sqrt{t}$ とすると, Jones 多項式,

$\alpha = 1$ とすると, Conway-Alexander 多項式

が生まれる. Homfly 多項式の存在のもともとの証明は, 絡み目の表示に関する帰納法によるものであった. ここではその存在を, ブラケット–ステイト模型の一般化によって導く. Homfly 多項式に対する別のアプローチは, Jones [JO3] によって与えられたもので, それは $V_K(t)$ に対する彼のもともとの方法の一般化である.

この有向 2 変数多項式に伴って, **準有向 2 変数多項式** (semi-oriented 2-variable polynomial; **Kauffman 多項式**) $F_K(\alpha, z)$ も存在し [LK8], これはブラケット多項式と本来の Jones 多項式の一般化である. この多項式は, 無向絡み目に対して定義されて, 次の 4 つの性質 (i),(ii),(iii),(iv) を満たす多項式 L_K の正規化である.

(i) K と K' が正則同位ならば, $L_K(\alpha, z) = L_{K'}(\alpha, z)$.

(ii) L $= 1$.

(iii) L $+ L$ $= z(L$ $+ L$ $)$.

(iv) L $= \alpha L$ , L $= \alpha^{-1} L$ .

正則同位に関する情報については, 図 8 および第 2 節と第 3 節の議論を見ていただきたい. ブラケット多項式の場合と同じように, L–多項式は Reidemeister 移動 I のもとで乗法的である. そこで F–多項式は, 次の式で定義される:

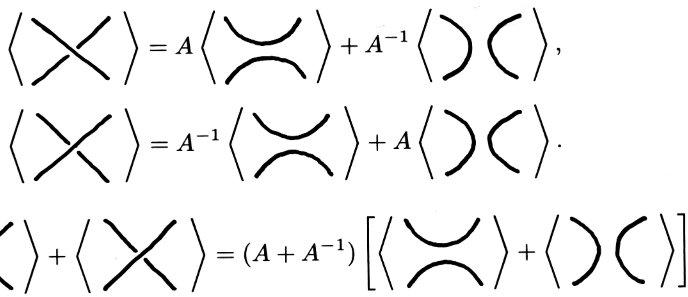
$$F_K(\alpha, z) = \alpha^{-w(K)} L_K(\alpha, z).$$

ただし, $w(K)$ は有向絡み目 K の捻り数である.

この不変量の存在は第 14 節で取り上げる. その存在が示されると, **ブラケット多項式は L の特殊な場合であり, Jones 多項式は F の特殊な場合である**ことが容易にわかる. より正確にいうと, 次のようになる.

命題 5.4.
$$\langle K \rangle(A) = L_K(-A^3, A + A^{-1}),$$
$$V_K(t) = F_K(-t^{-3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4}).$$

証明. ブラケット多項式については, 次の等式があった (第 3 節, 系 3.4 の後の注意などを参照):



したがって, $\langle K \rangle(A) = L_K(-A^3, A + A^{-1})$ である. 一方,

$$V_K(t) = \mathcal{L}_K(t^{-1/4}), \qquad \mathcal{L}_K(A) = (-A^3)^{-w(K)} \langle K \rangle(A)$$

であるから,

$$V_K(t) = (-t^{-3/4})^{-w(K)} \langle K \rangle(t^{-1/4}).$$

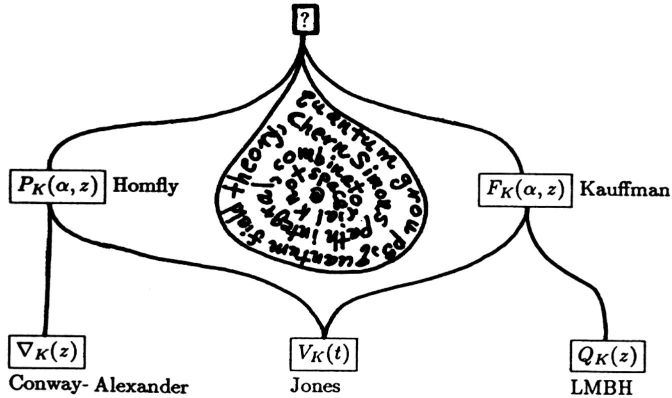
したがって, $V_K(t) = (-t^{-3/4})^{-w(K)} L_K(-t^{-3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4})$.

よって,

$$V_K(t) = F_K(-t^{-3/4}, t^{-1/4} + t^{1/4}).$$

これで証明が完了する. □

こうして, 次の流れ図が得られる:



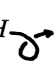
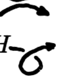
ここで疑問符? は, 有向と準有向 2 変数多項式の未知の統一を表す. また, 不変量 $Q_K(z)$ は, Lickorish, Millet, Brandt と Ho ([BR], [HO]) によって発見された, 全同位に関する無向多項式不変量である. これは, L–多項式において $\alpha = 1$ とおくことによって得られる.

これらの 2 変数多項式 P_K と F_K はともに, 鏡像を区別するのに, なかなかの働きをするが, この際にはF_K のほうがかなり性能がよい ([LK8] を参照). ここでの Jones 多項式の一般化である結び目多項式についての記述では, 特別な計算や例題などを避けた. しかしながら, 有向不変量 $P_K(\alpha, z)$ もまた正則同位の不変量の正規化とみなせる, ということは言及する価値がある. この過程で, **正則同位の Homfly 多項式** $H_K(\alpha, z)$ を次の性質によって定義することができる:

(i) 有向絡み目 K と K' が正則同位ならば, $H_K(\alpha, z) = H_{K'}(\alpha, z)$.

(ii) H $= 1$.

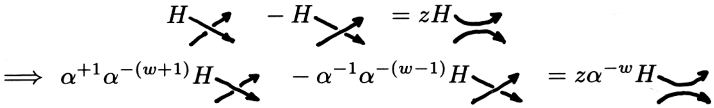
(iii) H $- H$ $= zH$ .

(iv) H $= \alpha H$ , H $= \alpha^{-1} H$

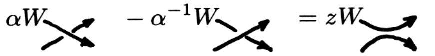
再びこの不変量の存在を信ずることにすると, 次が得られる:

命題 5.5. $P_K(\alpha, z) = \alpha^{-w(K)} H_K(\alpha, z)$.

証明. $W_K(\alpha, z) = \alpha^{-w(K)} H_K(\alpha, z)$ とおくと, W_K は全同位の不変量で, W $= 1$ である. したがって, 次の交差交換に関する等式を確かめればよい.

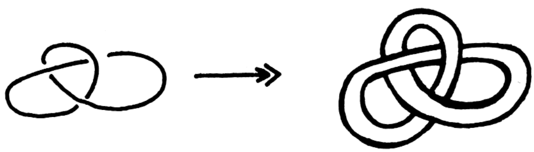


ここで $w = w($  $)$ とする. したがって,



これで証明が完了する. □

正則同位による Homfly 多項式の取り組みには, 概念的な利点がある. その一つは, 第 2 の変数 α が, その図形表示の捻り数の測定に起因することを計算の中でみられる点である. もし**絡み目の成分を埋蔵された帯に置き換える**と, (図形的なカールを測定するというよりもむしろ) 実際のトポロジー的な捻りを測定している, と考えることができる. 三葉結び目を帯に置き換えると, 次のようになる:



すると, 規則 H  $= \alpha H$  は, 規則



となる. つまり多項式 H は, **埋蔵されて向きを指定された帯による絡み目の全同位の不変量である,** と解釈することができる. (ここではメービウス (Möbius) の帯は許されない. [HE1], [HE2] と比較せよ.)　交差交換に関する等式は, 本質的には同じである:



この解釈によって, 変数 z と α は別々の意味を獲得する. 変数 z は分離作用や移動作用を測り, 変数 α は帯の捻りを測る. この観点によって, **枠付き絡み目** (framed links), つまり, 随伴する直交ベクトル場をもつ絡み目の研究は大きく進歩した.

この議論を強調するために, ホップ絡み目と三葉結び目という特別な例について計算してみよう.

(a) H $= \alpha^{-1} H$ ; H $= \alpha^{-1} H$ $= \alpha^{-1}$.

(b) H $- H$ $= zH$ , つまり, $\alpha - \alpha^{-1} = zH$ .

$\delta = (\alpha - \alpha^{-1})/z$ とすると同じ理由により, 任意の K について, 次もわかる:

H$_K = \delta H_K$.

(c) H $- H$ $= zH$ . ここで $L =$  $_L$.

$$H_L - \delta = z\alpha$$
$$H_L = z^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}) + z\alpha$$
$$P_L = \alpha^{-2} H_L = z^{-1}(\alpha^{-1} - \alpha^{-3}) + z\alpha^{-1}.$$

(d) $H_T - H_{T'} = zH_L$.

$$H_T - \alpha = z\left[z^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}) + z\alpha\right]$$
$$H_T = (2\alpha - \alpha^{-1}) + z^2\alpha$$
$$P_T = \alpha^{-3} H_T = 2\alpha^{-2} - \alpha^{-4} + z^2\alpha^{-2}$$



K の鏡像を K^* とするとき, $P_{K^*}(\alpha, z) = P_K(\alpha^{-1}, -z)$ であるから, T のカイラル性は P_T のこの計算の中に反映していることがわかる.

これらの計算においては, より単純な結び目や絡み目への木のような分解を用いた. 例えば三葉結び目の場合には, すべての計算は図 10 の木に沿って続けられる.

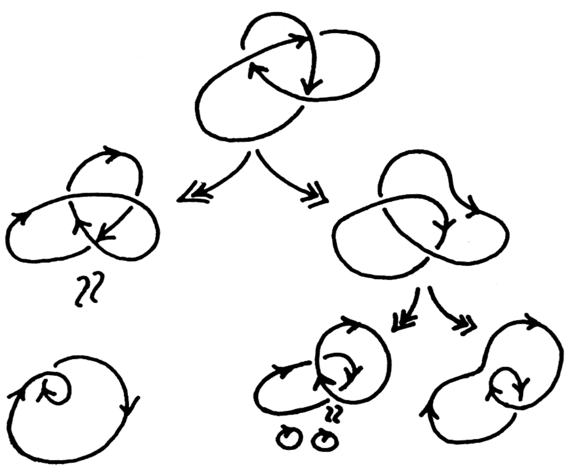
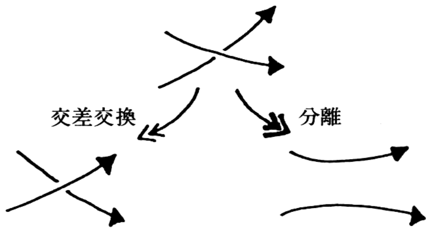


図 10. 三葉結び目のスケイン木

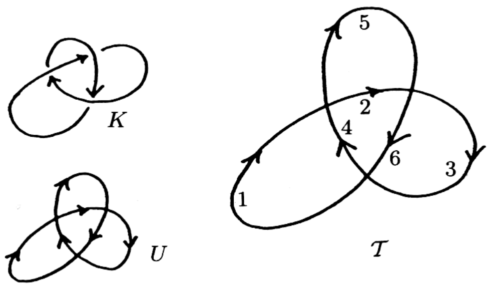
このスケイン木 (skein-tree; **分解樹**ともいう) の各分岐では, 与えられた交差点の分離と交換が実行される:



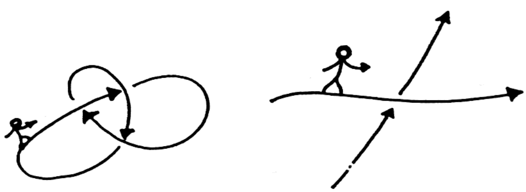
この木の生成過程は, 次のアルゴリズム ([JA1], [LK13]) によって, 完全に自動的になされる.

スケイン–母型アルゴリズム (Skein-Template Algorithm)

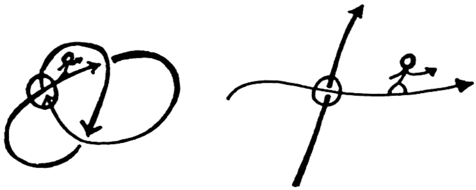
(i)　K を与えられた有向絡み目の図形表示とし, U をその影とする. U を平面上の次数 4 の正則グラフと考えて, **U の各辺に異なる正の整数をラベル付けする.** このラベル付けされたUを, このアルゴリズムの**母型** (template) $\mathcal{T}$ とよぶ.



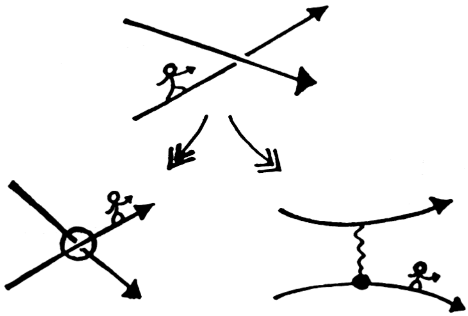
(ii)　この母型 $\mathcal{T}$ 上の最小ラベルを選ぶ. この最小ラベルの付いた辺の中央から, あらかじめ指定された向きに, 図形 K (または K から導かれた木の中の表示) に沿って歩き始める.



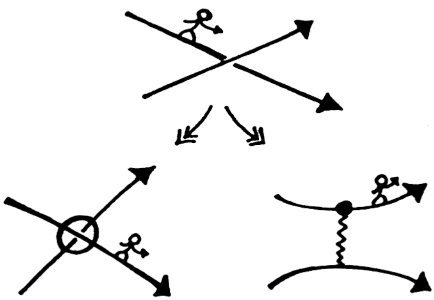
上交差点に到達したときには, そこに次の図のように**装飾を施して**, そこを通り過ぎる.



下交差点に到達したときには, 歩くのを止める. この交差点で, 交換と分離によって, 木の 2 つの枝を生成する.



交換した交差点と分離した交差点を, 上と下の図に指示したように装飾する.



これらの装飾は, その場所のステイトがどうであったか判定できるように考えられている. 分離した交差点に対する黒丸—●→ は, 歩く人が通過する弧に沿って置かれている.

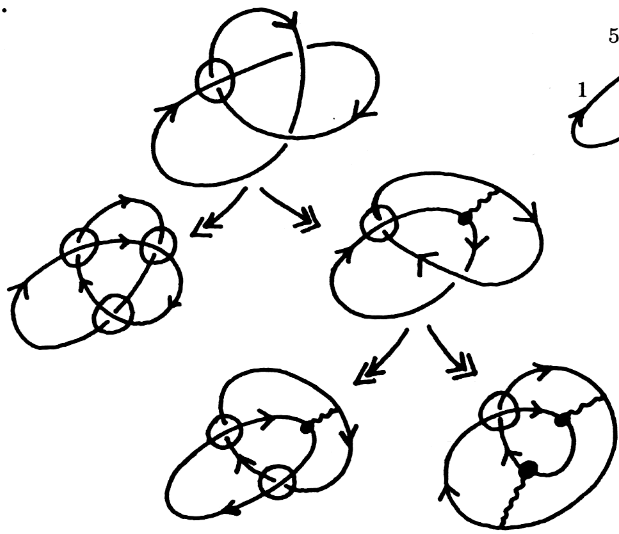
交差交換した方の図形表示では, 与えられた母型を用いて, 装飾した交差点を指示に従って通過する. 分離した方の図形表示では, 黒丸を付けた方の弧に沿って歩き続ける.

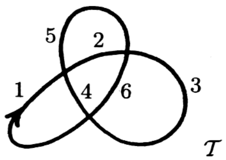
また, アルゴリズムの過程で, 通過する上交差点にはすべて装飾する.

(iii) **与えられた図形表示に対して (ii) を完了したとき, この木の次の段階に進み, 同じ母型を用いてアルゴリズム (ii) を再び適用する.** [K の交差交換をした子孫と分離をした子孫は同じ辺 (ときに頂点が 2 重になる) をもつから, 同じ母型を使うことができる.] これらの分岐の任意のところで, 再び完全に出発できるとは限らない. この木を生成する最初の結節点から各々の分岐点までは, 道があると仮定する.

もしこの木の中に次の段階がないとすると, 最終の結節点の各々において, すべての頂点は装飾されている. これでスケイン–母型アルゴリズムが完成する.

例題.

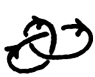
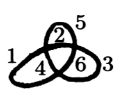




スケイン–母型アルゴリズムの**出力** (output) は, 次の集合と考える:

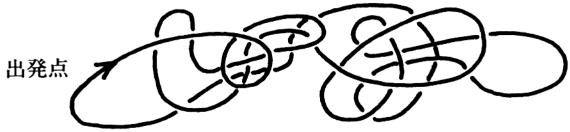
$$\mathrm{STA}(K, T) = \left\{ D \;\middle|\; \begin{array}{l} D \text{ は, 母型 } T \text{ をもつスケイン–母型} \\ \text{アルゴリズムによって生成した木の,} \\ \text{装飾された最終結節点 (図形表示)} \end{array} \right\}$$

したがって上の例題では次のようになる:

STA( , )

= {  ,  ,  }.

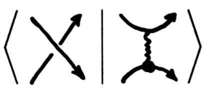
(少なくともこの例では) 各要素 $D \in \mathrm{STA}(K, \mathcal{T})$ は平凡型の結び目または絡み目である. これは, 次に述べる事実のちょっとした一般化であって, いつでもこのようになる: **与えられた成分の影を辿るとき, どの交差点でも先に通るほうが上交差である**, という規則に従って描くならば, それは常に平凡型の結び目である.

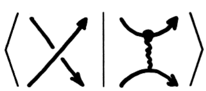


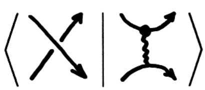
スケイン–母型アルゴリズムによって生成された木は, 交換等式と H_K に関する基礎的な事実によって, $H_K(\alpha, z)$ を計算するのに十分な情報を与える. 実際, 要素 $D \in \mathrm{STA}(K, \mathcal{T})$ の装飾によって, 次の式を得る:

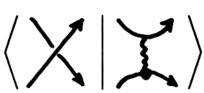
$$H_K(\alpha, z) = \sum_{D \in \mathrm{STA}(K, \mathcal{T})} \langle K|D \rangle \delta^{||D||}$$

ここで, $\delta = (\alpha - \alpha^{-1})/z$, $||D||$ は D の絡み目成分の個数から 1 を引いた数を表す. さらに $\langle K|D \rangle$ は, K の交差点のタイプに依存し, D の中の装飾に対応して決まる**頂点の重みの積** (product of vertex weights) である. これらの頂点の重みに対する局所的規則は, 次のようになっている:

 $= z,$

 $= -z,$

 $= 0,$

 $= 0.$

符号正の交差点からは 1 番目の場合だけが, 一方, 符号負の交差点からは, 2 番目の場合だけが起こる. これらの規則は, 木の生成過程に対応している. このアルゴリズムによって生成された D の中には 0 でないものが生じる.

これとは別のもっと単純な規則を, 丸をつけた頂点に適用する:



$= \alpha,$



$= \alpha^{-1}.$

これらの重みの積は, D の捻り数を与える. したがって, 次の式を得る:

$$\langle K|D\rangle = [(-1)^{t_-(D)} z^{t(D)} \alpha^{w(D)}].$$

ただし, $t_-(D)$ は, D の中の (K の) 符号負の交差点の分離の個数を表し, $t(D)$ は D の中の交差点の分離の個数を表す.

ここで, D は $\mathrm{STA}(K, \mathcal{T})$ の要素であると仮定するので, 重み 0 の交差点は存在しない.

H_K に関する公理に基づけば次の式が成り立つことの確認を, 読者の演習問題として残す:

$$H_K = \sum_{D \in \mathrm{STA}(K,\mathcal{T})} \langle K|D\rangle \delta^{||D||}.$$

この式は, 木の生成過程はまた, その形がブラケット多項式にとてもよく似ている多項式 H_K に対するステイト模型を生み出すことを示している. H_K に対するこのスケイン模型とブラケット多項式に対するステイト模型の間の実際の違いは, H_K に対する論理的なあるいは概念的な根拠としてそのスケイン模型をいかに使用するか, ということが少しも明らかでない点である. それはまさに, 計算のための表現である. 一方, ブラケット多項式の模型は, Jones 多項式の内部にある論理に, 我々を直接的に導いてくれる. $H_K(\alpha, z)$ に対するこの種の模型をいかにして作るかについては, いまだにまったくわかっていない.

注意. 最初のスケイン模型は Francois Jaeger [JA1] によって, 行列の転置技術を用いて与えられた. この模型を, スケイン計算の直接的な帰結として, いかに解釈し一般化するかを筆者は [LK13] で示した.

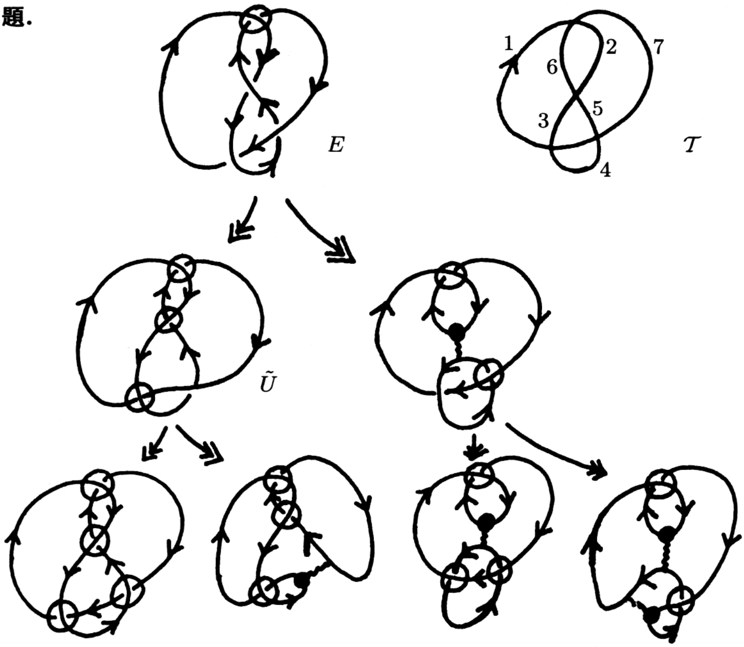
例題. 三葉結び目に戻り, スケイン模型を使って $H_T(\alpha, z)$ を計算する.

$\mathrm{STA}(T, \mathcal{T}) =$



$$H_T = \alpha + z\delta + \alpha z^2 = (2\alpha - \alpha^{-1}) + z^2\alpha.$$

例題.



$1 \qquad - \alpha^{-1} z\delta \qquad + \alpha z\delta \qquad + \alpha\alpha^{-1} z(-z)$

$$\Rightarrow \qquad H_E = 1 - \alpha^{-1} z\delta + \alpha z\delta - z^2$$

$$= 1 - \alpha^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}) + \alpha(\alpha - \alpha^{-1}) - z^2.$$

$$H_E = (\alpha^{-2} + \alpha^2 - 1) - z^2.$$

8 の字結び目 E のこの表現については, $w(E) = 0$ であることに注意する. したがって, $H_E = P_E$である. $H_E(\alpha, z) = H_E(\alpha^{-1}, -z)$ であることは, E と E^* が全同位であることの反映である.

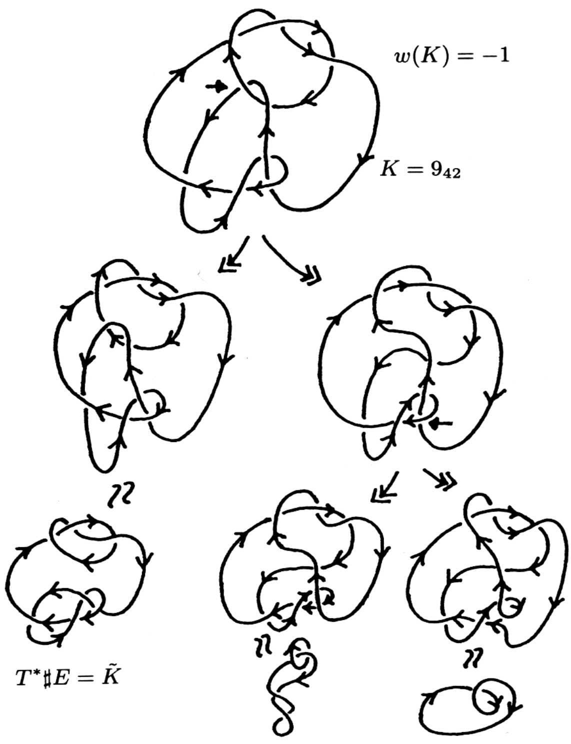
もちろん, $P_K(\alpha, z) = P_K(\alpha^{-1}, -z)$ であるという事実は, 必ずしも K がアキラルであることを意味しない. 結び目 9_{42} (次の例) は, この種の例外の最初の例である.

上の例はまた「スケイン–母型アルゴリズムがいかに所作だけでなされるアルゴリズムであるか」ということも示している. 最初の交差交換で, 平凡型の結び目 $\tilde{U}$ を得るが, その多項式は $H_{\tilde{U}} = \alpha^{-2}$ である. ($\tilde{U}$ にはまだ装飾されていない交差点があるので) このアルゴリズムは, その仕事として, $\tilde{U}$ の交差交換と分離を実行する. これは $1 - \alpha^{-1} z\delta = \alpha^{-2}$ という計算をするという形で反映する. このアルゴリズムをもっと利口に使うには, 平凡型の結び目や絡み目を探すことである.. これを実際に具体例でやってみることは可能ではあるのだが ([EL] と比較せよ), 理論

的に完全な方法はまだ得られていない.

この例は,「分離した後, その前に装飾された交差点に再び出会ったときは, そのまま通り過ぎてもよい」ということを示している. そのような交差点は, 平凡な絡み目を標準的な形になるように戻す過程における場合と同じように, その過程の中で勝手に放置しておけばよい.

例題. $K = 9_{42}$. Reidemeister の表の中で, 9 交差点の 42 番目の結び目.

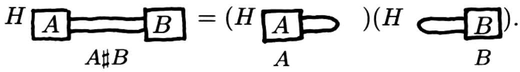


ここでは, 9_{42} に対するスケイン木 (の最初) を, 頂点を上手に選び, 正則同位を使って, 手ずから作り出した. この場合, 交差点を上手に選んだので, 計算はことのほか簡単になった. 次がわかる:



$$= [H_{T^*}][H_E].$$

一般に, 次が容易にわかる:



したがって, この木のなかの 3 つの表示を用いて, 次を得る:

$$H_K = H_{\tilde{K}} + z\left[\alpha^2 H_{\text{(diagram)}} - z\alpha^{-1}\right].$$



ところで,  $= L^*$ だから,

$$H_{L^*} = z^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}) + z\alpha^{-1},$$
$$H_{T^*} = (2\alpha^{-1} - \alpha) + z^2\alpha^{-1},$$
$$H_E = (\alpha^{-2} + \alpha^2 - 1) - z^2.$$

ここでは, 本節で以前に計算した結果を利用した.

この情報を合わせると, 次がわかる:

$$\begin{aligned}
H_{\tilde{K}} &= H_{T^*}H_E \\
&= ((2\alpha^{-1} - \alpha) + z^2\alpha^{-1})(\alpha^{-2} + \alpha^2 - 1 - z^2) \\
&= 2\alpha^{-3} + 2\alpha^{-2}\alpha^{-1} - 2\alpha^{-1}z^2 - \alpha^{-1} - \alpha^3 + \alpha + \alpha z^2 \\
&\quad + z^2\alpha^{-3} + z^2\alpha - z^2\alpha^{-1} - z^4\alpha^{-1}.
\end{aligned}$$

$$H_{\tilde{K}} = (2\alpha^{-3} - 3\alpha^{-1} + 3\alpha + \alpha^3) + (\alpha^{-1} - 3\alpha^{-1} + 2\alpha)z^2 - \alpha^{-1}z^4.$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ H_K &= H_{\tilde{K}} + z\alpha^2 H_{L^*} - z^2\alpha^{-1} \\
&= H_{\tilde{K}} + z\alpha^2(z^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}) - z\alpha^{-1}) - z^2\alpha^{-1} \\
&= H_{\tilde{K}} + \alpha^3 - \alpha - z^2\alpha - z^2\alpha^{-1} \\
&= H_{\tilde{K}} + (\alpha^3 - \alpha) + z^2(-\alpha - \alpha^{-1})
\end{aligned}$$

$$H_K = (2\alpha^{-3} - 3\alpha^{-1} + 2\alpha) + (\alpha^{-3} - 4\alpha^{-1} + \alpha)z^2 - \alpha^{-1}z^4.$$

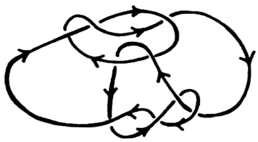
$$\boxed{P_K = \alpha H_K = (2\alpha^{-2} - 3 + 2\alpha^2 + \alpha^{-2} - 4 + \alpha^2)z^2 - z^4}$$

この計算によって, K が 9_{42} 結び目のときは, $P_K(\alpha, z) = P_K(\alpha^{-1}, -z)$ であることがわかる. したがって, P_K は 9_{42} のカイラル性については何の結論も下せない. それでもやはり 9_{42} はカイラルである! ([LK3] の 207 ページ を見よ.)

この計算例は, スケイン–母型アルゴリズムの中に受け継がれた煩わしい組合せ的な複雑さも, 巧妙な仕掛によって時には打ち破ることができるという, よい例である.

要約. 本節は, 本来の Jones 多項式 $V_K(t)$ とその 2 変数への一般化についての導入であった. これらの多項式についての計算の漸化式がいかにして形式的なステイト模型 (こういうわけでスケイン模型とよばれる) に導いたかを示し, また 9_{42} 結び目について, この多項式の直接的な計算も含めて, 有向 2 変数への一般化である $P_K(\alpha, z)$ の計算例も議論した.

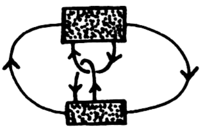
演習問題. (i) 次の結び目は, その鏡像と全同位ではないことを示せ.



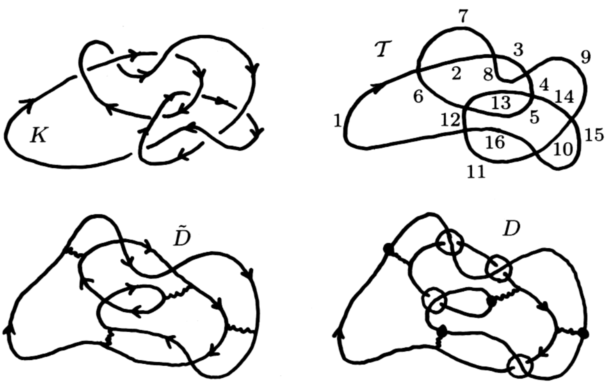
(ii) 次に示した結び目 K の H_K を計算せよ.

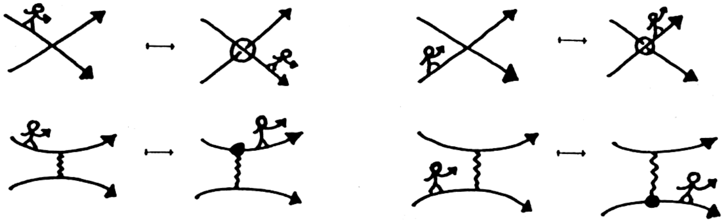


(iii) K が次の形をしているとき, H_K を調べよ.



演習問題. K を有向絡み目の図形表示とし, U をその対応する影とする. $\mathcal{T}$ を U に対する母型とする. $\tilde{D}$ を, U の交差点全体のある部分集合で分離して, U から得られた図形とする. 母型 $\mathcal{T}$ を用いて $\tilde{D}$ を装飾する: つまり, $\mathcal{T}$ から最も小さい基点をいつも選んで $\tilde{D}$ をたどり, 各交差点を最初に出会ったときに装飾する:





この手続きによって装飾された後の図形表示 $\tilde{D}$ を D で表す. $\langle K|D\rangle$ をスケイン–母型アルゴリズムの場合と同じように定義する (この場合は $\langle K|D\rangle = 0$ のことも起こり得る).

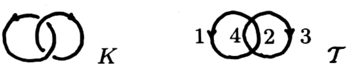
次を証明せよ. $\boxed{\langle K|D\rangle \neq 0 \Longleftrightarrow D \in \text{ STA}(K, \mathcal{T})}$

この演習問題は, H_K に対するスケイン模型が次の式によって特徴づけられることを示す:

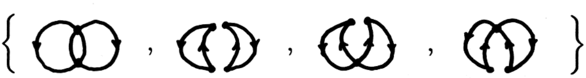
$$H_K = \sum_{D \in \mathcal{D}(K,\mathcal{T})} \langle K|D\rangle \delta^{||D||}.$$

ただし, $\mathcal{D}(K,\mathcal{T})$ は, この演習において得られるすべての図形表示 (つまり, U の交差点全体の部分集合で分離し, $\mathcal{T}$ を用いて装飾した表示) の集合を表す.

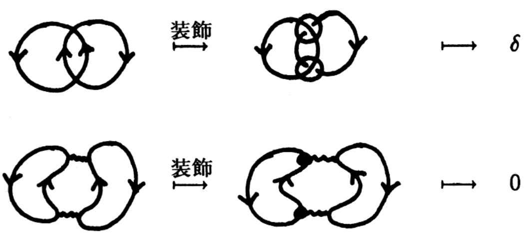
この演習問題の結果は, H_Kに関する観点を, スケイン木からステイトそのものの構造へと引き上げる. 例えば, Kを下図の左のホップ絡み目とする. H_K を計算するに際して, 母型 $\mathcal{T}$を下図右のように選び, つぎに K の交差点を分離したり射影したりすることによって K から得られるすべての図形の集合 $\tilde{\mathcal{D}}$ を考える.

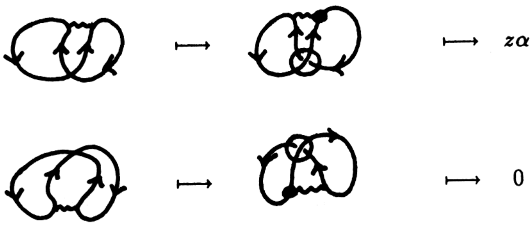


この集合 $\tilde{\mathcal{D}}$ は次のようになる:



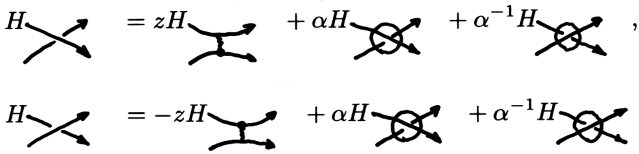
$\tilde{\mathcal{D}}$ の各要素は, 装飾すると, H_K の項に寄与する. この過程は次のようになっている:





$$\therefore \quad H_K = z\alpha + \delta = z\alpha + z^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}).$$

例題／演習問題. 「H_K に対するスケイン模型の解釈は, ブラケット多項式に対するのと同様な展開公式によってまとめることができる」ということは注目に値する. そこでこれを示す: 項点の重みをまとめて

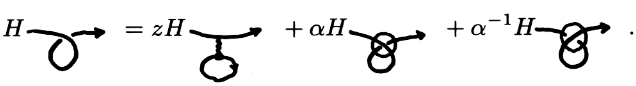


の形にし, またループの行動をまとめて, 次の形に書く:

$$H_{\bigcirc K} = \delta H_K, \qquad \delta = (\alpha - \alpha^{-1})/z.$$

ここで, この結果として得られたステイトは, 容認のために与えられた母型 $\mathcal{T}$ と比較する必要がある, と理解する. したがって, σ がステイトならば (すなわち, σ が交差点をもたない装飾された図形で, 展開式から得られたものならば), $H\sigma = \varepsilon\delta^{||\sigma||}$ である. ただし, $||\sigma|| =$ (σのループの個数) $- 1$, また,σ の装飾が $\mathcal{T}$ に従う場合に $\varepsilon = 1$, σ の装飾が $\mathcal{T}$ に従わない場合に $\varepsilon = 0$ とする.

ちょっと探検してみるのも楽しい. 例えば, 次式を見てみよう:



母型を選ぶための必然性から, これらの 3 つの項には 0 となるものがある. 上の計算において, 図を辿って計算するための基点 (∗) を示すことによって, 母型の影響を指摘することができる. 例えば, 次図で考えてみよう:



(イ) (ロ)

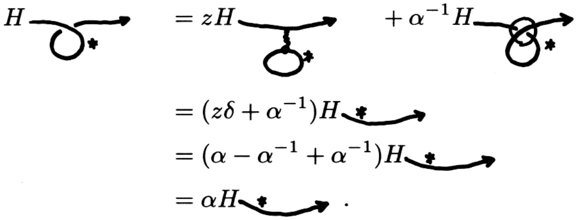
(イ) のように基点を決めると, 次図 (a) の項のみが残り, 次式が得られる:



(a) (b) (c)

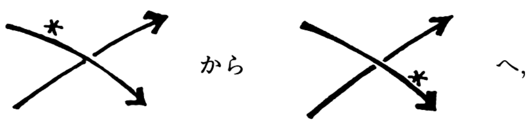


(ロ) のように基点を決めると, 上図 (b) と (c) の項が残り, 次式が得られる:



この計算は, スケイン模型が矛盾なく定義されることの核心である.

実際, 矛盾なく定義されることの証明の概略を与えよう. 証明は (この模型そのものの性質によって) かなり簡単になるが, Homfly 多項式に対するもともとの帰納法による証明 [LM1] と同じ性質が本質的である. 中心点は, H_K が母型の選択に依存しないことの証明である. まず, (上の) $*$ は, 母型のラベル全体の中で最も小さいラベルに付いている, と仮定してよい. すると,



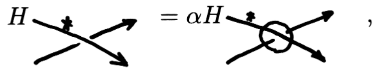
または



へ進むことは, 母型のラベルの変換を表す. そこで, 次の場合に集中して考えてみよう:



「これら 2 つの母型の選択がステイト和において同一の計算を与える」ことを示したい. ここで, 弧 ↘ と弧 ↗ は同じ成分上にあると仮定すると, まず次が得られる:





各右辺の項は, 与えられた局所的な図をもつようなステイトの全体にわたって和をとるものとする.

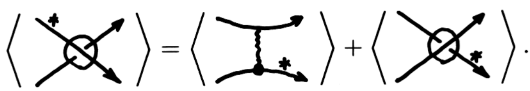
すると, これらの母型に関するステイトについて, 次の等式



が成り立つことを証明すれば十分である. 各ステイトには, その装飾の寄与によって重みが与えられている. 記号を一律にするために, $\langle\sigma\rangle$ でそのステイトの寄与を表すことにしよう. すると, ステイト σ が容認されるならば,

$$\langle\sigma\rangle = z^{t(\sigma)}(-1)^{t_-(\sigma)}\alpha^{w(\sigma)}\delta^{||\sigma||}$$

であり, 容認されたステイトすべてにわたって和をとると, $H_K = \sum_\sigma \langle\sigma\rangle$ である. そこで, 個々のステイトについて, 次を示せばよい:

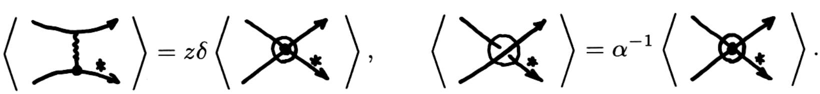


ステイト σ は, その構成法から「標準的な平凡型の結び目か絡み目である」ことを思い出そう. したがって, 下図 (a) の中の 2 つの辺が同じステイト成分に属しているならば, 下図 (b) の中の 2 つの辺は異なるステイト成分に属する.

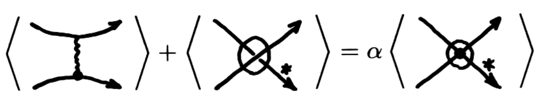


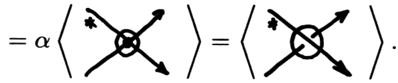
(a) (b) (c)

したがって, 以下の等式が成り立つ:



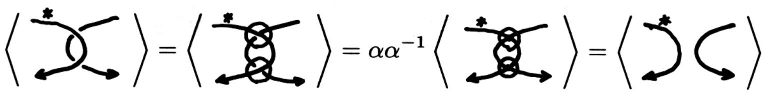
ところで, $z\delta + \alpha^{-1} = \alpha$ だから,



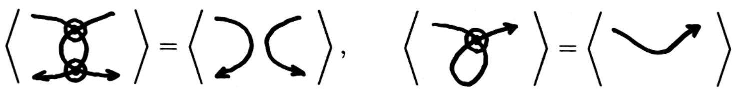


[ここで図 (c) は，重みをもたない (中立の) 頂点を表し，この計算を通じてこのままになっている.] もしも上の図 (a) の中の 2 辺が異なるステイト成分に属するならば，結果的に上と同じ計算の形が起こる．これで，H_K が母型のラベル付けに依存しないことの証明を示したことになる.

このように矛盾なく定義されること (well-definedness) を示したので，正則同位の不変量であることの証明は容易である．次を確かめればよい:



注意. 図 (c) は中立の頂点 (すなわち，その頂点の寄与が既に目録にのっている頂点) を表わすことにした．したがって，次が成り立つ:



考察. スケイン模型においては，選んだ母型によって指令された始点をもつ定角軌道内で，表示上の分子の移動を思い浮かべる．各ステイト σ は，それらの出発点によって決定された特別な頂点の重み (したがって，ステイトの評価) をもった定角軌道の，可能性のあるものの集合である．にもかかわらず，要素の総和である H_K は，出発点の選び方には依存しない，つまり出発点の選択とは独立である．この独立性は，この模型のトポロジー的な意味に関しては，最も大事な点である．物理学的には，これは何を意味するするのであろうか? 定角軌道の大域的な構造によって決定される局所的な頂点の重みの概念が連座する状況の中で，選択の独立性は “時間”の複雑さを避けている．同時に前にも後ろにも動くような，一つだけの自己相互作用を備えた定角軌道をもつような「spacetime universe」を想像されたい．このトラック上を動く分子の集合は，数学的なメタ・タイム (meta-time) に対応するのであろうが，この定角軌道に関連した物理学的な計算は (e.g. 「真空」期待値)，その分子に対するメタ・タイムパラメータと独立である.

後に，結び目多項式の，そのような 「真空」期待値としての自然な解釈を与える．そうして，スケイン計算は，その平均をとることによって依存性を打ち消してしまうような方法でメタ・タイム座標軸を使うのと類似のことになる.

6 節　Jones 多項式に対する有向ステイト模型

Jones 多項式 $V_K(t)$ とブラケット多項式の間の次の関係は, 既に定理 5.2 で示してある:

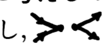
$$V_K(t) = (-t^{3/4})^{w(K)}\langle K\rangle(t^{-1/4}).$$

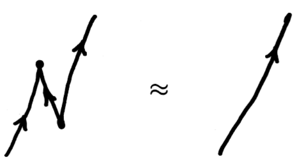
これは, 原理的に $V_K(t)$ に対する有向ステイト模型を与えている. それにもかかわらず, 有向な図形表示上にそのような模型を直接的に設計することは興味深いことである. 無向な図形表示においては, 次の 2 つの分離を考えた:



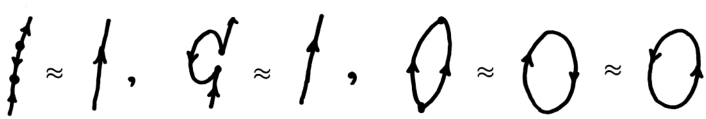
有向な図形表示においては, これらの分離は次図のようになる:



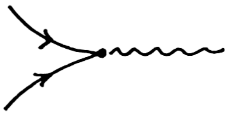
この分離の 2 番目に現れる図式には, 絡み目の図形表示の範疇外の "向き" を与えることにする. **これらの新しい頂点をもつ図式を, 図形の矢印の方向と一致するような時間の局所的な矢印をもつ抽象 Feynman 図形のように考える**のが有効である. すると,  は相互作用 (interaction, 素通り) を表現し,  は生成 (creations) と消滅 (annihilations) を表現する. **トポロジー的な不変量を得るためには**, 生成と消滅のある種の組合せをキャンセルできなければならない. そこでまず, 次が必要である:

[↑] 

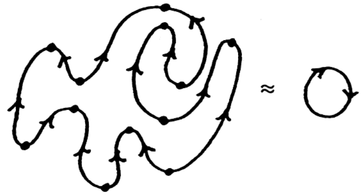
これから, 次の 3 つの関係が形式的に得られる:



言い換えると, トポロジー的な図形表示は, (近似のこの段階では) 次図のような場の影響に関しては何もわからないし, 無限にあるループの各々の確率は同じであるに違いない.

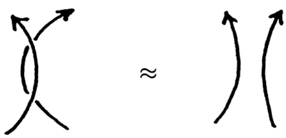


輻射



図形的な相互作用に関するこの背景は, トポロジーを考える上で必要である.

そこで, 相互作用  と  は, 次に示す**チャネル・ユニタリティ(channel unitarity)**, **クロスチャネル・ユニタリティ(cross-channel unitarity)** および **三角不変性 (triangle invariance)** を満たすことが必要である:



(チャネル)

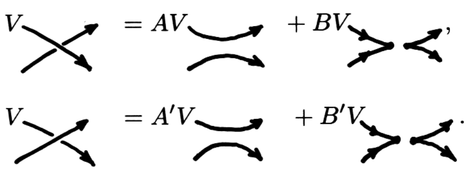


(クロスチャネル)

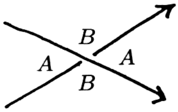


(三角不変性)

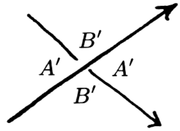
ブラケット多項式の類似で, 次の展開式を考える:



各交差点の相互作用は, “素通り” と “消滅–生成” の重ね合せとみなす. 目的の模型を, 正交差点に対する任意の重み A, B と, 負交差点に対する任意の重み A', B' をもつものから始める. 次図のような記憶法が有効である:



と



ブラケット多項式の場合のように,「余分なループは V_K にパラメータ δ を掛けることである」を仮定しよう:

$$V_{\bigcirc K} = \delta V_K.$$

チャネル・ユニタリティ, クロスチャネル・ユニタリティおよび三角不変性は, これらのパラメータを決定するであろう.

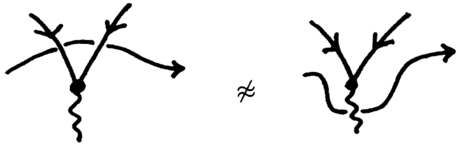
1. チャネル・ユニタリティ.



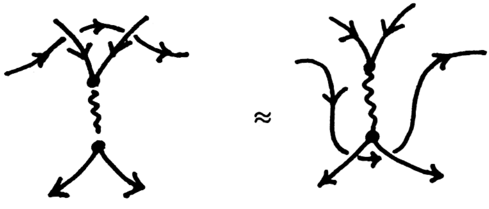
注意. この理論に関する最初のトポロジー的な注意を思い浮かべれば, 次の関係も成り立つに違いない, と思うかも知れない:



しかしながら, これは模型そのものをつまらないものにしてしまう. そこで,**"場の影響"は, 交差点の相互作用での生成または消滅の相互作用の場合にのみ起きる**と考えるのである. 話を続けると, 次の状態

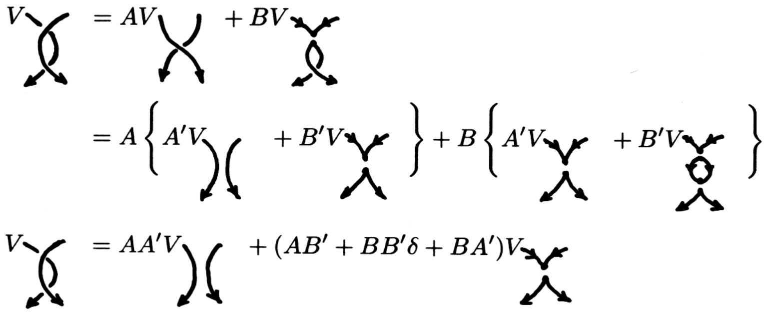


は起こるが, しかし幸いなことに次が成り立つのである:



これは, この相互作用の影響部分の「仮想的性格」を物語っている. (これらの注意のすべては, それ自体仮想的であり, 図形上のメタファーあるいは数理物理学的空想として受け取るべきである.)

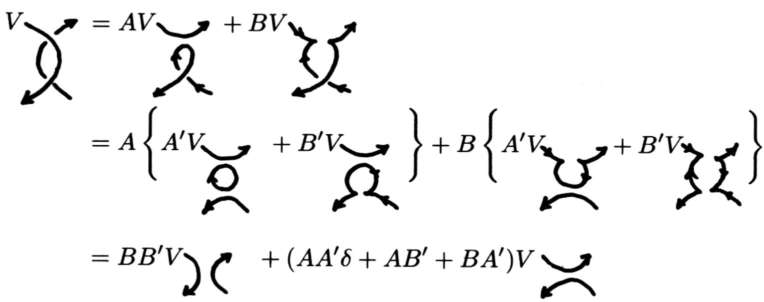
計算に戻ろう:



したがって, チャネル・ユニタリティは次の関係を要請する:

$$\boxed{\begin{array}{c} AA' = 1 \\ \delta = -\left(\dfrac{A}{B} + \dfrac{A'}{B'}\right) \end{array}}$$

2. クロスチャネル・ユニタリティ.



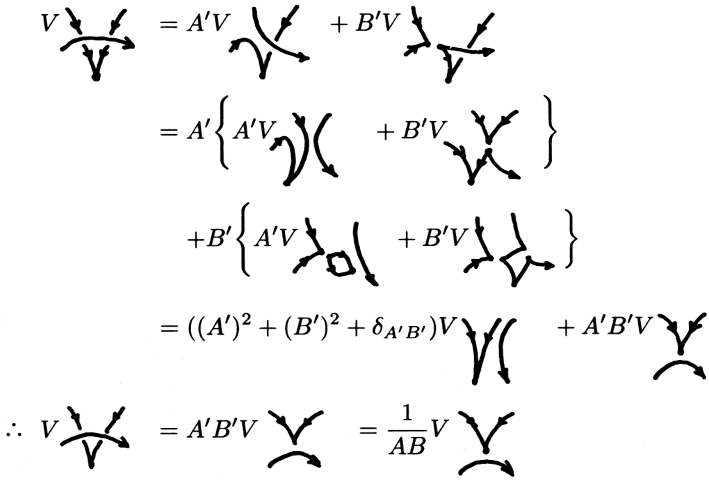
したがって, クロスチャネル・ユニタリティは, 次の関係を要請する:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} BB' & = & 1 \\ \delta & = & -\left(\dfrac{B'}{A'} + \dfrac{B}{A}\right) \end{array}}$$

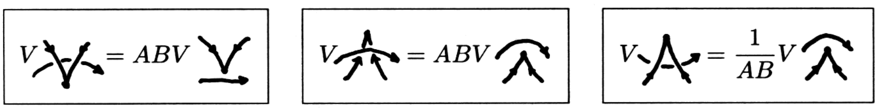
ゆえに, **1** と **2** から次が得られる:

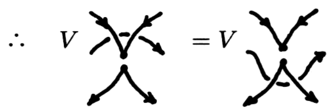
$$\boxed{\begin{array}{rcl} A' & = & 1/A, \quad B' = 1/B \\ \delta & = & -\left(\dfrac{A}{B} + \dfrac{B}{A}\right) \end{array}}$$

3. 消滅と交差点.

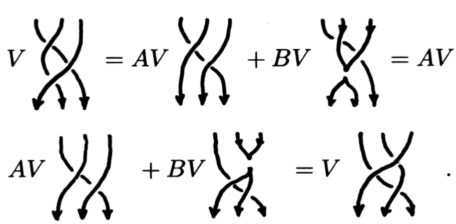


同様にして, 次の三つの等式が得られる:





これは三角形移動の消滅–生成版であり, またこれが次の三角不変性を含んでいる:



4. 有向三角形.

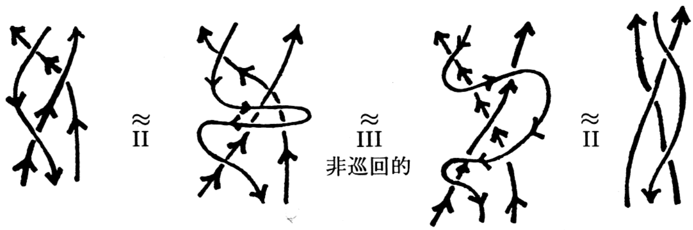
有向三角形移動には二つの型がある. これらの型は, 次図の (a),(b) のような形をしており, 中心の三角形は, (a) では巡回的な向きをもたず, (b) では巡回的な向きをもつ:



(a) (b)

事実. 非巡回的な三角形移動は, 向きの付いた II 型の Reidemeister 移動の二つの場合を併せると, 巡回的な三角形移動を生成する.

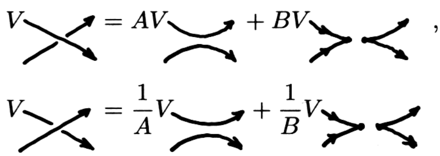
証明. (スケッチ) 下の図を観察せよ:



□

演習問題. 異なる符号の交差点を含むような三角形移動は, すべての交差点の符号が同じような三角形移動と II 型の Reidemeister 移動を用いて, 実行されることを示せ.

これらの注意と演習問題の助けを借りると, 次の模型:



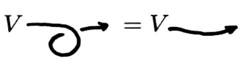
は, 有向絡み目の図形表示に対する正則同位の不変量であることがわかる.

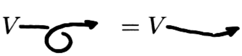
5. I 型の移動に対する不変性.



$$= (A\delta + B)V$$

$$A\delta + B = A\left(-\frac{A}{B} - \frac{B}{A}\right) + B = -\frac{A^2}{B}.$$

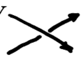
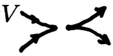
したがって,  $\iff$ $B = -A^2$.

この条件は, 同様にして,  を含むことが容易にわかる.

演習問題. この特殊化は, A と Bの 2 変数の多項式と同じトポロジー的な情報を含んでいることを示せ.

6. Jones 多項式.

ここでは条件 $B=-A^2$ を必要とする. $A=-\sqrt{t}, B=-t$ とすると, 次が成り立つ:

V  $= -\sqrt{t}\,V$  $- tV$ ,

V  $= -\dfrac{1}{\sqrt{t}}V$  $- \dfrac{1}{t}V$ .

本節のすべての仕事は, この展開式が有向絡み目に対する全同位の不変量を生み出すことを保証する. t^{-1}を掛け, また t を掛けて, 差をとることによって, 次の式を得る:

$t^{-1}V$  $- tV$  $= \left(-\dfrac{\sqrt{t}}{t} + \dfrac{t}{\sqrt{t}}\right)V$ 

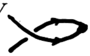
$= \left(\sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)V$ 

したがって, $V_K(t)$ は 1 変数の Jones 多項式である.

この模型のおもしろいところは, これが捻り数の正規化に依存しないところであり, また, パラメータ t と$\sqrt{t}$ がこの不変量の結び目理論的な構造にいかに本質的にかかわっているかを示しているところである. 最後に, 有向不変量 (チャネル・ユニタリティとクロスチャネル・ユニタリティ, 三角形移動, 向きの習慣) に関する論点のすべては, 後に Yang-Baxter 模型 (第 8 節の最初) を論じる中で, 再び現れることになる.

ここではむしろ, この有向模型の範囲内での計算方法をブラケット多項式の対応するパターンと比較することに興味がある. そのキーとなるのは次の補題である:

補題 6.1.

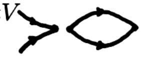
V  $= t\sqrt{t}V$ ,

V  $= \dfrac{1}{t\sqrt{t}}V$ ,

V  $= t\sqrt{t}V$ ,

V  $= \dfrac{1}{t\sqrt{t}}V$ .

証明.

V  $= -\sqrt{t}V$  $- tV$ 

$= \left(-\sqrt{t} - t\left(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\right) V$ 

$= t\sqrt{t}V$  .

残りの式も同じように実行される. □

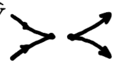
したがって, この模型は全同位の不変量であるが, しかしその内部には正則同位の計算パターンが生きている.

注意. ときには, Jones 多項式に別のパラメータを用いたほうが都合がよいことがある. ここで次のように書き表す:

$t\widehat{V}$  $- t^{-1}\widehat{V}$  $= \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\widehat{V}$  .

この模型に関しては, ループの変数が $\widehat{\delta} = \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ であることに注意する. 展開式は次の式で与えられる:

$\widehat{V}$  $= \frac{1}{\sqrt{t}}\widehat{V}$  $- \frac{1}{t}\widehat{V}$  ,

$\widehat{V}$  $= \sqrt{t}\widehat{V}$  $- t\widehat{V}$  .

対応するステイトの展開式において, 次を得る:

$$\widehat{V}_K = \sum_{\vec{\sigma}} \langle K|\vec{\sigma}\rangle \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{\|\vec{\sigma}\|}$$

ここで, $\langle K|\vec{\sigma}\rangle$ は項点の重み $(\sqrt{t}, 1/\sqrt{t}, -t, -1/t)$ の積であり, $\|\vec{\sigma}\|$ は有向ステイトにおけるループの個数から 1 を引いた値である. 各ステイトに対して, その符号 (sign) を $(-1)^{\pi}$ と定める. ただし, π **はそのステイトにおける生成–消滅の分離の個数の偶奇である.** Jones 多項式のこのような見方は, ステイト全体にわたる和をとる際に起こる消去の煩わしい問題にある洞察を与えるかも知れない.

平凡型問題. 結び目 K について, $V_K = 1$ ($\widehat{V}_K = 1$) ならば K は平凡型か?

7節 ブレイドとJones多項式

本節では, 正規化されたブラケット多項式 $\mathcal{L}_K(A) = (-A^3)^{-w(K)}\langle K\rangle$ が, 本来の Jones 多項式 $V_K(t)$ の一つの解釈であることを, ブレイド理論の方法によって証明する. Jones 多項式 [JO2] は, 1984 年に紹介されて以来, 異常なほどに一般化され続けてきた. これらの一般化は, 議論していくにつれ明らかになっていくことであろう. ではまず, 本来の Jones 多項式, そしてそのブラケット多項式との関係から始めよう.

Jones は, ブレイド群と von Neumann 代数を関係づけることにより, 不変量 $V_K(t)$ を作り上げた. von Neumann 代数については述べるべきことがたくさんあるのだが, ここでは一例として, 生成元 $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ と以下の関係子をもつ代数 A_n $(n = 2, 3, \cdots)$ の列を考えれば十分である:

1) $e_i^2 = e_i$
2) $e_i e_{i\pm1} e_i = \tau e_i$
3) $e_i e_j = e_j e_i \qquad |i - j| > 2$

(τ はスカラーであり, 他のすべての元と可換である.) 都合上 A_n は, これを環 $\mathbf{C}[\tau, \tau^{-1}]$ 上の加法群とみたとき, 自由かつ加法的な代数としてよい. ($\mathbf{C}$ は複素数体を表す.) 通常スカラー τ は複素数であるが, e_i と可換な代数的変数としてよい. この代数は, von Neumann 代数の分類の理論において現れ, それ自身も von Neumann 代数として解釈できる.

この von Neumann 代数では, 代数の包含関係 $N \subset M$ から生成されるある種のタワーを研究するのが自然である. $M_0 = N, M_1 = M$ としたとき, $M_2 = \langle M_1, e_1\rangle$ とする. ここで, $e_1 : M_1 \longrightarrow M_0$ は射影であり, $\langle M_1, e_1\rangle$ は M_1 に e_1 を添加することにより生成される代数を表す. したがって, 次のパターンが成立する.

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 = \langle M_1, e_1\rangle, \quad e_1 : M_1 \longrightarrow M_0, \quad e_1^2 = e_1.$$

このパターンを繰り返すと, 以下のようなタワーが構成される.

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots \subset M_n \subset M_{n+1} \subset \cdots$$

ここで $e_i : M_i \longrightarrow M_{i-1}, e_i^2 = e_i, M_{i+1} = \langle M_i, e_i\rangle$ とする. Jones は $e_i e_{i\pm1} e_i =$

$\tau e_i, e_ie_j = e_je_i$ $(|i-j|>1)$ という性質を保つ代数のタワーを作り上げ, これらの代数に対する指数の一般化された概念である $\tau^{-1} = [M_1 : M_0]$ を発見し, 次の Markov 性質を満たすトレース $\mathrm{tr} : M_n \longrightarrow \mathbf{C}$ (複素数) を定義した.

Markov 性質:
$M_0, e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$ により生成される代数の元 w に対し,
$\mathrm{tr}(we_i) = \tau\mathrm{tr}(w)$.

代数 $\mathcal{A}$ から複素数 $\mathbf{C}$ への写像 tr が, $a, b \in \mathcal{A}$ について $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$ を満たすとき, **トレース** (trace) とよばれる. 通常の行列のトレースも, この写像の一例である.

タワーの構成は, ある特別な von Neumann 代数の指数 $[M_1 : M_0]$ の研究に役に立つ. ここでは, von Neumann 代数について深く追求しないで, ブラケット多項式に直接関係あるタワーのモデルを作ることにする. したがって, タワー構成の組合せ的構造については, 以下ではあまり触れないことにする.

さて Jones 多項式の話に戻ろう. Jones は, 代数 A_n の関係子と, n 本の紐からなる **Artin ブレイド群** B_n の関係子の類似性に気づいた. 図 11 は, これらの関係子を比較したものである.

A_n
$e_i^2 = e_i$
$e_ie_{i\pm1}e_i = \tau e_i$
$e_ie_j = e_je_i, \ \|i-j\| > 1$
$e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$
Jones 代数

B_n
$\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$
$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \ \|i-j\| > 1$
$\sigma_1^{\pm1}, \sigma_2^{\pm1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm1}$
Artin ブレイド群

図 11

Jones は, Artin ブレイド群のこの代数 A_n への表現$\rho_n : B_n \longrightarrow A_n$ を構成した. この表現は, a, b をうまく選ぶと次の形になる:

$$\rho_n(\sigma_i) = ae_i + b.$$

A_n がトレース $\mathrm{tr} : A_n \longrightarrow \mathbf{C}[\tau, \tau^{-1}]$ をもつので, 合成写像 $\mathrm{tr} \circ \rho : B_n \longrightarrow \mathbf{C}[\tau, \tau^{-1}]$ が得られる. 適当な標準化により, この写像が Jones 多項式 $V_K(t)$ となる. Jones 多項式は有向絡み目に対する全同位不変量である. 多項式 $V_K(t)$ は, 本来ブレイドに対してのみ定義されたものであるが, Markov と Alexander の定理により, 任意の絡み目に対する不変量となる.

ここで, Markov と Alexander による結果を述べておくことにする. まず,

Alexander の定理は次のようになる.

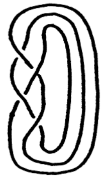
Alexander の定理： 3 次元空間内の任意の絡み目は, 閉じたブレイドの形で表された絡み目に全同位である.

ブレイド.

ブレイド (braid; 組み紐) とは, ある平面上に n 個の点を取り, n 本の紐を付け, その平面と平行な平面と紐は常に n 点で交わるようにしたものである. 通常, ブレイドの始点と終点の配置は同じとしてよく, 次のような正則表示の形がとれる.



b

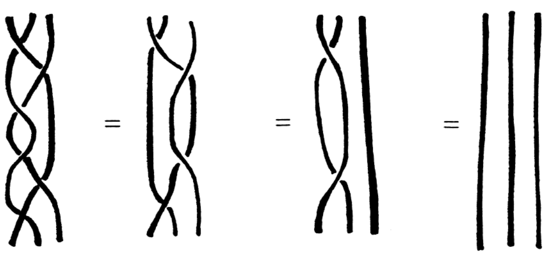


$\bar{b}$

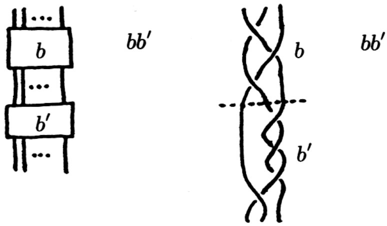
ここでは, 3 本のブレイド $b \in B_3$ を描いたが, その閉じた形 (閉包) が $\bar{b}$ である. すなわち, ブレイド b の閉包 $\bar{b}$ は, ブレイドの始点と終点を平行な紐で結んだものである.

平面上を互いに影響を与えながら動き回る分子の物理的過程を表すものとしてブレイドを考えることは, 興味深く, また的を射ていると思われる. 図上では, 時間の矢印を下から上へとる. 空間内の平面は, ページと垂直に水平な直線で交わるものとする. すると, うまく切っていくと, 通り過ぎた世界がブレイドとなるような分子の動きの図が得られるのである.

もちろん, トポロジー的な見地から, ブレイドを空間内で単調に降りていく紐とみなしてよい. B_n における 2 つのブレイドが**同値**であるとは (ここでは, 同値であることを $b = b'$ と書く), 端点を固定し, 一番上と底の平面によって囲まれた空間から紐を外に出さずに, b から b' へ移す全同位が存在することである (もちろん, ここで b と b' は, 端点が同一であるとしている). 例として以下のような同値なブレイドがあげられる.



n 本の平行に降りていく紐からなるブレイドを, B_n の**恒等ブレイド** (identity braid) とよび, 1 あるいは 1_n で表す. また同値関係により分類した n 本のブレイドの集まり, すなわち, n 本のブレイドの同値類の集合は群になる. これが **Artin ブレイド群** (Artin braid group) である. 2 つのブレイド b, b' の積は, 下図のように b の下端点と b' の上端点をつなげることで与えられる.



任意のブレイドは, 生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ とその逆元 $\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{-1}$ の積として書ける. この基本的なブレイド σ_i と σ_i^{-1} は, 入ってくる点の i 番目と $i+1$ 番目のみを入れ換えることにより得られる. すなわち,



σ_1　　σ_2　　$\cdots$　　σ_{n-1}



σ_1^{-1}　　σ_2^{-1}　　$\cdots$　　σ_{n-1}^{-1}

これらの生成元は, さまざまな編み方を記述するのに便利である. 例えば,



$$= \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$$

360 度捻ったより糸は, 次のようになる.

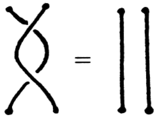


$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2 \\ \| \\ (\sigma_1\sigma_2)^3$$

ブレイド群 B_n は,これらの生成元と次の関係子により完全に記述される:

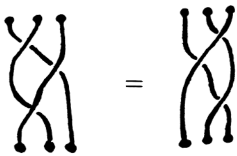
$$\begin{cases} \sigma_i\sigma_i^{-1} = 1, & i = 1, \ldots, n-1 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}, & i = 1, \ldots, n-2 \\ \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, & |i-j| > 1. \end{cases}$$

最初の関係子は II 型移動に対応し,



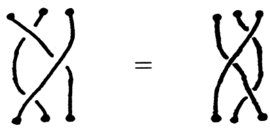
$\sigma_1\sigma_1^{-1} = 1$

一方, 2 番目の関係子は III 型移動に対応していることに注意する.



$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$

群 B_3 内で$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$ はより糸であるから, $(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)^{-1} = (\sigma_2\sigma_1\sigma_2)^{-1}$, したがって, $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$ が成立することになる. しかし, III 型移動には他のいくつかの場合がある. 例えば:



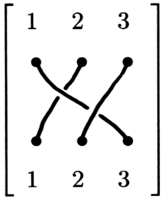
$\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}$

ところが, これは関係子$\sigma_2\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$ と代数的に同値である (両辺に, 左から σ_1 を, 右から σ_2 を掛けるとよい). 実際, 以下のように直接導ける:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1 &= \sigma_1^{-1}(\sigma_2\sigma_1\sigma_2)\sigma_2^{-1} \\ &= \sigma_1^{-1}(\sigma_1\sigma_2\sigma_1)\sigma_2^{-1} \\ &= (\sigma_1^{-1}\sigma_1)(\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}) \\ &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}. \end{aligned}$$

実は, 正と負の交点が混じりあった III 型移動は, II 型移動とすべての交点が同符号の III 型移動の組合せによって実現できるのである. 上の式は, この事実によるものであることを指摘しておく.

さて, ブレイド群 B_n から集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 上の置換群 S_n への準同型写像 π が存在する. 写像 $\pi : B_n \longrightarrow S_n$ は, ブレイドにより与えられる最初の点列から最後の点列への置換によって定義される. よって,

π  $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

ここで右辺の表示は, $\rho(1) = 3, \rho(2) = 1, \rho(3) = 2$ となる置換 $\rho : \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$ を意味している. もし, ブレイド b に対し $\rho = \pi(b)$ ならば, i 番目の点から出発したブレイドの紐が j 番目の点で終わるとき, $\rho(i) = j$ となる.

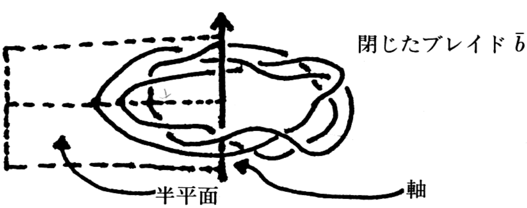
次に, $\tau_k : \{1,2,\ldots,n\} \longrightarrow \{1,2,\ldots,n\}$ を k と $k+1$ の互換とする. すなわち, $\tau_k(i) = i \ (i \neq k, k+1), \tau_k(k) = k+1, \tau_k(k+1) = k$ である. すると, $\pi(\sigma_i) = \tau_i \ (i = 1,2,\ldots,n)$ が得られる. 互換の言葉では, S_n は次の表示をもつ:

$$S_n = (\tau_1, \ldots, \tau_{n-1} | \tau_i^2 = 1, \tau_i \tau_{i+1} \tau_i = \tau_{i+1} \tau_i \tau_{i+1}).$$

置換群は, すべての生成元の 2 乗が恒等的であるとすることにより得られるブレイド群 B_n の商群となっている.

Alexander の定理.

前に述べたように, Alexander [ALEX1] は, 任意の結び目や絡み目が (全同位によって) 閉じたブレイドの形にできることを証明した. ブレイドの閉包を, ある軸のまわりを回る結び目とみなしたのである:



3 次元空間をその軸を共有する半平面の集まりと考えると, b は各半平面と同じ数の点 (ブレイドの紐の数) で交わらなければならない. 結び目や絡み目に沿って動くと, 軸を時計回りか反時計回りに回ることになる. Alexander の方法は, まず適当に軸を選ぶ. そして結び目や絡み目を追うのだが, 逆に回るたびに紐を軸の向こう側に押しやるのである. すると, 実際にブレイドの形をした絡み目が得られる.

図 12 は, ある特別な軸に対して, この過程を描いたものである. 明らかなことだ

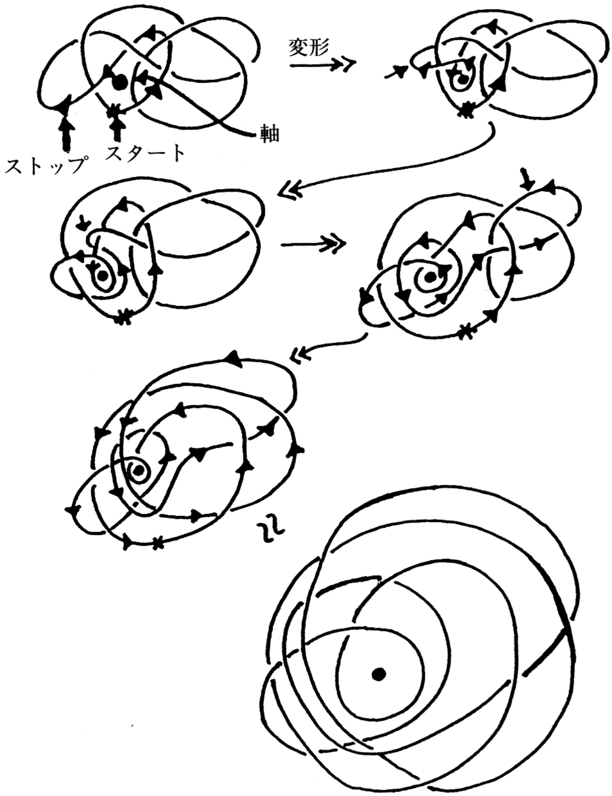
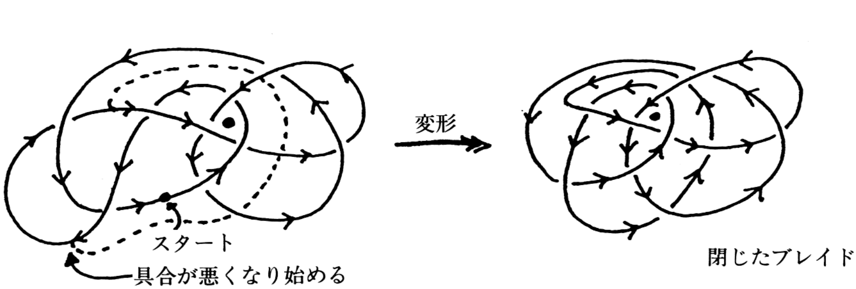


図 12.　Alexander の定理

が，与えられた結び目や絡み目に対して，この過程によって常に最も能率的なブレイド表示が得られるとは限らない．図 12 の例においても，次の図のように他のところに軸をとれば，よりうまくいくのである．

新たにとったこの軸の場合は，一回の操作でブレイドが得られるのである．

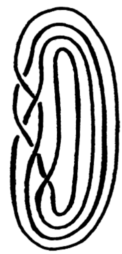


この例より次の疑問が出てくる: **1つの絡み目は, いったいいくつの異なるブレイド表示をもつのであろうか?**

閉包どうしが互いに全同位な絡み目となるいくつかのブレイドを, 互いに変形していく簡単な方法がある. まず, **Markov 移動**: β を B_n のブレイド語 (すなわち, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ とその逆元で書かれた語) とする. そのとき 3つのブレイド $\beta, \beta\sigma_n, \beta\sigma_n^{-1}$ は, すべて全同位な閉包をもつ. 例えば,

$\beta =$  $= \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2 \in B_n$

$\beta\sigma_3 =$  $\in B_4$

$\overline{\beta} =$  $\overline{\beta\sigma_3} =$ 

したがって, $\overline{\beta\sigma_n^{\pm 1}}$ は, β から Reidemeister 移動 I によって得られる.

同じ閉包をもつブレイドを作るやや複雑な方法として, B_n 内の任意のブレイド g をとり, **共役ブレイド** $g\beta g^{-1}$ を作ることがある. $g\beta g^{-1}$ を閉じて $\overline{g\beta g^{-1}}$ を作ると, つなげた紐により影響を及ぼし合って, ブレイド g とその逆元 g^{-1} が打ち消されるのである. 結び目理論とブレイドの理論を関係づける基本的な定理が, 次の定理である.

Markov の定理 7.1. $\beta_n \in B_n, \beta'_m \in B_m$ を, それぞれ, ブレイド群 B_n と B_m 内のブレイドとする. そのとき, 絡み目 (ブレイド β_n, β'_m の閉包) $L = \overline{\beta_n}$ と $L' = \overline{\beta'_m}$ が全同位になるための必要十分条件は, β'_m が β_n から以下の列で得られることである.

1) 与えられたブレイド群における同値.

2) 与えられたブレイド群における共役 (すなわち共役ブレイドで置き換えるこ

と).

3) **Markov 移動:** ($\beta \in B_n$ を $\beta\sigma_n \in B_{n+1}$ で置き換えること, あるいはその逆の操作, つまり, β が他に σ_n を含まなければ, $\beta\sigma_n \in B_{n+1}$ を $\beta \in B_n$ に置き換えること). □

証明に関しては [B2] を参照していただきたい.

次の問題を考えてみるのもおもしろいであろう: 絡み目をブレイドに変形する Alexander の方法はどうしたらコンピューターが実行するアルゴリズムにできるか? ([V] をみよ.)

Markov 定理により, 結び目や絡み目のトポロジー的な情報を得るために, ブレイド群 B_n の表現を使えるようになった. ここで, Jones 多項式がどのようにブレイドと関係があるのか説明しよう. 可換環 R (例えば, 多項式環や Laurent 多項式環) と, 各 $n = 2, 3, \ldots$ に対し定義されている n 本のブレイド群から環 R への関数 $J_n : B_n \longrightarrow R$ が与えられているとする. このとき, Markov 定理により, 関数の族 $\{J_n\}$ が次の条件を満たすならば, 絡み目不変量が得られることがわかる:

1. b と b' が同値なブレイド語ならば, $J_n(b) = J_n(b')$. (このことを, J_n が矛盾なく定義される (well-defined である) という.)
2. $g, b \in B_n$ ならば, $J_n(b) = J_n(gbg^{-1})$.
3. $b \in B_n$ ならば, n に依らない定数 $\alpha \in R$ が存在して, 次の式を満たす:

$$J_{n+1}(b\sigma_n) = \alpha^{+1} J_n(b), \qquad J_{n+1}(b\sigma_n^{-1}) = \alpha^{-1} J_n(b).$$

Markov 移動 $b \mapsto b'$ によりブレイドの閉包 $\overline{b'} = \overline{b\sigma_n}$ を得るということは, $\overline{b}$ に I 型移動を施すことに対応している. さらに, $\overline{b\sigma_n}$ は正値型の I 型移動に対応し, 一方, $\overline{b\sigma_n^{-1}}$ は負値型に対応している. α と α^{-1} を上のように選んだのは, この理由による. ブレイドに上から下へ方向を与えると, 図のように正指数をもつ α_n には (+) 交差点が対応することになるのである.



σ_n

このことを念頭において, **ブレイドの捻り数** (writhe of a braid) $w(b)$ を指数の和として定義する. すなわち, b を表すブレイド語

$$\sigma_{i_1}^{a_1} \sigma_{i_2}^{a_2} \cdots \sigma_{i_k}^{a_k} \text{ に対して, } w(b) = \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell$$

とする. この捻り数の定義により, $w(b) = w(\overline{b})$ が成り立つ. ここで $\overline{b}$ は, ブレイド b の閉包により得られる絡み目とし (方向は上から下にとる), $w(\overline{b})$ は向き付けられた絡み目の捻り数とする.

定義 7.2. $\{J_n : B_n \longrightarrow R\}$ が上の条件 1, 2, 3 を満たすとする. $\{J_n\}$ を $\{B_n\}$ 上の **Markov トレース**とよぶ. Alexander の定理により, 絡み目 L を表すブレイドを $b \in B_n$ とする. $J(L) \in R$ を次の式で定義し, **Markov トレース $\{J_n\}$ に対する絡み目不変量**とよぶ:

$$J(L) = \alpha^{-w(b)} J_n(b).$$

命題 7.3. J を Markov トレース $\{J_n\}$ に対応する絡み目不変量とする. このとき, J は有向絡み目に対する全同位に関する不変量である. すなわち, $L \sim L'$ ならば ($\sim$ は全同位を意味する), $J(L) = J(L')$ となる.

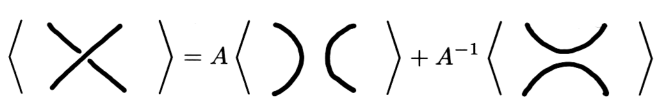
証明. Alexander の定理により, $L \sim \overline{b}, L' \sim \overline{b'}$ とする. ここで, $b \in B_n$ と $b' \in B_m$ はブレイドである. L と L' が全同位だから, $\overline{b}$ と $\overline{b'}$ も全同位である. したがって, $\overline{b'}$ は $\overline{b}$ からタイプ 1, 2, 3 の Markov 移動の列で得られる. それぞれの移動によって, 関数 $\alpha^{-w(b)} J_n(b)$ は不変である. なぜなら, 指数の和は, 共役と同値のもとでは不変であり, タイプ 3 の Markov 移動の影響は打ち消し合うからである. よって, 命題は証明された. □

ブレイドに対するブラケット.

ブレイドに対する議論をふまえて, 閉じたブレイド上のブラケット多項式を直接みていくことにする. その過程で, Jones 多項式やそれに付随したブレイド群の表現の構造が浮かび上がってくるであろう.

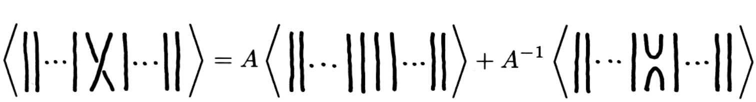
議論を始めるためにまず, $\langle\rangle : B_n \longrightarrow \mathbf{Z}[A, A^{-1}] = R$ を $\langle b \rangle = \langle \overline{b} \rangle$, すなわち, 閉じたブレイドのブラケット多項式を計算することと定義する. Markov トレースの言葉では, $J_n : B_n \longrightarrow \mathbf{Z}[A, A^{-1}]$ を $J_n(b) = \langle b \rangle$ で定めたことになる. 実際, 第 3 節で述べたことから, $\{J_n\}$ が $\alpha = -A^3$ とおいたときの Markov トレースになっていることは明らかであろう.

ここで, **ブレイドのステイト**, すなわち, ブラケットの漸化式



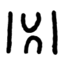
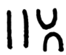
によって決まるステイトについて考えていく.

これは, ブレイドの言葉では, 次のようになる:



$$\langle \sigma_i \rangle = A\langle 1_n \rangle + A^{-1}\langle U_i \rangle$$

ここで, 1_n は B_n の恒等元であり (これから後は, 単に 1 で表す), U_i は i 番目と $i+1$ 番目の紐が出入りの形の組合せで書ける新しい元である.

 ,  ,  (4 本紐の場合)

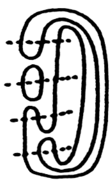
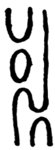
U_1 U_2 U_3

$\bar{b}$ に対するステイトは, b の各交点で分離する方向によって得られるのであるから, $\bar{b}$ **の各ステイトはそれぞれこのような元** U_i **の積の閉包で書ける**ことになる. (詳しくは第 3 節のブラケットのステイトを参照のこと.)

例えば, 以下のような絡み目を $L=\bar{b}$ とおく.

 L  $b=\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2$

すると, L の下のステイト s は積 $U_1^2U_2$ に対応している.

 $s \leftrightarrow$  $\overline{U_1^2U_2}=s$

実際, 以下のように定式化できる:

$$\sigma_i \equiv A + A^{-1}U_i, \qquad \sigma_i^{-1} \equiv A^{-1} + AU_i$$

ブレイド語 b が与えられたとき, $b \equiv \mathcal{U}(b)$ と定義する. ここで, $\mathcal{U}(b)$ は σ_i に上のような置き換えを施して得られたもので, 展開することにより U_i の積で表された項の和の形をしている. U_i の積の閉包をとると, ループの集まりである. したがって, U が U_i の積の形で表されているとすると, $\langle U\rangle = \langle\overline{U}\rangle = \delta^{||U||}$ である. ここで, $||U|| = (\overline{U}$ 内のループの個数$) - 1$, $\delta = -A^2 - A^{-2}$ である. 最後に, $\mathcal{U}(b)$ を次の形で表したとしよう:

$$\mathcal{U}(b) = \sum_s \langle b|s\rangle U_s.$$

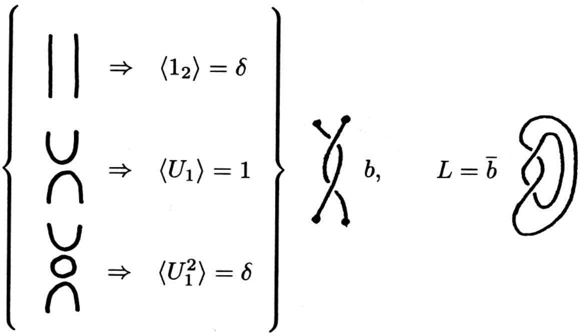
ここで, s はすべてのステイトを表し, $\langle b|s\rangle$ は各 U_s の係数である A と A^{-1} の積である. すると, 以下の式が成立する.

$$\langle b\rangle = \langle \mathcal{U}(b)\rangle = \sum_s \langle b|s\rangle\langle U_s\rangle, \qquad \langle b\rangle = \sum_s \langle b|s\rangle \delta^{||U_s||}.$$

これがブラケット多項式に対するステイト展開のブレイド上での類似式である.

例題. $b=\sigma_1^2$.

$$\mathcal{U}(b) = (A+A^{-1}U_1)(A+A^{-1}U_1)$$
$$\mathcal{U}(b) = A^2 + 2U_1 + A^{-2}U_1^2$$
$$\langle b\rangle = \langle \mathcal{U}(b)\rangle = A^2\langle 1_2\rangle + 2\langle U_1\rangle + A^{-2}\langle U_1^2\rangle$$



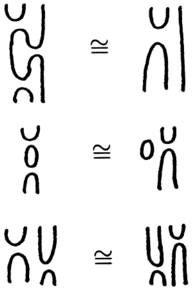
$$\therefore \quad \langle L\rangle = A^2(-A^2-A^{-2}) + 2 + A^{-2}(-A^2-A^{-2})$$
$$= -A^4 - 1 + 2 - 1 - A^{-4}$$
$$= -A^4 - A^{-4}$$

これは, 2 成分の簡単な絡み目のブラケット多項式を上の議論に従って計算したものである.

以上の結果, B_n 内のブレイドのブラケット多項式を計算する際には, 生成元 $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ と U_i の組合せから生ずる関係子をもつ代数 $\mathcal{A}_n$ について考えることが重要となる. この代数 $\mathcal{A}_n$ はループの値 $\delta = -A^2 - A^{-2}$ をもつ環 $\mathbf{Z}[A, A^{-1}]$ 上の加群として扱われ, **Temperley-Lieb 代数**とよばれる ([BA1], [LK4] を見よ).

$\mathcal{A}_n$ の関係子はどのようなものであろうか? 図 13 を考えると, 次のような関係子が得られる.

$$[\mathcal{A}] \quad \left\{ \begin{array}{l} U_iU_{i+1}U_i = U_i \\ U_i^2 = \delta U_i \\ U_iU_j = U_jU_i \quad (|i-j|>1) \end{array} \right\}.$$



$U_1U_2U_1 = U_1$

$U_1^2 = \delta U_1$

$U_1U_3 = U_3U_1$

図 13

実際, これは Temperley-Lieb 代数の完全な関係子になっている. ここで, この Temperley-Lieb 代数と Jones 代数が密接に関係していることに注意しよう. 実際, $e_i = \delta U_i$ と定めると, $e_i^2 = e_i$, $e_ie_{i\pm1}e_i = \tau e_i$ (ここで $\tau = \delta^{-2}$) となる. したがって, ブラケット多項式のブレイドに対するステイトを考えることにより, Jones 多項式の本来の構造が再発見されたのである.

ここで $\mathcal{A}_n$ をより基本的な方法でみていこう: n 点からなる点列を 2 つ平行におく. これらの $2n$ 個の点を n 本の弧で結ぶことにより得られる図形のすべての (トポロジー的な) 同値類を D_n とする. ここで, 点を結ぶ弧は次の条件を満たさなければいけない:

1) すべての弧は 2 つの点列の間に描かれている.
2) どの 2 つの弧も交わらない.
3) 2 つの元 $a, b \in D_n$ が同値であるとは, D_n の元であるという条件を保つ平面上のイソトピーによって, トポロジー的に同値であるときをいう. (すなわち, 次の条件を満たす弧の埋め込みの連続的な族 $\mathcal{C}_t \in D_n$ $(0 \leq t \leq 1)$, $\mathcal{C}_0 = a, \mathcal{C}_1 = b$, 各 t で $\mathcal{C}_t$ は端点では恒等写像, が存在するときである.)

この $\mathcal{D}_n$ を $2n$ 点の**図式単位半群** (ダイアグラムモノイド; the diagram monoid on $2n$ points) とよぶ.

例題. $n = 3$ の場合 D_3 は以下の元からなる.

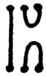


1_3　　U_1　　U_2　　r　　s

図式単位半群 D_n の元は, ブレイドと同様に積が定義できる. a の下の点と b の上の点をつなげて ab を作る. このように積を定義すると, ab にループが現れるときがある. この積によって生じるループの数を k とし, $ab = \delta^k c$ と書く. ただし,

$c \in D_n$ である.

例えば, D_3 において

$rs =$  $= \delta$  $= \delta U_2$

命題 7.4. D_n は, 元 $1, U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}$ により生成される. もし元 $x \in D_n$ が $\{U_i\}$ の積で表されている元 P と Q に同値ならば, Q は P に $[\mathcal{A}]$ の関係子を何回か適応することによって得られる.

証明は [LK8] を参照のこと. この命題は, Temperley-Lieb 代数の根底にある組合せ的構造を明らかにしているのである. そして, 実際の計算であるが, D_n の積の表はコンピューターによって容易に得られる.

写像 $\rho : B_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ を次の式で定義することができる:

$$\rho(\sigma_i) = A + A^{-1}U_i, \qquad \rho(\sigma_i^{-1}) = A^{-1} + AU_i.$$

ブレイド b については, 積について $\rho(xy) = \rho(x)\rho(y)$ と定義して得られる$\rho(b)$ の明瞭な形を $\rho(b) = \sum_s \langle b|s\rangle U_s$ とおくと, $\langle \bar{b} \rangle = \sum_s \langle b|s\rangle \langle \overline{U_s} \rangle$ となることは, 既に述べた. (s は, この展開において, 異なるすべての積を動く.) ここで, $\langle \overline{U_s} \rangle$ は, ($\overline{U_s}$ のループの個数) $- 1$ を数え上げている.

そこで, $\mathrm{tr} : \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathbf{Z}[A, A^{-1}]$ を, $U \in D_n$ に対して $\mathrm{tr}(U) = \langle \overline{U} \rangle$ で定義し, 線形的に $\mathcal{A}_n$ に拡張する. この写像は,von Neumann 代数の Jones のトレースを, ループを数えるというように表示上で実現したものである. 以上により, 次の式が得られる: $\langle b \rangle = \mathrm{tr}(\rho(b))$. この定式化によって, ブラケット多項式とブレイド群の Temperley-Lieb 代数への表現のトレースによって構成される Jones 多項式とが, どのように関係しているかが, わかるのである.

確認しなければならないことや, 説明しなければならない点がいくつかある. まず第一に, von Neumann 代数 $\mathcal{A}_n$ のトレースはもともと図形的に定義されたものではないことを指摘しておく. [JO7] において, Jones 代数 $\mathcal{A}_n$ の元の正規形として定義されたのである. このトレースが表示上のループの個数を数えることに一致していることは, 驚くべきことである. 次節では, このトレースが (多少の修正が必要なのだが) Temperley-Lieb 代数の表現における行列のトレースとして解釈できることをみていく.

命題 7.5. 上で定義した $\rho : B_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ は, Artin ブレイド群の表現である.

証明. $\rho(\sigma_i)\rho(\sigma_i^{-1}) = 1, \rho(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) = \rho(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})$, そして $|i-j| > 1$ のとき $\rho(\sigma_i\sigma_j) = \rho(\sigma_j\sigma_i)$ を示せば十分である. 1 番目, 3 番目, 2 番目の順で示していく.

1 番目.

$$\begin{aligned}\rho(\sigma_i)\rho(\sigma_i^{-1}) &= (A + A^{-1}U_i)(A^{-1} + AU_i)\\ &= 1 + (A^{-2} + A^2)U_i + U_i^2\\ &= 1 + (A^{-2} + A^2)U_i + \delta U_i\\ &= 1 + (A^{-2} + A^2)U_i + (-A^{-2} - A^2)U_i\\ &= 1\end{aligned}$$

3 番目.

$|i-j|>1$ とする. このとき, $U_iU_j = U_jU_i$ に注意すると,

$$\begin{aligned}\rho(\sigma_i\sigma_j) &= \rho(\sigma_i)\rho(\sigma_j)\\ &= (A + A^{-1}U_i)(A + A^{-1}U_j)\\ &= (A + A^{-1}U_j)(A + A^{-1}U_i),\\ &= \rho(\sigma_j\sigma_i).\end{aligned}$$

2 番目.

$$\begin{aligned}\rho(i\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) &= (A + A^{-1}U_i)(A + A^{-1}U_{i+1})(A + A^{-1}U_i)\\ &= (A^2 + U_{i+1} + U_i + A^{-2}U_iU_{i+1})(A + A^{-1}U_i)\\ &= A^3 + AU_{i+1} + AU_i + A^{-1}U_iU_{i+1} + A^{-1}U_i^2 + AU_i\\ &\quad + A^{-1}U_{i+1}U_i + A^{-3}U_iU_{i+1}U_i\\ &= A^3 + AU_{i+1} + (A^{-1}\delta + 2A)U_i\\ &\quad + A^{-1}(U_iU_{i+1} + U_{i+1}U_i) + A^{-3}U_i\\ &= A^3 + AU_{i+1} + (A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + 2A + A^{-3})U_i\\ &\quad + A^{-1}(U_iU_{i+1} + U_{i+1}U_i)\\ &= A^3 + A(U_{i+1} + U_i) + A^{-1}(U_iU_{i+1} + U_{i+1}U_i).\end{aligned}$$

この式は i と $i+1$ に関して対称式だから, 次が結論される:

$$\rho(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i) = \rho(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}).$$

これで, $\rho : B_n \longrightarrow \mathcal{A}_n$ が Artin ブレイド群の表現であることの証明が完了した.

□

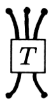
8節　抽象テンソルと Yang-Baxter 方程式

本節および以後本書を通じて用いる**抽象 (図形的) テンソル**の表記法のしきたりの説明から始める. それは実際に, サイズの大きい行列のなす代数の図形的な解釈である. テンソルとは, もともと特別な変換則をもつものであるから, 抽象テンソルとよんで差し支えないであろう.

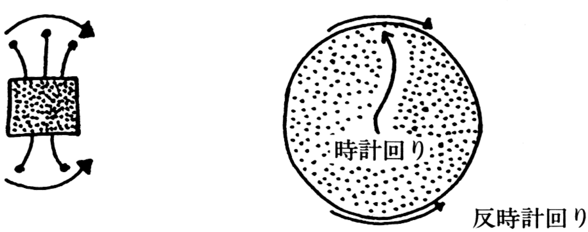
図形的にみると, 添字が隠れるので扱いやすい. 例えば, 添字集合 $\mathcal{I}$ の要素 i と j について成分 M^i_j をもつ行列 $M = (M^i_j)$ は, 上の紐が上の添字に, 下の紐が下の添字に対応する, 次のような箱で表される:

$M = (M^i_j) \quad \leftrightarrow$  .

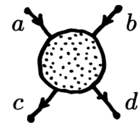
一般に, テンソルのような対象は上方と下方の添字をもつ. これが対応する図形から出ている紐とかラインになる:

$T^{ijk}_{lm} \quad \leftrightarrow$  .

通常は, 添字に忠実にこのような図式を書くことにする. すなわち, 上の添字は上の紐に順序は左から右へ, 同様に下の添字は下の紐に順序も左から右へ, 対応しているものとする. 図式の境界を平面上の Jordan 曲線としてとれるのだから, 上方の左から右への順は時計回りに対応し, 下方の場合は反時計回りに対応する.

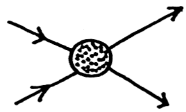


もし, 別の方法で添字を区別したいのならば, 対応するラインにラベルを付けて実行するることもできる. 最も簡単な方法は, **ラインに矢印をつける**ことであろう. 次の図のように書いたら, "入力"$\{a, b\}$ と "出力"$\{c, d\}$ を表している:



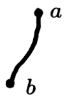
$\leftrightarrow S^{ab}_{cd}$

ここに図形による表記法の性質の一つが現れている: 図形による表記法は, 数学的現象そのものではない. 例えば, 図



は, (入出力や散り具合の) 過程を表しているように思えるが, そのように解釈しなければならないことはなく, 文脈に応じて解釈すればよいのである.

通常, 次の紐は Kronecker のデルタを表しているものとする.



$$\leftrightarrow \delta^a_b = \begin{cases} 1 & (a = b \text{ の場合}) \\ 0 & (a \neq b \text{ の場合}) \end{cases}$$

次の図のように, 曲がった紐が Kronecker のデルタを表さない場合があるが, これについては後に詳しく取り扱うことにしよう.

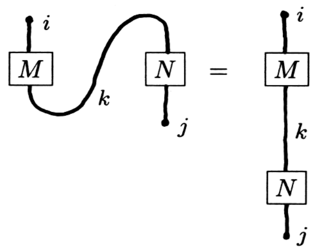


$\leftrightarrow M_{ab}$

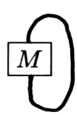
積の一般化

行列の積の定義を思い出してもらいたい: $(MN)^i_j = \sum_k M^i_k N^k_j$. これは, しばしば $M^i_k N^k_j$ と書かれ, 上と下に繰り返してでてくる添字について和をとるものとする (Einstein の総和の規約). これを図形上で表すと, 2 本の添字のついた紐をラインで結び, そのラインについている添字で和をとることになる.

$$\sum_k M^i_k N^k_j \leftrightarrow M^i_k N^k_j \leftrightarrow$$

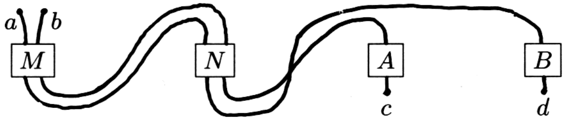


$$\mathrm{trace}(M) = \mathrm{tr}(M) = \sum_i M^i_i \leftrightarrow M^i_i \leftrightarrow$$

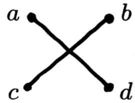


すなわち，行列の積は 2 つの箱をつなげることに対応し，通常の行列のトレースは箱を自分自身につなげることに対応する．

この方法で，さまざまな積を図形的に書くことができる．例えば，

$M^{ab}_{ij}N^{ij}_{kl}A^{l}_{c}B^{k}_{d} \leftrightarrow$ 

この最後の例では，添字の付け換えに対応して交差が出てきている．ここでは次のように解釈しよう：



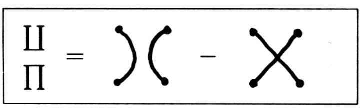
$\leftrightarrow \delta^a_d\delta^b_c.$

ラインの交差は，Kronecker のデルタとは独立で，影響はない．

演習問題． 添字集合を $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ とし，

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases} 1 & (i < j) \\ -1 & (i > j) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

と定義する．また，$\varepsilon^{ij} = \varepsilon_{ij}$ とおく．$\prod$ を ε_{ij} に対応する図式，$\coprod$ を ε^{ij} に対応する図式としたとき次の式を示せ．



$$\prod_{i\ j} = \varepsilon_{ij}$$

$\begin{matrix}\coprod \\ \prod\end{matrix} = \coprod\prod$ であることに注意せよ．

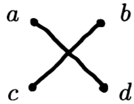
上の式は次のように書けることがわかるであろう．

$$\boxed{\varepsilon^{ab}\varepsilon_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c}$$

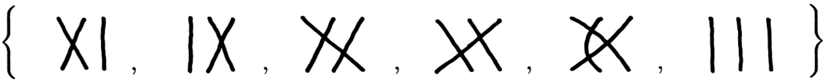
この等式が後に重要になってくるのである．

交差したラインに話を戻す．それは無意味なわけではなく，置換を表している．したがって，演習問題のように $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ とすれば，

$$P^{ab}_{cd} = \delta^a_d \delta^b_c =$$

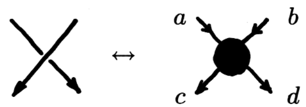


となり, P は互換を表す行列となる. 同様に, 3 本のラインの場合は次のように 3 次の対称群 S_3 を表す.

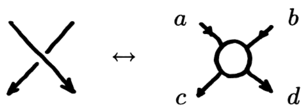


抽象テンソル図式としての結び目図形表示

ここまでの説明で, 結び目あるいは絡み目の表示を, 抽象テンソルの図式として解釈しようとしていることがわかるであろう. ではどのように解釈できるであろうか. 実際, 解釈の方法はいろいろあるが, 最も簡単なものとして, 向きが付いた表示を用い, 2 つのタイプの交差点に 2 つの行列を対応させるというものがある. つまり, 次の図のようになる.



$= R^{ab}_{cd}$

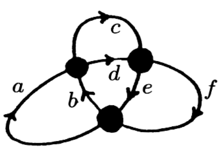


$= \overline{R}^{ab}_{cd}$

この規約を用いると, 任意の有向絡み目の図形表示 K は, (端点のある辺をもたない) 縮約された抽象テンソル $T(K)$ に移される.

例題.  $K \to$  $T(K)$

したがって, $T(K)$ のラインに添字集合を用いてラベルをを付けると, 繰り返される添字は和を意味するのだから, $T(K)$ は形式的な積の和に対応する.



$$T(K) = \sum_{a,b,c,d,e,f} R^{ba}_{dc} R^{dc}_{ef} R^{ef}_{ba}$$

可換環 $\mathcal{R}$, 添字集合 $\mathcal{I}$ が存在して, $a, b, c, \cdots \in \mathcal{I}, R^{ab}_{cd} \in \mathcal{R}$ とすると,

$$T(K)=\sum_{a,b,\cdots,f\in\mathcal{I}} R^{ba}_{dc}R^{dc}_{ef}R^{ef}_{ba}$$

と書け, $\mathcal{I}$ から $T(K)$ の辺に添字のラベルを付けることは, K のステイトを表しているとみなすことができる. すなわち, K の**ステイト** σとは, 写像 $\sigma : E(K) \longrightarrow \mathcal{I}$ のことである. ただし, $E(K)$ は K の辺集合, $\mathcal{I}$ は与えられた添字集合である.

このようにみると, $T(K)$ は絡み目の表示のもとになる向きの付いたグラフと同一視でき, このグラフは, K の交差点のタイプによって頂点にラベル (黒と白の色) が付いている. このような表示は, (+) 交差点に対応する R^{ab}_{cd} と (−) 交差点に対応する $\overline{R}^{ab}_{cd}$ の形式的な積に, 直接に移される.

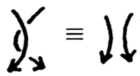
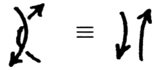
ステイトσ の概念を用いると, 次のように書ける:

$$T(K)=\sum_{\sigma}\langle K|\sigma\rangle$$

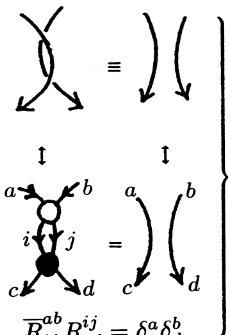
ここで, σ は K のすべてのステイトを表し, $\langle K|\sigma\rangle$ は与えられたステイトによって K の交差点に割り振られた**頂点の重み** R^{ab}_{cd} (あるいは $\overline{R}^{ab}_{cd}$) の積を意味する.

どのような状況のもとで, $T(K)$ が Reidemeister 移動によって不変であるかを知りたい. 特に, これに関連する当面の問題は, 移動 II と移動 III (正則同位) のもとでの不変性である. 最終的には, 抽象テンソルを用いるモデルが, Artin ブレイド群の表現を作るのに便利であることがわかるであろう. ただし, 正則同位で不変であるものを得るには, 多少の修正が必要である.

では, 一歩ずつ進んでいくことにする. 移動 II には, 2 つの場合がある.

II(A)  , **II(B)** 

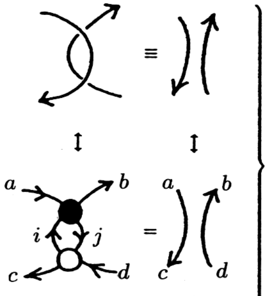
全体として, このモデルはこの両方の移動で不変であることが必要である. 移動 II(A) は, 次のように, R と $\overline{R}$ のとても簡単な行列の条件に対応する:



$$\overline{R}^{ab}_{ij}R^{ij}_{cd}=\delta^a_c\delta^b_d$$

チャネル・ユニタリティ

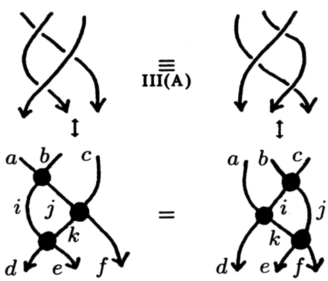
すなわち, R と $\overline{R}$ が互いに逆行列ならば, II(A) が満たされる. R のこの条件を**チャネル・ユニタリティ(channel unitarity)** とよぶ. 移動 II(B) によって必要な条件は, **クロスチャネル・ユニタリティ(cross-channel unitarity)** とよばれる:



$$R^{ia}_{jb}\overline{R}^{jd}_{ic} = \delta^a_c \delta^d_b$$

クロスチャネル・ユニタリティ

ここで, 第 6 節でチャネル・ユニタリティとクロスチャネル・ユニタリティについて議論したことを思い出していただきたい. 既に示したように, チャネル・ユニタリティとクロスチャネル・ユニタリティが成立していれば, 移動 III で不変であることをいうには, 移動 III(A)[すべての交差点が (次の図に示したような)(+), あるいは (−)] で不変であることを示せば十分である. 図 14 を見ていただきたい.



$$R^{ab}_{ij}R^{jc}_{kf}R^{ik}_{de} = R^{bc}_{ij}R^{ai}_{dk}R^{kj}_{ef}$$

図 14.　III(A) 移動に対応する Yang-Baxter 方程式

図 14 で見たように, 移動 III$(A,+)$ と 移動 III$(A,-)$ で $T(K)$ が不変となるための行列条件がある. ここで + と − の符号は, これらの移動の交差点のタイプを表している. これらの等式は次のように書き表され, それぞれ, R および $\overline{R}$ に対する **Yang-Baxter 方程式**とよばれる:

$$\mathrm{III}(A,+) \quad : \quad \sum_{i,j,k\in\mathcal{I}} R^{ab}_{ij}R^{jc}_{kf}R^{ik}_{de} \quad = \quad \sum_{i,j,k\in\mathcal{I}} R^{bc}_{ij}R^{ai}_{dk}R^{kj}_{ef}$$

$$\mathrm{III}(A,-) \quad : \quad \sum_{i,j,k\in\mathcal{I}} \overline{R}^{ab}_{ij}\overline{R}^{jc}_{kf}\overline{R}^{ik}_{de} \quad = \quad \sum_{i,j,k\in\mathcal{I}} \overline{R}^{bc}_{ij}\overline{R}^{ai}_{dk}\overline{R}^{kj}_{ef}$$

上の式で, 総和の記号を用いて表したのは, 繰り返し用いられている添字が添字集合全体にいきわたり, 総和をとっていることを示すためである.

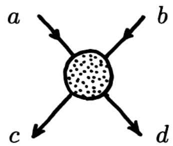
以上により, 次の定理が得られる.

定理 8.1. 行列 R と $\overline{R}$ が条件

1) チャネル・ユニタリティ
2) クロスチャネル・ユニタリティ
3) Yang-Baxter 方程式

を満たすならば, $T(K)$ は有向表示 K の正則同位の不変量である. □

注意. 数理物理に現れる Yang-Baxter 方程式は, 速度とか運動量とよばれる特別なパラメーターを含んでいる. 実際, 下図のような頂点図形を入ってくるスピン (あるいは電荷) a, b と出ていくスピン c, d をもつ粒子の相互作用として解釈すると, R^{ab}_{cd} はこの相互作用の散乱振幅を表していると受けとれる. すなわち, スピンのこの組合せに対する確率振幅とみなすことができる.



このような状況のもとで, 粒子の運動量などの他の要素を考えることはごく自然なことである.

ここでは, スピンのみを考えることにしよう. スピンが保存されることにより, $R^{ab}_{cd} \neq 0$ ならば $a+b=c+d$ という規則が示唆される. 結局, このことが YBE (Yang-Baxter 方程式) の解を構成するためのよい出発点になるのである.

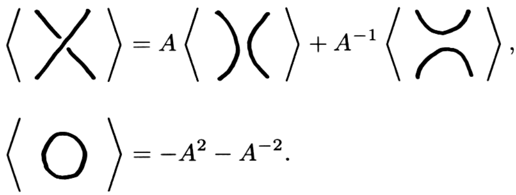
例題. 添字集合を $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, n\}$ とし, $R^{ab}_{cd} = A\delta^a_c\delta^b_d + A^{-1}\delta^{ab}\delta_{cd}$ とする. ここで $n = -A^2 - A^{-2}$ である. すなわち, A は次の等式を満たすものとする:

$$nA^2 + A^4 + 1 = 0.$$

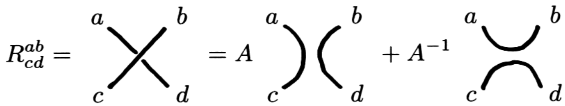
また, δ^a_b と δ^{ab} は Kronecker のデルタである:

$$\delta^a_b = \begin{cases} 1 & (a=b) \\ 0 & (a\neq b), \end{cases} \qquad \delta^{ab} = \begin{cases} 1 & (a=b) \\ 0 & (a\neq b). \end{cases}$$

ここでは, この解を Jones 多項式のブラケット模型 (第 3 節) から導いてみよう. ブラケット多項式が, 以下の式で定義されることを思い出してもらいたい:



ブラケットを扱う際の諸々のことは, 第 3 節を参照することにする. この式は次の行列のモデルを表している.

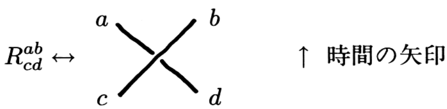


$$= A\delta^a_c\delta^b_d + A^{-1}\delta^{ab}\delta_{cd}.$$

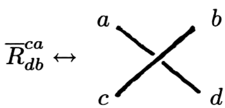
このモデルにおいて, ループの値 $\langle \bigcirc \rangle$ は Kronecker のデルタのトレースになる: もし $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, n\}$ ならば, $\langle \bigcirc \rangle = \sum_{a\in\mathcal{I}} \delta^a_a = n$. こうして, A が次の等式を満たす必要があることがわかる:

$$n = -A^2 - A^{-2}.$$

このように, R 行列の特別な形を考えればブラケットと関係づけることができるが, いくつか確認しなければならないことが残っている. 例えば, 向きが付いてない場合, 下図のように対応づける:



すると (時間の矢印を 90 度回転してみれば) 次のような対応がつかなければならない.



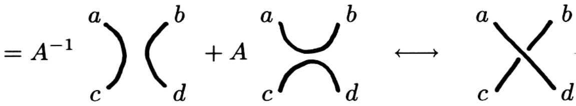
$\leftarrow$ 時間の矢印

したがって,

$$\overline{R}^{ca}_{db} = R^{ab}_{cd}$$

が必要となり, 以下の式が成立する:

$$\begin{aligned}\overline{R}^{ab}_{cd} &= R^{bd}_{ac}\\ &= A\delta^b_a\delta^d_c + A^{-1}\delta^{bd}\delta_{ac}\\ &= A\delta^a_c\delta^b_d + A^{-1}\delta^{ab}\delta_{cd}\end{aligned}$$

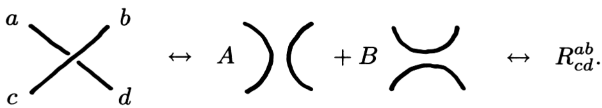


R と $\overline{R}$ がチャネル・ユニタリティとクロスチャネル・ユニタリティを満たす場合, $\langle K\rangle$ が正則同位の不変量であることの証明が, 本質的に $\overline{R}$ が R の逆行列であること, および R と $\overline{R}$ が YBE を満たすことの証明にもなる.

絡み目の表示を考えている限り, R 行列は次のように定義されるであろう:

$$R^{ab}_{cd} = A\delta^a_c\delta^b_d + B\delta^{ab}\delta_{cd}$$

すなわち,



添字集合を $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, n\}$ すると, 結果として得られる縮約テンソル $T(K)$ は次の式を満たすことになる:

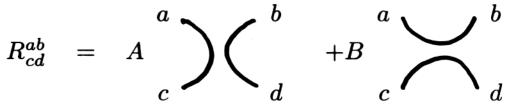


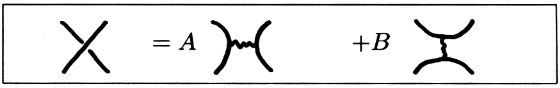
$$\begin{aligned}T(\bigcirc K) &= nT(K)\\ T(\bigcirc) &= n.\end{aligned}$$

よって, $\langle K\rangle$ をループの値 n をもつ一般化されたブラケットとすれば, $T\langle K\rangle = \langle K\rangle$ となる.

$B = A^{-1}, n = -A^2 - A^{-2}$ とおいても, R が YBE を満たすことが保証されるわけではない. しかし, これらの条件のもとで, $\langle K\rangle$ が Reidemeister 移動 III で不変であるという事実があるのだから, 直接そのことを R 行列上で確認してみることにする.

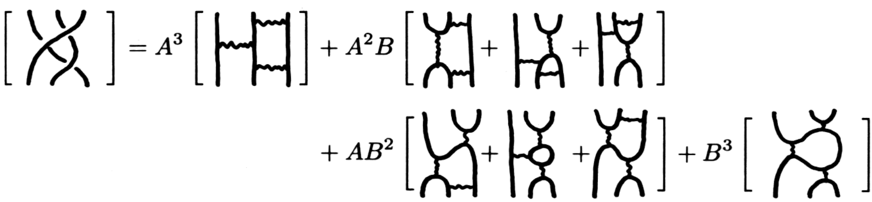
R 行列による計算

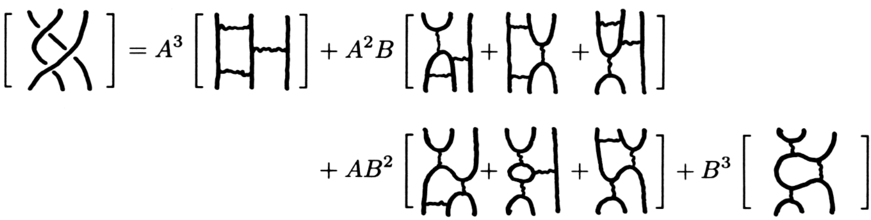




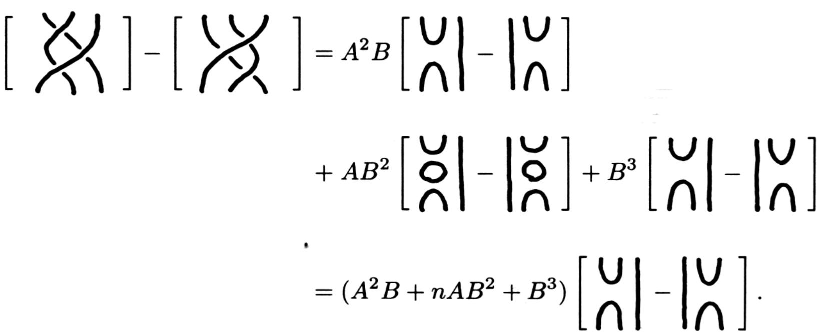
(表記法)

とおく．ここで，下の式に現れたラインは，添字集合 $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, n\}$ からの添字のついた Kronecker のデルタを示していると解釈する．この場合，三角形の状態を次のように 8 つの項に直接展開することができる：





ここで，ループの値を n とすると，次のように差が計算できる：



よって，R が YBE を満たすならば，次の式が成立する：

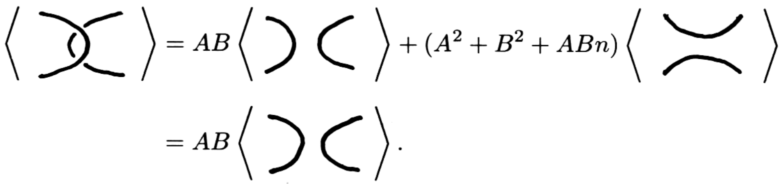
$$B(A^2 + nAB + B^2) = 0.$$

したがって, $B = 0$ は YBE の自明な解となる. そうでなければ, $A^2+nAB+B^2 = 0$ であり, したがって, $A \neq 0 \neq B$ と仮定すれば, ループの値

$$n = -\left(\frac{A}{B} + \frac{B}{A}\right)$$

が得られる.

このループの値を採用すると, 前に戻って, ブラケットが移動 II でどうなるか調べるのもおもしろいであろう:



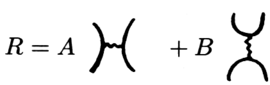
したがって, たとえ $B \neq A^{-1}$ であっても, ブラケットのこの模型は, AB の累乗を除いて, 移動 II で不変になるであろう. これを正規化して全同位の不変量にすると, Jones 多項式の通常の解釈が得られるが, この証明は読者の演習問題として残しておく.

いずれにせよ,

$$R^{ab}_{cd} = A\delta^a_c\delta^b_d + A^{-1}\delta^{ab}\delta_{cd}$$
$$n = -A^2 - A^{-2}$$

が YBE の解であることを, 直接に示したのである.

結果を導く過程で, 相互作用の合成の跡を残すために次のような記号を用いた.



これらを, **抽象 Feynman 図形 (abstract Feynman diagram)** と考えると都合がよく, 鉛直方向の時間の矢印 [↑] をとると, 次の対応が得られる:

 ↔ スピンを保つ相互作用

 ↔ 生成とそれに続く消滅

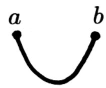
次節でも, このテーマに従って, 他のブラケットの模型や YBE の解を考えていく.

9節　形式的Feynman図形,「真空」期待値としてのブラケット，量子群 $SL(2)_q$

前節で構成した Yang-Baxter 方程式の解は, ブラケット多項式と直接関係しているが, 各々の解は, 与えられた正整数 n に対して $n + A^2 + A^{-2} = 0$ の解と対応する特殊値におけるブラケットを与えている. 本節の最後に, ブラケットの無限に多くの特殊化に対する Yang-Baxter ステイト模型について述べる.

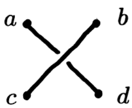
実際, Yang-Baxter 方程式の解と, それに対応するブラケットのステイト模型を構成する方法がある. この模型は, ただ一つですべてのブラケット多項式を与える. これを構成するためには, 生成・消滅・相互作用の図に戻って, やや詳しく取り扱うことが概念的にも好ましいであろう.

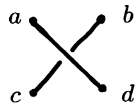
下図を少し詳しく考察すると, 極大または極小のようなパターン (fragment) はもはや Kronecker のデルタとみなす必要はないことがわかる. 下図のような時間の矢印をもつパターンは, 真空からスピン a と b が**生成** (creation) したと考えられる:

$\uparrow$　

$\leftrightarrow \quad M^{ab}.$

いずれにせよ, 行列 M_{ab} と M^{ab} を, それぞれ, **キャップ** (cap) と**カップ** (cup) に対応させよう. 時間の矢印がページの下から上に向かっているとみると, カップは生成に, キャップは消滅になる. 行列 M_{ab} と M^{ab} はこの状況のもとで (抽象的な) 振幅を表している[†]. カップとキャップに加えて, (本書におけるように) 結び目理論的に相互作用を考えると, R 行列が得られる:



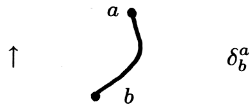
$\leftrightarrow R^{ab}_{cd},$


$\leftrightarrow \overline{R}^{ab}_{cd}$

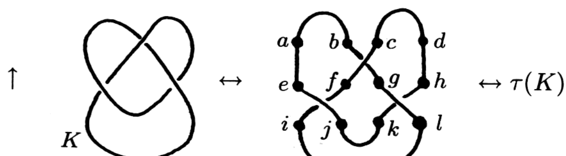
R と $\overline{R}$ に対する交差点は, 時間の軸に関して区別されることを注意しておく. すなわち, R に対しては, ページを下から上に進むにつれて交差点の上を通るラインは左から右に進む.

[†]訳注: このような考え方は Feynman 図形の理論では自然であり, よく用いられる.

(向きの付いていない) 絡み目の図形表示を, 時間の矢印に関して (時間を標高関数とみなして), 自然にカップ・キャップ・相互作用に分解するように表す. この標高関数に関しては, 臨界点がない曲線に余分な Kronecker のデルタが現れることがある:



例題.



$$\tau(K) = M_{ab}M_{cd}\delta^a_e\delta^d_h R^{bc}_{fg}\overline{R}^{ef}_{ij}\overline{R}^{gh}_{kl}M^{il}M^{jk}$$

この例は, 三葉結び目の図形表示 K を, 消滅・生成・相互作用の対応する表現 $\tau(K)$ に移したものである. もし, テンソルが数値 (あるいは可換環に値) をとるならば, $\tau(K)$ は与えられた図形と時間の矢印によって示された過程の「真空」期待値を表している.

この期待値は, 量子力学における期待値とよく似ている. 量子力学では,2 つの過程をつなげた際の確率振幅は, その過程の中間にある状態の振幅の積の, 可能なすべての状態に対する和として得られる ([FE] 参照). したがって, 入力 a と出力 b をもつある過程 $\underset{a}{—}\boxed{P}\underset{b}{—}$ と他の過程 $\underset{c}{—}\boxed{Q}\underset{d}{—}$ があるとすると, $\underset{a}{—}\boxed{P}\underset{i}{—}\boxed{Q}\underset{b}{—}$ に対する振幅は次の総和で表され, 行列の積に正確に対応している:

$$\sum_i P_{ai}Q_{ib} = (PQ)_{ab}.$$

「真空」期待値では, 入力も出力もない. (Einstein の和の規約を用いるとき) 表現 $\tau(K)$ は, 生成・消滅・相互作用の振幅の積の中間の状態 (ライン上のスピン) すべてにわたる和を表している. したがって, $\tau(K)$ は絡み目の図形表示上の単純化された〈量子場の理論〉において,「真空」期待値の基本的な形とみなすことができる. $\tau(K)$ は K の正則同位の不変量であるという意味で, トポロジー的な〈量子場の理論〉であるとみなしたい. そのためには何が必要であるかをみていくことにする[†].

時間の矢印がページの鉛直方向に延びていると考える. 絡み目の図形表示の正

[†]訳注:　ここでは, 場の理論である必然性はまったく説明されていない. ここでの主張は, 場の理論の摂動論における Feynman 図形の方法に類似しているが, 通常の物理学的な用語法ではない. このような事情から,〈 〉は訳者がつけたものである.

則同位は, Reidemeister 移動 II と III によって生成される. 移動 II は, 時間の矢印に対していろいろな角度で現れる. 次の図は 2 つの極端な場合を表している:


鉛直方向の II


水平方向の II

同様に, 移動 III もさまざまな角度で現れるが, 端点を固定したまま交差点を捻ることができる:


捻り

面白いことに, 鉛直方向の移動 II と捻りにより, 水平方向の移動 II が生成できる. 図 15 を見ていただきたい. これには, 以下のような臨界点 (極大と極小) の対が打ち消されるトポロジー的な移動が役立っている:


トポロジー的移動

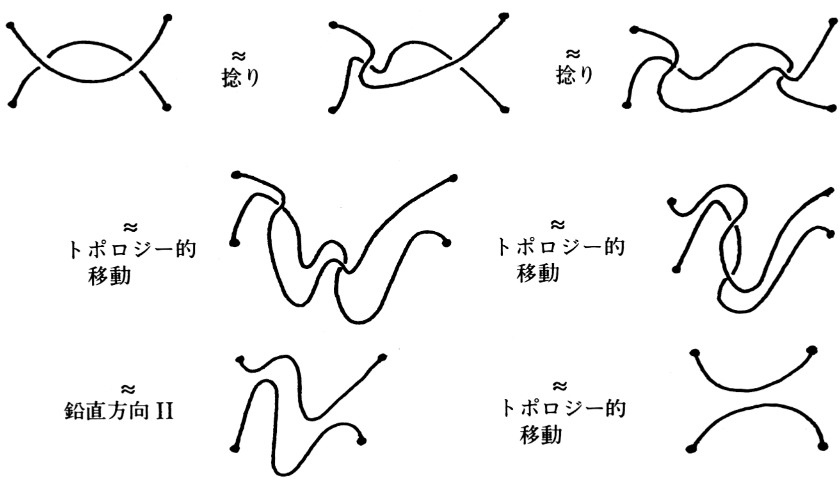
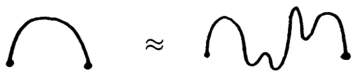
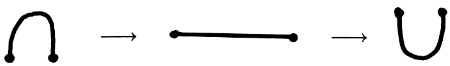


図 15. 捻り＋鉛直方向 II ＋トポロジー的移動 ⟹ 水平方向 II

図 15 において, 端点におけるラインの角度は変えていない. したがって, この移動により生成される極大点と極小点の数を数え上げるようにすることができ, またこの移動が, 部分的に図のパターンとして現れるようなもっと大きな図形表示の中でも自然に適用できる. 角度が保たれるという規約はたいへん重要であり, そのことは, 極大点 (極大点消去) という簡単な例によってもわかる:



もし端点の角度を動かすことを許せば, 極大点が極小点に変わってしまうことも起こるであろう:



そしてさらに残念なことには, これから次のような微分不可能な臨界点が現れてしまうことである:



同様なことは, 水平方向の移動 III についてもいうことができる. したがって, 次のことがわかる. **時間の矢印に直交するような 2 つの絡み目表示が, 正則同位であるための必要十分条件は, 一方が他方から次の移動により得られることである:**

a) (極大点と極小点を打ち消すような) トポロジー的な移動.

b) 捻り.

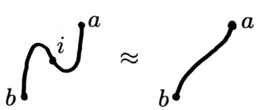
c) 鉛直方向の移動 II.

d) 時間の矢印に関してすべて同じ型の交差点になっている鉛直方向の移動 III.

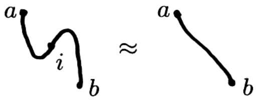
(ここで, 直交とは, 時間のレベルがその図形表示といくつかの孤立点で, すなわち横断的に交わる点や極大点や極小点で交わることである.)

このような相対的な Reidemeister 移動の条件は, 生成・消滅・相互作用の抽象テンソルの条件に置き換えられ, $\tau(K)$ が正則同位の不変量であることが示されることになる.

a) トポロジー的な移動



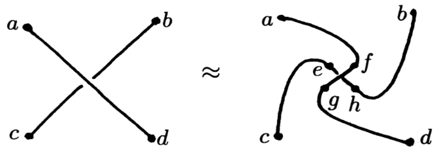
$\leftrightarrow \quad M_{bi}M^{ia} = \delta_b^a,$



$\leftrightarrow M^{ai}M_{ib} = \delta^a_b$

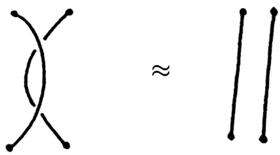
行列 M_{ab} と M^{ab} は互いに逆行列である.

b) 捻　り



$$\overline{R}^{ab}_{cd} = M_{ce}R^{ef}_{gh}M^{hb}\delta^a_f\delta^g_d$$

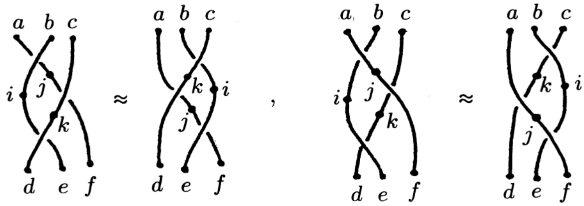
c) 鉛直方向 II 型



$$\overline{R}^{ab}_{ij}R^{ij}_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d$$

$$\overline{R}R = I = R\overline{R}$$

d) 鉛直方向 III 型



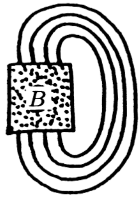
これは R と $\overline{R}$ に対する Yang-Baxter 方程式である.

したがって, 次の定理が得られる (定理 8.1 と比較されたい).

定理 9.1′. 相互作用行列 R とその逆行列 $\overline{R}$ が Yang-Baxter 方程式を満たし, M_{ab} と M^{ab} が捻りの条件 b) を満足し, かつ M_{ab} と M^{ab} が互いに逆行列ならば, $\tau(K)$ は正則同位の不変量となる. □

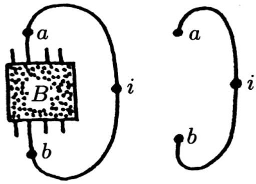
ブレイド.

「真空」期待値の観点は, ブレイドの場合特にわかりやすい. K がブレイドの閉包で表されているとき, $\tau(K)$ を考えてみよう.



$$K = \overline{B}$$

B をブレイドとし, $K = \overline{B}$ とすると, 閉じるための紐は 1 つの極大点と 1 つの極小点をもつ.



$$\leftrightarrow \quad M_{ai}M^{bi} = \eta_a^b$$

ブレイド自身には生成と消滅はなく, 相互作用のみからなる. 「真空」状態から時間が経つにつれて, 閉じた紐は極小点から生成に移る. 時間とともに左側ではブレイド上を進むが, 右側では自明なブレイド上を進むことになる. そして極大点で出会う. ブレイドの紐の各々は, 上図で示したように次の形の行列を与える:

$$\eta_a^b = M_{ai}M^{bi}.$$

$\rho(B)$ をブレイドから得られる (R 行列からなる) 相互作用のテンソルとすると, n–ブレイドに対して次の式が成立することがわかる:

$$\tau(K) = \mathrm{Trace}(\eta^{\otimes n}\rho(B)).$$

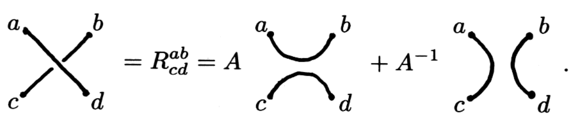
ここで, $\rho(B)$ は第 7 節における行列のテンソル積と同じものとみなす. $\tau(K)$ のこの見方は, Markov 定理を通して議論したものと同じ形をしていることを注意しておく.

ブラケット多項式とその R 行列

$\tau(K)$ がブラケットの関係式



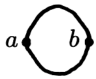
を満たすようにするためには, R 行列を次のように選ぶべきであろう:



よって

$$\boxed{R^{ab}_{cd} = AM^{ab}M_{cd} + A^{-1}\delta^a_c\delta^b_d}$$

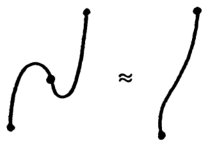
ここでしばらくの間, M 行列が正確なループの値を与えると仮定する. すなわち, 次が成り立つとする:



$$= \sum_{a,b} M_{ab}M^{ab} = d = -A^2 - A^{-2}.$$

$U = M_{ab}M^{cd} =$  とおくと, $U^2 = dU, R = AU + A^{-1}I$ が得られる. R が YBE を満たすことの証明は, 命題 7.5 で対応するブレイド関係式における証明と同様である.

したがって, ブラケットに対するモデルと YBE の解を得るためには, ループの値 $-A^2 - A^{-2}$ をもつような互いに逆行列となる行列の対 (M_{ab}, M^{ab}) をみつければよい. $M^2 = I$ となる行列 M をみつけるために, $M_{ab} = M^{ab}$ とおいてみる.



$$\leftrightarrow \quad M^2 = I$$

すると, ループの値 d は, 行列 M の要素の平方の和である:

$$d = \sum_{a,b}(M_{ab})^2.$$

$M = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$ とおくと, $M^2 = I$ となり, $d = (-1) + (-1) = -2$ となる. これはブラケットの特別な場合, $A = 1$ あるいは $A = -1$ の場合である. さらに, この M を変形して, $M^2 = I, d = -A^2 - A^{-2}$ を満たす行列 M が得られる:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1}\,A \\ -\sqrt{-1}\,A^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

生成／消滅に対する行列 M をこのように選ぶと, $\langle K \rangle$ に対するテンソル模型と YBE の解が得られる.

直接に行列で表すと,

$M =$	1	2
1	0	$\sqrt{-1}A$
2	$-\sqrt{-1}A^{-1}$	0

$U = M \otimes M =$

	11	12	21	22
11	0	0	0	0
12	0	$-A^2$	1	0
21	0	1	$-A^{-2}$	0
22	0	0	0	0

となり, $R = AM \otimes M + A^{-1} I \otimes I$ より, R は次のようになる:

$R =$

A^{-1}	0	0	0
0	$-A^3 + A^{-1}$	A	0
0	A	0	0
0	0	0	A^{-1}

YBE の解についていうべきことがたくさんあるのだが, その議論をするために, まず群 $SL(2)$ と $A = \pm 1$ の場合の関係をみていこう.

スピン・ネットワーク, バイノル, $SL(2)$

$M = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$ となるブラケットの特別な場合は特に重要である. この行列を次のように書き表してみよう:

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} = \sqrt{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \sqrt{-1}\, \varepsilon$$

ここで, ε_{ab} を次のような交代記号とする:

$$\varepsilon_{ab} = \begin{cases} 1 & (a < b \text{ の場合}), \\ -1 & (a > b \text{ の場合}), \\ 0 & (a = b \text{ の場合}). \end{cases} \qquad a, b \in \{1, 2\} = \mathcal{I}$$

また, 行列 ε を次のような図式で書くことにしよう:

$$\varepsilon_{ab} = \underset{a\ b}{\prod}, \qquad \varepsilon^{ab} = \overset{a\ b}{\coprod}$$

この交代記号は今後の議論で基本となるものである.

補題 9.2. $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ を可換な (結合律を満たす) スカラーからなる行列とする. このとき,

$$P\varepsilon P^T = \mathrm{DET}(P)\varepsilon.$$

ここで, P^T は P の転置行列を表す.

証明.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & d \\ -a & -c \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} ab-ba & ab-bc \\ cb-da & cd-dc \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & ad-bc \\ -ad+bc & 0 \end{bmatrix}$$
$$= (ad-bc)\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \square$$

補題 9.2 よって, 次のように定義することができる.

定義 9.3. $\mathcal{R}$ を単位元をもつ可換な結合環とする. このとき, $SL(2,\mathcal{R})$ を, 次の等式を満たし, $\mathcal{R}$ に成分をもつ 2×2 行列 P の集合と定義する:

$$P\varepsilon P^T = \varepsilon.$$

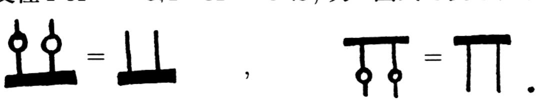
以下では, $SL(2,\mathcal{R})$ を $SL(2)$ と書く. $SL(2)$ は, ε–記号を不変とする行列 P の集合である.

ε–記号を不変にすることを図式でみてみよう: $P = (P^a_b) = (P_{ab})$ とおく.

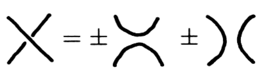
$$(P\varepsilon P^T) = P^a_i \varepsilon^{ij} P^b_j, \qquad P^a_b$$



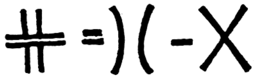
したがって, ε 不変性 $P\varepsilon P^T = \varepsilon, P^T\varepsilon P = \varepsilon$ は, 次の図式で表される:



この意味で, $A = \pm 1$ **における絡み目の表示は,** $SL(2)$**–不変なテンソルに対応している.**

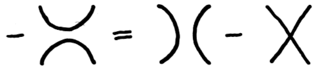
また, R 行列についての恒等式  は, 次のような特別な

$SL(2)$–不変なテンソルの恒等式となる:

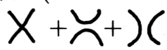
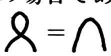


$$\varepsilon_{ab}\varepsilon_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c$$

$\Leftrightarrow \quad -(\sqrt{-1}\coprod)(\sqrt{-1}\prod) =$ 

$\Leftrightarrow$ 

$\Leftrightarrow$  $[A = +1]$.

この $SL(2)$–不変なテンソル図式の計算では, 上交差と下交差の区別がなくなり, したがって, それは平面上の自己交差を許した曲線に対するトポロジー的に不変な計算になる. 特に, すべての Jordan 曲線は -2 という同じ値をとる. $SL(2)$–不変なこの計算の形式には, Roger Penrose [PEN1] のバイノル計算法 (binor calculus) がある. 彼のバイノル (binor) は正確には, $A = -1$, すなわち,  $= 0$ の場合である. ここでは各々の交差点にはマイナスの符号が割り当てられており,  という不変性が得られる.

Penrose のバイノルは, ブラケットの特別な場合, すなわち, Jones 多項式の特別な場合になっている. バイノルは, スピン・ネットワークの Penrose 理論の基礎になっている.

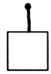
いまから, Penrose がバイノルを発見した段階を少し追ってみよう. Penrose はまず, スピノル ψ^A を考えた. スピノル (spinor) とは実際, 複素数 $\mathbf{C}$ 上の 2 次元ベクトルである. したがって, $A \in \{1, 2\}$ である. $SL(2, \mathbf{C})$ は, このスピノルに (行列の積として) 作用し, $SL(2, \mathbf{C})$–不変な内積 $\psi\psi^* \in \mathbf{R}$ (実数) の定義が必要になってくる. ここで, $\psi^*_A = \varepsilon_{AB}\psi^B$ とおくと,

$$\psi\psi^* = \psi^A\psi^*_A = \psi^A\varepsilon_{AB}\psi^B.$$

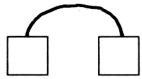
$(U^A_B) = U \in SL(2, \mathbf{C})$ とすると, $\psi\psi^*$ は U の作用のもとで不変になる:

$$\begin{aligned}(U\psi)(U\psi)^* &= (U^A_I\psi^I)\varepsilon_{AB}(U^B_J\psi^J) \\ &= (U^A_I U^B_J\varepsilon_{AB})\psi^I\psi^J \\ &= \varepsilon_{IJ}\psi^I\psi^J \\ &= \psi\psi^*.\end{aligned}$$

内積を表す図式の計算は, 指数の位置を下げるという “自然な” 方法によって示される:

$\psi^A \leftrightarrow$  , $\psi^*_A \leftrightarrow$ 

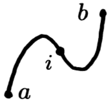
もちろん,

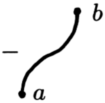
$\psi\psi^* \leftrightarrow$ 

が成り立ち, 次の対応が導かれる:

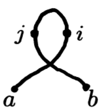
 $\leftrightarrow \varepsilon_{ab},$  $\leftrightarrow \varepsilon^{ab}.$

しかし, 結果として得られた図式は, トポロジー的に不変ではない:



$\leftrightarrow \varepsilon_{ai}\varepsilon^{ib} = -\delta^b_a \leftrightarrow -$ 

,



$\leftrightarrow \delta^i_a\delta^j_b\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ba} = -\varepsilon_{ab}.$

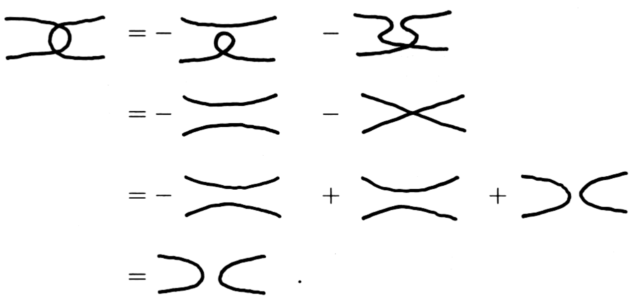
Penrose はこの難しさを, 各極小点と交差点にマイナスの符号をつけることによって解決した. すると, ループの値は +2 から −2 に変わり, 次のバイノルの恒等式が得られる:

 +  +  $= 0.$

この計算が実際にトポロジー的な不変量になることは, ブラケット多項式の研究からよくわかっていることである. 次の対応は, 極大点と極小点に符号を割り当てるという Penrose の方法と同様な効果がある:

 $\leftrightarrow \sqrt{-1}\coprod,$  $\leftrightarrow \sqrt{-1}\prod.$

バイノルに対しても, 通常用いるトポロジー的な証明を与えることも面白い.



バイノルとスピン・ネットワークの理論に対しては, 興味深い内容がたくさんある. ([PEN1], [PEN2], および, 本書第 II 部, 第 12,13 節を参照のこと.)

R 行列.

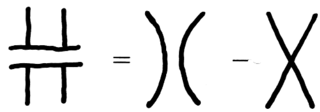
ここからは, スピノル・イプシロン (交代記号) の特別な変形 $\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ から導かれるブラケットの計算をみていこう. 以下, 次のような略記号を用いることにする:

$$M_{ab} = \sqrt{-1}\ \tilde{\varepsilon}_{ab} = \sqrt{-1} \prod_{a\ b} A^{\prod_{a\,b}}.$$

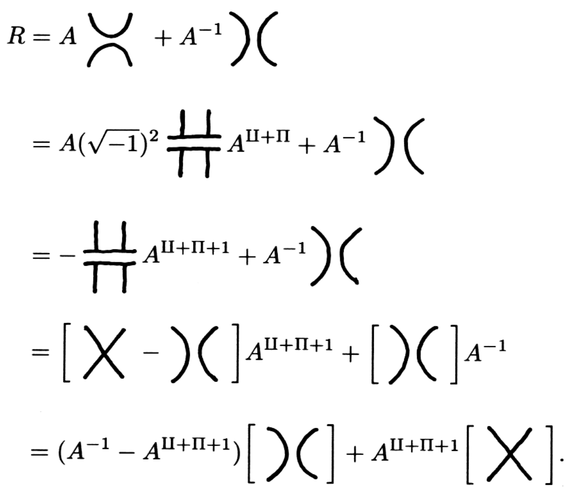
したがって,

$$\boxed{\cap \ \leftrightarrow\ \sqrt{-1}\prod A^{\Pi}, \qquad \cup\ \leftrightarrow\ \sqrt{-1}\coprod A^{\amalg}}$$

は, ブラケット多項式に関する発生と消滅の行列になっている. このような記号化に Fierz の恒等式



を合わせると, R 行列を表現し直すことができる:



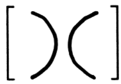
粒子の相互作用という点からみると, Fierz の恒等式により,

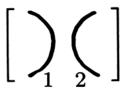
消滅 と生成  は, 切り替え  と交差 

の組合せに置き換えられる.

このことにより, ブラケットに対する別のステイト模型が得られ, 一般化することにより, Homfly 多項式に対する模型の列ができるのである ([JO4] を参照).

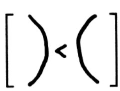
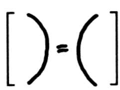
詳しくみていくために, 少し R 行列を計算してみよう:

$$R = (A^{-1} - A^{\coprod + \prod + 1})$$  $$+ A^{\coprod + \prod + 1}$$  .

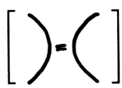
添字集合を $\mathcal{I} = \{1,2\}$, $\prod_{12} = +1$, $\prod_{21} = -1$, $\prod_{11} = \prod_{22} = 0$ とおく. 上のような図式上の抽象的テンソルにおいて, ラインと交差するラインは Kronecker のデルタになる. したがって,  の係数は

$$A^{-1} - A^{\coprod^{12} + \prod_{12} + 1} = A^{-1} - A^{2+1} = A^{-1} - A^{3}$$

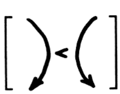
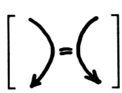
となる. したがって, R 行列は次のようになる:

$$R = (A^{-1} - A^{+3})$$  $$+ A^{-1}$$  $$+ A$$  .

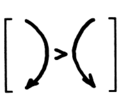
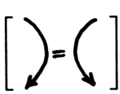
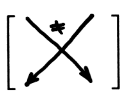
よって,

$$R = A^{+1}\Big\{(A^{-2} - A^{2})$$  $$+ A^{-2}$$  $$+$$  $$\Big\}.$$

これより, 任意の順序がついた添字集合に対し, R 行列は次のように書ける:

$$R_q = (q - q^{-1})$$  $$+ q$$  $$+$$  .

同様にして, 次を得る:

$$\overline{R}_q = (q^{-1} - q)$$  $$+ q^{-1}$$  $$+$$  .

ここで, 次の等式に注意されたい:

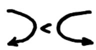
$$R_q - \overline{R}_q = (q - q^{-1})$$ 

$$\therefore \quad R_q - \overline{R}_q = (q - q^{-1})$$ 

ここで, $R_q =$  $, \overline{R}_q =$  とおくと, この式は Homfly 多項式の正則同位版の交差交換の式と類似なものとなる.

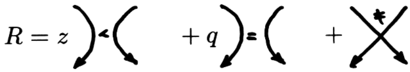
この方向で議論するにあたり, まず次の命題をあげておく.

命題 9.4. R_q と $\overline{R}_q$ は互いに逆行列である. また, 各々は任意の順序づけられた添字集合 $\mathcal{I}$ に対する YBE の解となっている.

注意. $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ の場合については, この命題の証明は既に終わっている. R_q の今の形を用いると, 一般の場合の証明が簡単になる. 粒子の相互作用の観点から, R_q は  の場合に重みがかかり, $\overline{R}_q$ は  の場合にかかるという, 左右の非対称性をこれらの解はもっている. $\mathcal{I} = \{1, 2\}$ の場合, この非対称性は R の式から直ちに見えるわけではないが, 交差から生成と消滅へ抽象テンソルを変形する時間の矢印の選び方から生ずることがわかる. ループの値を $d = -A^2 - A^{-2}$ に調整することにより, この計算が時間の軸の選び方によらないことが確かなものになる. ある非対称性 (左右の非対称性) が, 他の非対称性 (時間と空間の非対称性) の穴埋めをしているのである.

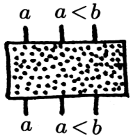
この話の中で, 物理学はどこに現れているのか? 数学は確かに物理学のアイデアから刺激を受け, ここの部分だけでも発展性が見込まれる. 結び目や絡み目の図形表示のようなトポロジー的な相互作用の概念が, 物理的過程の模型を作る糸口になるかもしれない. 絡み目図形, あるいは 3 次元空間内の絡み目が, トポロジー的な統一体として, 粒子や物理的過程を表しているかもしれない. このような推測は, 埋め込まれた (絡んだ) 紐の見方を変えていく. 絡み目図形を, 量子力学とトポロジー的な概念を結びつけることにより, 計算可能な期待値をもつ抽象的なネットワークとして解釈するか, あるいは 3 次元空間への埋め込みとして解釈するか, 2 つの選択の余地がでてくる. 絡み目図形の存在している 3 次元空間は, 物理的観測の行われる空間と同じであるとみなす必要は必ずしもない. 推測から導かれる問題は, 3 次元の (数学的および物理的) 状況が一致するときに, 正しく解釈されるべきである.

命題 9.4 の証明. R_q と $\overline{R}_q$ が互いに逆行列であることは, 直接示せる.

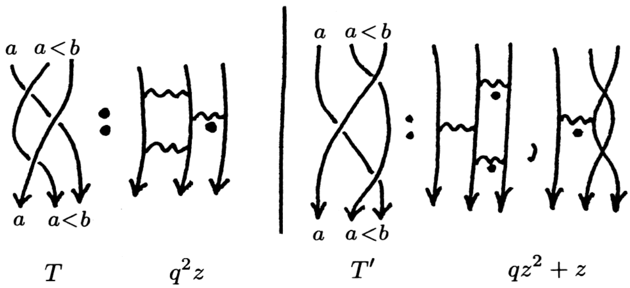


とおき, R が YBE の解となる条件を調べてみよう.

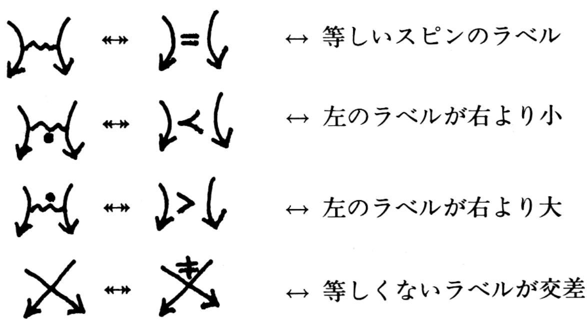
場合 I.



入出力のスピンは上図のものとする. すると, 次のようになる:



ここでは両端のラベルに対し, 可能な相互作用のみを示している. また以下に示すような表記法を用いた:



場合 I に戻る. T に対して, 零でない値を与えるのは 1 個の場合のみで, それは 3 つの切り換えから作られていて, 頂点の重みの積は q^2z となる. T' に対しては, 切り換えのみからなる場合と, 2 つの交差がある場合の, 2 通りがある. この場合, 頂点の重みの積は $qz^2 + z$ である.

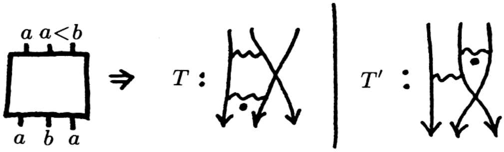
YBE を成り立たせるためには, T と T' から得られる値が一致する必要がある. したがって, $q^2z = qz^2 + z$. すなわち,

$$q^2 = qz + 1, \qquad z = q - q^{-1}.$$

これで場合 I を終る.

他の場合もすべて同様である. R に対する条件は $z = q - q^{-1}$ のみである. ここでは一つの実例をあげた. 他の場合は読者に委ねる.

場合 II.



この場合は, 値が一致することが自動的にわかる.

残りの場合も調べることにより, 命題 9.4 が証明される. □

議論. 添字集合 $\mathcal{I} = \{+1, -1\}$ に対して, この YBE の解が群 $SL(2)$ と密接な関係にあることを既にみてきた.

ここで示した任意の順序づけられた添字集合に対する一般解は, 群 $SL(n)$ に関係し, これらの解は結び目の多項式不変量の模型を構成するのに用いられる. この模型を構成する前に, $SL(2)$ の議論に戻り, その対称性の拡張がどのようにして“量子群”の考えに至るかを示していきたい.

ブラケット, スピンネットと $SL(2)$ に対する量子群

補題 9.2 をめぐる議論において, Jones 多項式に対する YBE の解と模型が, イプシロンの変形, $\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ から生じることをみてきた. $\varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ が $SL(2)$ に対し不変となる基本的なものであるがゆえに, 次のような自然な疑問がわく: **$\tilde{\varepsilon}$ を基本的に不変とするのは, どのような代数構造であるのか?** そこで, 2×2 行列 $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が与えられ, P の成分は結合的だが必ずしも可換ではない代数からなるものとし, 不変性を次のように決める:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} P\tilde{\varepsilon}P^T & = & \tilde{\varepsilon} \\ P^T\tilde{\varepsilon}P & = & \tilde{\varepsilon} \end{array} \right\} \qquad (*)$$

ここで, A は P の成分と可換であるとする. 簡単な計算により, $(*)$ により定まる関係式がわかる.

命題 9.5. $\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^{-1} & 0 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し, 等式

$$\left.\begin{array}{lrcl} 1) & P\tilde{\varepsilon}P^T & = & \tilde{\varepsilon} \\ 1') & P^T\tilde{\varepsilon}P & = & \tilde{\varepsilon} \end{array}\right\} \quad (*)$$

は, 次の枠内の関係式と同値である: ($\sqrt{q} = A$ とすると)

$$\boxed{\begin{array}{ll} ba = qab & dc = qcd \\ ca = qac & db = qbd \\ bc = cb & \\ ad - da = (q^{-1} - q)bc & \\ ad - q^{-1}bc = 1 & \end{array}} \quad (**)$$

証明. $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$.

$$\begin{aligned} P\tilde{\varepsilon}P^T &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -A^{-1}b & Aa \\ -A^{-1}d & Ac \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \\ P\tilde{\varepsilon}P^T &= \begin{bmatrix} -A^{-1}ba + Aab & -A^{-1}bc + Aad \\ -A^{-1}da + Acb & -A^{-1}dc + Acd \end{bmatrix} \\ P^T\tilde{\varepsilon}P &= \begin{bmatrix} -A^{-1}ca + Aac & -A^{-1}cb + Aad \\ -A^{-1}da + Abc & -A^{-1}db + Abd \end{bmatrix} \end{aligned}$$

したがって, $P\tilde{\varepsilon}P^T = \tilde{\varepsilon}$ と $P^T\tilde{\varepsilon}P = \tilde{\varepsilon}$ から直接に得られる関係式は, 次のようになる:

$$\begin{array}{ll} A^{-1}ba = Aab & A^{-1}dc = Acd \\ A^{-1}ca = Aac & A^{-1}db = Abd \\ -A^{-1}bc + Aad = A & -A^{-1}cb + Aad = A \\ -A^{-1}da + Acb = -A^{-1} & -A^{-1}da + Abc = -A^{-1} \end{array}$$

上の式より $bc = cb$ が得られ, 次のような関係式の同値な集合が得られる:

$$\left\{\begin{array}{ll} ba = qab & dc = qcd \\ ca = qac & db = qbd \\ bc = cb & \\ ad - da = (q^{-1} - q)bc & \\ ad - q^{-1}bc = 1 & \end{array}\right.$$

ここで, $q = A^2$. 最後の関係式 $ad - q^{-1}bc = 1$ は, $q = 1$ のとき, $ad - bc = \mathrm{DET}(P) = 1$ という条件になる. 同様に, $q = 1$ のとき, 行列 P の成分が互いに可換であることがわかる. 以上により, 命題 9.5 が証明された. □

注意. P の成分が可換でないことが本質的なのである. すべての成分が可換で自明な行列にならない唯一の場合が, $q = 1$ のときなのである. しかし残念なことに, 可換ではないことにより, P と Q が (**) を満たしていても, PQ が (**) を満たすとは限らない (可換ではない場合, $(PQ)^T \neq Q^T P^T$). したがって, 命題 9.5 により, 群 $SL(2)$ を $\tilde{\varepsilon}$ を不変とする**群** $SL(2)_q$ に自然に拡張することはできない. そのかわりに 関係式 (**) により定義される普遍結合代数を考える. この代数は $SL(2)_q$ で表され, 文献 [DRIN1] において "量子群 $SL(2)_q$" とよばれている.

$SL(2)_q$ はそれ自身群ではないが, Lie 群 $SL(2)$ と直接関係する興味深い構造をもっている. さらに, 代数射になっている余積 $\Delta : SL(2)_q \longrightarrow SL(2)_q \otimes SL(2)_q$ が定義される. まず余積について, それから Lie 代数との関係について議論していく. 量子群の代数構造は R 行列と密接に関係しており, したがって, 対応するトポロジー的な不変量とも関係している. 本節の残りは, この分野について説明する.

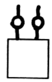
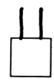
双代数構造と抽象テンソル.

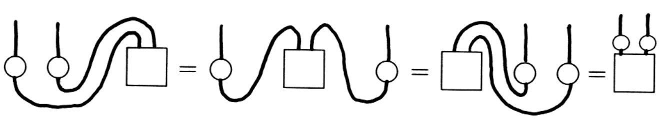
$SL(2)_q$ に対する一般的な構成法から始めよう. 行列 $E = (E^{ij})$ ($\tilde{\varepsilon}$ の類似として) と行列 $P = (P^i_j)$ が与えられたとする. E の成分は P の成分と可換である. 添字 i, j は, あらかじめ与えられている有限な添字集合 $\mathcal{I}$ に属するものとする. すると, 等式 $PEP^T = E$ は, 添字をつけた式では次のようになり, 繰り返し現れる添字について総和をとることになる:

$$P^a_i E^{ij} P^b_j = E^{ab}.$$

抽象テンソルでは,

 $\leftrightarrow P^i_j$,  $\leftrightarrow E^{ij}$, $PEP^T \leftrightarrow$ 

となる. 最後の式は, 関係式において項の順序が重要であるから, 慎重に考えなければいけない. おおまかには, P の成分の積の順序を保てば  =  と書けるであろう. これは, もし E の成分と P の成分が可換であるなら意味をもってくる. また, この仮定のもとでは, 次が成り立つ:

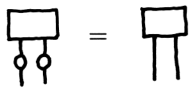


転置した関係式

$$P^T E P = E$$

は, 下に添字をつけた E, つまり $E_{ij} = E^{ij}$ を用いることにより, うまく図式化できる. すなわち,

$$P^T E P = E \leftrightarrow P^i_a E_{ij} P^j_b = E_{ab}$$

$\leftrightarrow$ 

そこで, 関係式 $PEP^T = E$ と $P^T E P = E$ が与えられたとき, そこから生じる普遍代数を $\mathcal{A}(E)$ とする. すなわち, $\mathcal{A}(\tilde{\varepsilon}) = SL(2)_q$ $(\sqrt{q} = A)$. 生成元上で

$$\Delta(P^i_j) = \sum_{k \in \mathcal{I}} P^i_k \otimes P^k_j$$

とし, これを群環上線形的に拡張することにより,

$$\Delta : \mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathcal{A}(E) \otimes \mathcal{A}(E)$$

を定義する. $(SL(2)_q$ の場合, 群環は $\mathbf{C}[A, A^{-1}]$ となる.)

命題 9.6. $\Delta : \mathcal{A}(E) \longrightarrow \mathcal{A}(E) \otimes \mathcal{A}(E)$ は代数射である.

証明. 元 $x, y \in \mathcal{A}(E)$ に対し, $\Delta(x)\Delta(y) = \Delta(xy)$ を示さなければならない. 関係式 $PEP^T = E$ と $P^T E P = E$ において成立することを確かめれば十分である. ここでは, 最初の関係式についてのみ示す. 2 番目については同様にできる. いま, $PEP^T = E$ は $P^a_i E^{ij} P^b_j = E^{ab}$ に対応している. したがって, $\Delta(P^a_i) E^{ij} \Delta(P^b_j) = E^{ab}\iota$ を示さなければならない. ここで, $\iota = 1 \otimes 1$. (成分 E^{ij} はスカラー, すなわち, 任意の成分と可換であること, ι は $\mathcal{A}(E) \otimes \mathcal{A}(E)$ において恒等元であるから, 定義により $\Delta(1) = \iota$ となることに注意する.) ι は $\mathcal{A}(E) \otimes \mathcal{A}(E)$ において恒等元なので, $E^{ab} \leftrightarrow E^{ab}(1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1)$ の対応により, $\mathcal{A}(E)$ をいくつテンソルしても E をその上の行列とみなすことができる. この同一視により, 求めるべき関係式は,

$$\Delta(P^a_i) E^{ij} \Delta(P^b_j) = E^{ab}$$

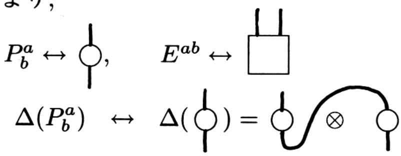
のように表せる. 計算すると, 次のようになる:

$$\begin{aligned}
\Delta(P^a_i) E^{ij} \Delta(P^b_j) &= (P^a_k \otimes P^k_i) E^{ij} (P^b_l \otimes P^l_j) \\
&= (P^a_k P^b_l) \otimes (P^k_i P^l_j) E^{ij} \\
&= (P^a_k P^b_l) \otimes (P^k_i E^{ij} P^l_j) \\
&= (P^a_k P^b_l) \otimes E^{kl}
\end{aligned}$$

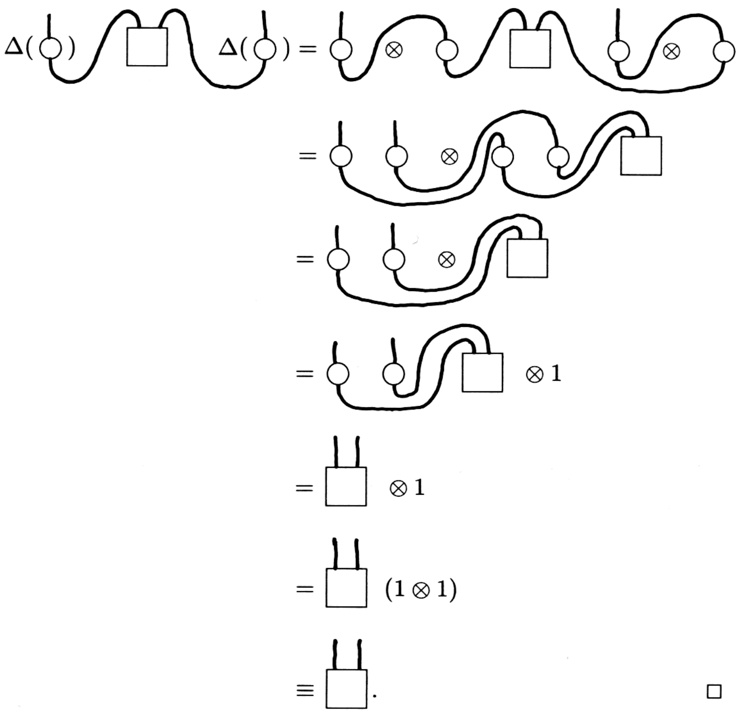
$$= (P_k^a E^{kl} P_l^b) \otimes 1$$
$$= E^{ab} \otimes 1$$
$$= E^{ab}(1 \otimes 1)$$
$$= E^{ab}$$

これで命題 9.6 の証明は完了した. □

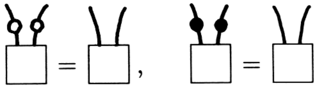
注意. 命題 9.6 の結果は, $\Delta(\mathcal{A}(E)) \subset \mathcal{A}(E) \otimes \mathcal{A}(E)$ もまた E を不変とする代数であることを示している. さらに, この証明の構造は, 抽象テンソル図式により, うまく表現される. つまり,



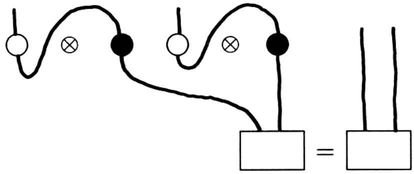
したがって, 次が成り立つ:



テンソル図式では, 結ばれたラインをたどって繰り返される添字を直接みることができ, 計算の構造が明らかになるのである. 特に次のことは直ちにわかる.



とおくと,



言い換えると, もし $PEP^T = E, QEQ^T = E$ とし,

$$(P * Q)^a_b = \sum_k P^a_k \otimes Q^k_b \in \mathcal{A}_P(E) \otimes \mathcal{A}_Q(E)$$

と定義すると, テンソル積の $E \equiv E(1 \otimes 1)$ の解釈のもとで,

$$(P * Q)E(P * Q)^T = E$$

となるということである. テンソル積の定式化は, E を不変にする行列の群に似たものを再構成できる最も単純な構造を与えている. ($P * P^{-1}$ は恒等元ではないので, 群ではない.)

代数 $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\tilde{\varepsilon})$ に戻ると, 次のようになる: $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると,

$$\left\{ \begin{array}{ll} ba = qab & dc = qcd \\ ca = qac & db = qbd \\ bc = cb & \\ ad - da = (q^{-1} - q)bc & \\ ad - q^{-1}bc = 1 & \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \Delta(a) & = & a \otimes a + b \otimes c \\ \Delta(b) & = & a \otimes b + b \otimes d \\ \Delta(c) & = & c \otimes a + d \otimes c \\ \Delta(d) & = & c \otimes b + d \otimes d \end{array} \right\}$$

今までに $\Delta : \mathcal{A}(\tilde{\varepsilon}) \longrightarrow \mathcal{A}(\tilde{\varepsilon}) \otimes \mathcal{A}(\tilde{\varepsilon})$ が代数射であることは示した. 実際, Δ は余結合律を満たす. これは下の図式が可換であることを意味している ($A = \mathcal{A}(\tilde{\varepsilon})$):

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \underset{1 \otimes \Delta}{\longrightarrow} & A \otimes A \otimes A \\ {\scriptstyle \Delta} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle \Delta \otimes 1} \\ A & \overset{\Delta}{\longrightarrow} & A \otimes A \end{array}$$

この構成法において, 以下の式より余結合律を満たすことは明らかである.

$$\begin{aligned} (1 \otimes \Delta)\Delta(P^i_j) &= (1 \otimes \Delta)(P^i_k \otimes P^k_j) \\ &= P^i_k \otimes P^k_l \otimes P^l_j \end{aligned}$$

$$= (\Delta \otimes 1)(P^i_l \otimes P^l_j)$$
$$= (\Delta \otimes 1)\Delta(P^i_j).$$

単元 1 と積 $m: A \otimes A \longrightarrow A$ をもつ結合代数 A において, 余結合律を満たす代数射 $\Delta: A \longrightarrow A \otimes A$ が存在し, A が**余単位射** (co-unit) をもつとき, A を**双代数** (bialgebra) とよぶ. 余単位射とは, 下の図式を可換にする代数射 $\varepsilon: A \longrightarrow \mathbf{C}$ ($\mathbf{C}$ は基礎となる環を意味する) のことである:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon\otimes 1} \\ A & \xrightarrow{1} & A \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \\ {\scriptstyle 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\varepsilon} \\ A & \xrightarrow{1} & A \end{array}$$

$\Delta(P^i_j) = P^i_k \otimes P^k_j$ という条件のもとで, $\varepsilon(P^i_j) = \delta^i_j$ (Kronecker のデルタ) とおくと,

$$\begin{aligned} (\varepsilon \otimes 1)\Delta(P^i_j) &= \varepsilon(P^i_k) \otimes P^k_j \\ &= \delta^i_k \otimes P^k_j \\ &= 1 \otimes P^i_j \\ &= P^i_j. \end{aligned}$$

したがって, $\mathcal{A}(E)$ が双代数であることがわかる.

ある特別な構造 (対合射; antipode) をもつ双代数を **Hopf 代数**とよぶ.

代数 $\mathcal{A}(\tilde{\varepsilon})$ は Hopf 代数の例となっている. この場合, 対合射は, $\gamma(a) = d$, $\gamma(d) = a$, $\gamma(b) = -qb$, $\gamma(c) = -q^{-1}c$ によって定義される写像 $\gamma: \mathcal{A}(\tilde{\varepsilon}) \longrightarrow \mathcal{A}(\tilde{\varepsilon})$ である. この γ を, 和に関しては線形に拡張し, 積に関しては $\gamma(xy) = \gamma(y)\gamma(x)$ (反代数射; anti-homomorphism) と定義する.

ここで,

$$P' = \gamma(P) = \begin{bmatrix} \gamma(a) & \gamma(b) \\ \gamma(c) & \gamma(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{bmatrix}$$

は, 実際には非可換な設定での P の逆行列になっていることに注意されたい:

$$\begin{aligned} PP' &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d & -qb \\ -q^{-1}c & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ad - q^{-1}bc & -qab + ba \\ cd - q^{-1}dc & -qcb + da \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

同様にして, $P'P = I$ も成立する. 一般に, 対合射 $\gamma : A \longrightarrow A$ は逆行列の類似とみなせる. その抽象的な定義は, 次の図式を可換にするものとして定める:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A & \overset{\gamma \otimes 1}{\underset{1 \otimes \gamma}{\rightrightarrows}} & A \otimes A \\ \downarrow \varepsilon & & & & m \downarrow \\ \mathbf{C} & & \xrightarrow{\quad\quad \eta \quad\quad} & & A \end{array}$$

ここで, ε は余単位射, η は単位射である. $\mathcal{O}(E)$ の場合,

$$\varepsilon(P^i_j) = \delta^i_j, \qquad \eta(\delta^i_j) = \delta^i_j$$

となる. したがって, $\mathcal{A}(E)$ が Hopf 代数になる条件は,

$$\gamma(P^i_k)P^k_j = \delta^i_j, \qquad P^i_k\gamma(P^k_j) = \delta^i_j$$

である. これは, P と $\gamma(P)$ が互いに逆行列であることと同じである.

注意. 代数 $\mathcal{A}(\tilde{\varepsilon})$ は, 群 $SL(2, \mathbf{C})$ 上の関数環の変形である. 任意の群 G に対し, $F(G)$ を関数 $f : G \longrightarrow \mathbf{C}$ 全体の集合とする. $m : F(G) \otimes F(G) \longrightarrow F(G)$ を

$$m(f \otimes g)(x) = f(x)g(x)$$

で, $\Delta : F(G) \longrightarrow F(G) \otimes F(G)$ を

$$\Delta(f)(x \otimes y) = f(xy)$$

で定義する. さらに, $\gamma : F(G) \longrightarrow F(G)$ を $\gamma(f)(x) = f(x^{-1})$ で定義し, $\varepsilon : F(G) \longrightarrow \mathbf{C}$ を $\varepsilon(f) = f(e)$ (e は G の単位元) と定義する. また, 任意の $z \in \mathbf{C}$ について, $\eta : \mathbf{C} \longrightarrow G$ を $\eta(z) = e$ によって定義する. これは, $F(G)$ に Hopf 代数の構造を与えていることになる.

ところで $F(SL(2, \mathbf{C}))$ (または, 任意の Lie 群 G について, $F(G)$) は, (微分をとることにより) $SL(2, \mathbf{C})$ の Lie 代数上の関数を含んでいる. そこで $F_q(SL(2)) \equiv SL(2)_q$ が $SL(2)$ の Lie 代数の変形における関数に関係していることが期待される. 実際, $\mathcal{A}(\tilde{\varepsilon}) = F_q(SL(2))$ と $SL(2)$ における Lie 代数の関係を導くことができるのである.

$SL(2, \mathbf{C})$ における Lie 代数の変形.

$SL(2, \mathbf{C})$ における Lie 代数は, 以下のような行列 M からなる:

$$e^M \in SL(2, \mathbf{C}).$$

$\mathrm{tr}(M)$ を行列 M のトレースとすると, $\mathrm{DET}(\varepsilon^M) = \varepsilon^{\mathrm{tr}(M)}$ より,

$$\left[\text{e.g., DET}\exp\left(\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \mu\end{bmatrix}\right) = \text{DET}\begin{bmatrix}e^{\lambda} & 0\\ 0 & e^{\mu}\end{bmatrix} = e^{\lambda}e^{\mu} = e^{\lambda+\mu}\right]$$

条件 $\text{DET}(e^M) = 1$ が条件 $\text{tr}(M) = 0$ に対応していることがわかる．ここで, $s\ell_2 = \{M|\,\text{tr}(M) = 0\}$ とおく．これが $SL(2)$ における Lie 代数であり, 次の行列により生成される:

$$H = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix},\quad X^+ = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad X^- = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$s\ell_2 = \left\{\begin{bmatrix}r & s\\ t & -r\end{bmatrix} = rH + sX^+ + tX^-\right\}.$$

$[A, B] = AB - BA$ という表記法のもとで, 次のような基本的な関係式がある:

$$[H, X^+] = 2X^+,\qquad [H, X^-] = -2X^-,\qquad [X^+, X^-] = H.$$

ここで, Lie 代数 (およびそのテンソル積) の変形を定義しよう．それは, $s\ell_2$ の**量子包絡環** (the quantum universal enveloping algebra) とよばれ, $\mathcal{U}_q(s\ell_2)$ で表される．これは, 文字 H, X^+, X^- によって生成される抽象代数で, 次の関係式をもつ:

$$[H, X^+] = 2X^+,\qquad [H, X^-] = -2X^-,\qquad [X^+, X^-] = \frac{\sinh(\hbar/2)H}{\sinh(\hbar/2)}.$$

ここで, $q = e^{\hbar/2}$ であり, よく知られた変形のパラメータである．余積 $\Delta : \mathcal{U}_q \longrightarrow \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q$ ($\mathcal{U}_q \equiv \mathcal{U}_q(s\ell_2)$) を以下の式で定義する:

$$\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H$$

$$\Delta(X^{\pm}) = X^{\pm} \otimes e^{-(\hbar/4)H} + e^{(\hbar/4)H} \otimes X^{\pm}.$$

$\mathcal{U}_q$ が双代数になることは, 直接に確かめられる (実際には Hopf 代数になる)．しかし, $\mathcal{U}_q$ が $\mathcal{A}(\tilde{\varepsilon}) = SL(2)_q$ であることはわかりにくいが, 双対をとることにより, 明らかになる: $\mathcal{U}_q$ の双対になる代数を考えよう．これは,

$$\mathcal{U}_q^* = \{\rho : \mathcal{U}_q \longrightarrow \mathbf{C}[\hbar, \hbar^{-1}]\}$$

である．$\mathcal{U}_q^*$ の積は $\mathcal{U}_q$ の余積を用いて定義され, $\mathcal{U}_q^*$ の余積は $\mathcal{U}_q$ の積を用いて定義されることに注意されたい．すなわち,

$$\rho, \rho' :\ \mathcal{U}_q \longrightarrow \mathbf{C}[\hbar, \hbar^{-1}]$$

について, $\rho\rho'(\alpha) = \rho \otimes \rho'(\Delta(\alpha))$ と定義する．また, $\Delta(\rho) : \mathcal{U}_q \otimes \mathcal{U}_q \longrightarrow \mathbf{C}[\hbar, \hbar^{-1}]$ を,

$$\Delta(\rho)(\alpha \otimes \beta) = \rho(\alpha\beta)$$

で定義する．ここで, $\alpha\beta$ は $\mathcal{U}_q$ における積を意味する．

ここで, 次のような $\mathcal{U}_q$ の表現 $\tilde{\rho}:\mathcal{U}_q \longrightarrow s\ell_2$ を考えよう:

$$\tilde{\rho}(H) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\rho}(X^+) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\rho}(X^-) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

言い換えると, $\mathcal{U}_q$ の生成元の各々を, $s\ell_2$ の "もとの行列" に移すのである.

$\tilde{\rho}$ が $\mathcal{U}_q$ の代数としての表現になっていることは, 容易に示される. 次のことに注意されたい:

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{\hbar}{2}\tilde{\rho}(H)\right) &= \sinh\left(\frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \frac{\hbar}{2}\left\{\begin{bmatrix} e^{\hbar/2} & 0 \\ 0 & e^{-\hbar/2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e^{-\hbar/2} & 0 \\ 0 & e^{\hbar/2} \end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix} \sinh(\hbar/2) & 0 \\ 0 & -\sinh(\hbar/2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{\sinh((\hbar/2)\tilde{\rho}(H))}{\sinh(\hbar/2)} = \tilde{\rho}(H).$$

この $\tilde{\rho}$ を, $\mathcal{U}_q$ 上の写像の行列として次のように書くことができる:

$$\tilde{\rho} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

したがって, 次のようになる:

$$\begin{aligned} &a(H) = 1, && a(X^+) = 0, && a(X^-) = 0 \\ &b(H) = 0, && b(X^+) = 1, && b(X^-) = 0 \\ &c(H) = 0, && c(X^+) = 0, && c(X^-) = 1 \\ &d(H) = -1, && d(X^+) = 0, && d(X^-) = 0. \end{aligned}$$

補題 9.7. 上にあげた a, b, c, d によって生成される双 (Hopf) 代数は, 双代数 $\mathcal{A}(\tilde{\varepsilon}) = F_q(SL(2))$ と同型である. したがって, $F_q(SL(2)) \simeq \mathcal{U}_q^*$. ここで, $q = e^{\hbar/2}$ である.

既に $\mathcal{U}_q^*$ の積と余積については述べた. $\mathcal{U}_q$ の余単位射は, $\varepsilon(1) = 1, \varepsilon(H) = \varepsilon(X^{\pm}) = 0$ で与えられる. 対合射は,

$$S(H) = -H, \qquad S(X^{\pm}) = -e^{-(\hbar/4)H} X^{\pm} e^{(\hbar/4)H}$$

により定義される. 補題の証明は, 双代数の構造については確かめるが, Hopf 代数であることは, 読者にまかせることにする.

証明. いくつか主だったことを確かめてみる. まず $ab \in \mathcal{U}_q^*$ を考える. 定義より, $x \in \mathcal{U}_q$ に対して, $ab(x) = a \otimes b(\Delta(x))$ だから,

$$
\begin{aligned}
ab(H) &= a \otimes b(H \otimes 1 + 1 \otimes H) \\
\Rightarrow\ ab(H) &= 0. \\
ab(X^+) &= a \otimes b(X^+ \otimes e^{(\hbar/4)H} + e^{-(\hbar/4)H} \otimes X^+) \\
&= 0 + a(e^{-(\hbar/4)H}) \\
&= e^{-(\hbar/4)}.
\end{aligned}
$$

また,

$$ba(X^+) = e^{(\hbar/4)}.$$

したがって, $ba = e^{+(\hbar/2)}ab = qab$.

次に $\Delta(a)$ を調べてみる: $\Delta(a)(x \otimes y) = a(xy)$ である. したがって, $\Delta(a)(X^+ \otimes X^-) = a(X^+X^-)$. しかし一般に, $a(xy)$ は行列の積 $\rho(x)\rho(y)$ の (1,1) 成分であるから, 以下のことがわかる.

$$\rho(x) = \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\rho(x)\rho(y) &= \begin{bmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(y) & b(y) \\ c(y) & d(y) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a(x)a(y) + b(x)c(y) & a(x)b(y) + b(x)d(y) \\ c(x)a(y) + d(x)c(y) & c(x)b(y) + d(x)d(y) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
&\Delta(a)(x \otimes y) = a(x)a(y) + b(x)c(y) = (a \otimes a + b \otimes c)(x \otimes y) \\
&\Longrightarrow \Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, \quad \Delta(b) \;=\; a \otimes b + b \otimes d, \\
&\qquad\quad \Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta(d) \;=\; c \otimes b + d \otimes d.
\end{aligned}
$$

積に関する他のことは証明は容易であるので, 読者に委ねる. これで補題の証明を終る. □

${SL(2)_q}^*$ を

$$\mathcal{U}_q(s\ell_2): \left\{ \begin{array}{l} [H, X^+] = 2X^+ \\ [H, X^-] = -2X^- \\ [X^+, X^-] = \sinh(\hbar/2)H/\sinh(\hbar/2) \\ (\Delta \text{ は上のもの}) \end{array} \right\}$$

の双対としてみることは, この代数が $SL(2)$ の Lie 代数の変形としてみることができるので, 重要なのである.

$SL(2)$ (および, $s\ell_2$) の表現論と同様な方法で量子群の表現論を調べることができる. さらに, **普遍 $\boldsymbol{R}$ 行列** (a universal R-matrix; Yang-Baxter 方程式) の構造は, Lie 代数の定式化により明らかになる. すると, この普遍な解により, 数多くの選んだ表現に依存する解を記述できる. また, 基本的な表現 ($\tilde{\rho}$) から, 本節でブラケットに対して得た R 行列を再構成できる.

注釈. 本節は,「真空」期待値としてブラケットをみることから, この模型の内部対称性により, 量子群 $SL(2)_q$, さらに量子包絡環 $\mathcal{U}_q(s\ell_2)$ へと進んできた. この代数の構造は, ブラケットのアイデア



と位相不変性の条件, そして基本的な量子力学のアイデアを組み合わせることによって自然に得られる. ブラケットを「真空」期待値とみなすという, いわば離散化した「トポロジー的な場の理論」の枠組, および対称性の一般化は, 初等的計算を用いた理論の構成と同様に避けて通ることはできない.

10 節　普遍 R 行列の方法論

まず最初に, R 行列を代数的に表してみよう. 双代数 $\mathcal{U}$ が与えられたと仮定する. $R \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ に対して, $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ の **3 つの**元

$$R_{12}, R_{13}, R_{23} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$$

を, $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$の添字に現れる数字の因子には R のテンソル因子を対応させ, 残りの因子には 1 を対応させることによって定義できる. すなわち,

$$R = \sum_s e_s \otimes e^s \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$$

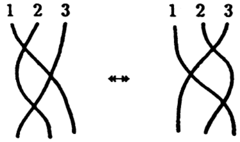
とすると,

$$R_{12} = \sum_s e_s \otimes e^s \otimes 1,$$

$$R_{13} = \sum_s e_s \otimes 1 \otimes e^s,$$

$$R_{23} = \sum_s 1 \otimes e_s \otimes e^s$$

となる. これらに対して, Yang-Baxter 方程式 (YBE) を適当に解釈すると, 次のようになる.



$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$$

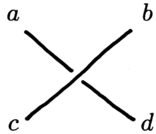
ここで, ベクトル空間 (または加群) $\mathcal{U}$ は上の図のラインに割り当てられている.

結び目理論からみた解釈と関係づけるため, この YBE の代数的な形を**置換を用いて構成しなければならない.** この際, 結び目理論では, $R \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$の行列表現を用いることに注意しよう. ここで $\rho(R)$ をそのような表現とすると, $\rho(R) = (\rho^{ab}_{cd})$ と書ける. ただし, a **と** c **は** $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$**の 1 番目の因子に対応する添字で,** b **と** d **は** $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ **の 2 番目の因子に対応する添字を表す.** これは, 代数においては自然な約束である.

さて, R_{cd}^{ab} を次の式によって定義する:

$$R_{cd}^{ab} = \rho_{dc}^{ab}.$$

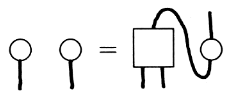
(下側の添字が入れ換わっている.) すると, 次の図式を得る:

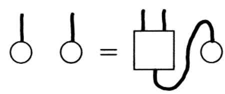


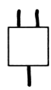
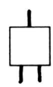
$\longleftrightarrow R_{cd}^{ab}.$

こうして要請されたように, 交差しているラインは, それぞれ添字を保っており, 等式 $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$ は YBE のよく知られた添字の形に書き換えられる.

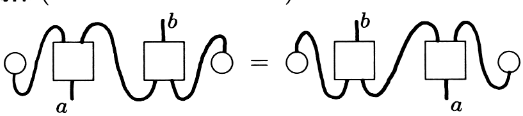
さて, YBE のこの代数的な表し方の特別な点は, 解を導く一般的な代数的条件を与えることが可能であるという点である. このことを図で見るために, 代数における $\{e_s\}$ と $\{e^s\}$ の積が既知であるものとする.

$e_s e_t = m_{st}^i e_i \longleftrightarrow$ ,

$e^s e^t = \mu_i^{st} e^i \longleftrightarrow$ 

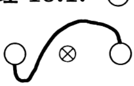
ここで, 抽象テンソル ,  は, それぞれ e_s, e^s に対応する.  と  が可換であると仮定することはできないが, 係数テンソル ,  はすべてのものと可換である.

さらに, **交換関係** (commutation relation)

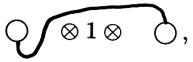


$$e_s \mu_a^{si} m_{it}^b e^t = e^t m_{ti}^b \mu_a^{is} e_s$$

を仮定する. この等式を, **Yang-Baxter の交換関係** という.

定理 10.1.  と  を Yang-Baxter の交換関係を満たす抽象テンソルとする. $R =$  とし, さらに

$R_{12} =$  $\otimes 1$,

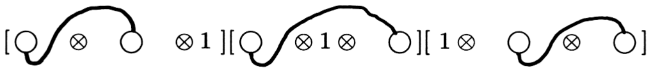
$R_{13} =$ ,

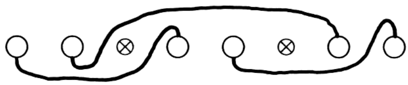
$R_{23} = 1 \otimes$ 

とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

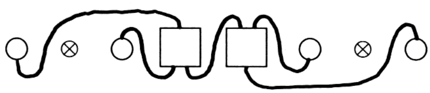
$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

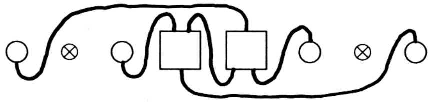
証明.

$R_{12}R_{13}R_{23} =$ 

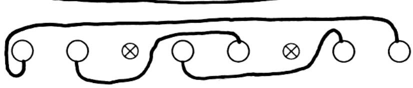
$=$ 

$=$ 

$=$ 

$=$  (Y-B 交換関係)

$=$ 

$=$ 

$= R_{23}R_{13}R_{12}.$ □

この定理の単純で組合せ的なパターンは, Lie 代数と Hopf 代数の結び目理論とYBE との関係を制御している.

$\mathcal{U}$を, 余積$\Delta : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ をもつ双代数であると仮定する. さらに, $\{e_s\}, \{e^s\} \subset \mathcal{U}$ について,

$$e_s e_t = m^i_{st} e_i, \qquad e^s e^t = \mu^{st}_i e^i$$

であり, $\{e_s\}, \{e^s\}$ により生成される部分代数 A と $\widehat{A}$ は, これらの代数の積構造と余積構造が入れ換わるという意味で双対であると仮定する. つまり,

$$\Delta(e_i) = \mu_i^{st} e_s \otimes e_t, \qquad \Delta(e^i) = m_{st}^i e^s \otimes e^t.$$

さて, $R = \sum_s e_s \otimes e^s$ は, 等式

$$R\Delta = \Delta' R \tag{$*$}$$

を満たすと仮定する. ただし, $\Delta' = \sigma \circ \Delta$ は Δ と因子を交換する写像 $\sigma : \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ との合成を表す.

命題 10.2. 上の状況の下で, 等式 $R\Delta = \Delta' R$ は Y-B 交換関係と同値である.

証明.

$$\begin{aligned} R\Delta(e_t) &= (e_s \otimes e^s)(\mu_t^{ij} e_i \otimes e_j) \\ &= \mu_t^{ij} e_s e_i \otimes e^s e_j \\ &= \mu_t^{ij} m_{si}^l e_l \otimes e^s e_j \\ &= e_l \otimes e^s m_{si}^l \mu_t^{ij} e_j. \\ \Delta'(e_t) R &= (\mu_t^{ij} e_j \otimes e_i)(e_s \otimes e^s) \\ &= \mu_t^{ij} e_j e_s \otimes e_i e^s \\ &= \mu_t^{ij} m_{js}^l e_l \otimes e_i e^s \\ &= e_l \otimes e_i \mu_t^{ij} m_{js}^l e^s. \end{aligned}$$

$\{e_l\}$ は A の基底なので, これらから次の等式を得る:

$$e^s m_{si}^l \mu_t^{ij} e_j = e_i \mu_t^{ij} m_{js}^l e^s.$$

これは Y-B 交換関係であり, 証明を終る. □

注意. こういった双対パターンをもつ $\mathcal{U} \supset A, \widehat{A}$ という状況は, Lie 代数に付随した量子群の性質の特徴的な部分である.

$\mathcal{U}_q(s\ell_2)$ の場合, ($A, \widehat{A}$ に対応する) 代数は, それぞれ, H, X^+ と H, X^- によって生成される Borel 部分代数である. $R = \sum_s e_s \otimes e^s$ は, これらの元の巾級数を含む特別な形になる. 定理 10.1 の構成と等式 $R\Delta = \Delta' R$ との関係については Drinfeld [DRIN1] に負っており, Hopf 代数の **量子二重構成法 (quantum double construction)** とよばれている†.

$\mathcal{U}_q(s\ell_2)$ に関する普遍 R 行列がどのように導かれるのか, 詳しいことは述べないが, 最終的な結果は示しておこう! これが Drinfeld の式である:

$$R = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k Q_k(\hbar) \left\{ \exp \frac{\hbar}{4} [H \otimes H + k(H \otimes 1 - 1 \otimes H)] \right\} (X^+)^k \otimes (X^-)^k$$

---

†訳注: その後の発展に関しては, 例えば [MAJ2]*, [DOI]* を参照されたい.

ただし, $Q_k(\hbar) = e^{-k\hbar/2}\prod_{r=1}^{k}(e^{\hbar}-1)/(e^{r\hbar}-1)$. この状況では, 問題の代数は無限次元であることに注意する. したがって, 和

$$R = \sum_s e_s \otimes e^s$$

は形式巾級数となる. (また, 厳密な理論は, これらの代数の完備化を含んでいる.)

Faddeev-Reshetikhin-Takhtajan 構成法

等式 $R\Delta = \Delta' R$ は, それ自身考察するに値する. というのも, 不変量により $SL(2)$ 量子群の構成の一般化が導かれるからである. この一般化を導くため, $\mathcal{U}$ は $R\Delta = \Delta' R$ なる R を含むと仮定し, $T : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{M}$ を $\mathcal{U}$ の行列表現とする. $T(u) = (t^i_j(u))$ と書くことにすると, $t^i_j : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbf{C}$ とみなせて, $t^i_j \in \mathcal{U}^*$となる (第 9 節の構成と比較せよ). $\mathcal{U}^*$ における余積は, $T(uv) = T(u)T(v)$ より,

$$\Delta(t^i_j)(u \otimes v) = t^i_j(uv) = \sum_k t^i_k(u)t^k_j(v)$$

で与えられる. したがって, $\Delta(t^i_j) = t^i_k \otimes t^k_j$ である.

このことから, $R\Delta = \Delta' R$ を$\mathcal{U}^*$に関する等式に書き換えることができる:

$$R^{ij}_{kl} = t^i_k \otimes t^j_l(R) \qquad \text{(代数における習慣)}$$

補題. $R\Delta = \Delta' R$ は, 等式 $\boxed{RT_1T_2 = T_2T_1R}$ に対応する. ただし,

$$R = (R^{ij}_{kl}), \qquad T = (t^i_j), \qquad T_1 = T \otimes 1, \qquad T_2 = 1 \otimes T.$$

証明.

$$\begin{aligned} R\Delta(X):\quad & t^i_k \otimes t^j_l(R\Delta(X)) \\ &= \sum_{m,n} t^i_m \otimes t^j_n(R)t^m_k \otimes t^n_l(\Delta(X)) \\ &= \sum_{m,n} R^{ij}_{mn}t^m_k t^n_l(X) \qquad (\mathcal{U}^*\text{における積の定義}) \\ \Delta'(X)R:\quad & t^i_k \otimes t^j_l(\Delta'(X)R) \\ &= \sum_{m,n} t^j_n \otimes t^i_m(\Delta(X))t^m_k \otimes t^n_l(R) \\ &= \sum_{m,n} t^j_n t^i_m(X)R^{mn}_{kl} \end{aligned}$$

したがって, $R\Delta(X) = \Delta'(X)R$ より, 次式が得られる:

$$\sum_{m,n} R^{ij}_{mn} t^m_k t^n_l = \sum_{m,n} t^j_n t^i_m R^{mn}_{kl}.$$

ここで $T = (t^i_j)$, $T_1 = T \otimes 1$, $T_2 = 1 \otimes T$ とおくと, 上の等式は,

$$\boxed{RT_1T_2 = T_2T_1R}$$

となり, 補題が示された. □

Faddeev, Reshetikhin, Takhtajan [FRT] は YBE の解から双代数を構成するための出発点として, 等式 $RT_1T_2 = T_2T_1R$ を採用した. これを, **FRT 構成法**とよぶことにする. FRT 構成法では, 与えられた YBE の解から始め, 生成元 $\{t^i_j\}$, 関係式 $T_2T_1R = RT_1T_2$ をもつ双代数 $A(R)$ を付随させる. 余積は $\Delta(t^i_j) = \sum_k t^i_k \otimes t^k_j$ により与えられる.

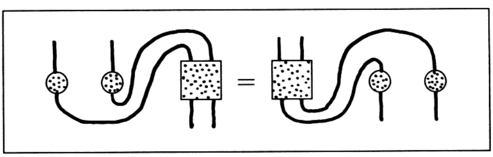
さて, FRT 構成法の厳密な計算をするため, 結び目理論用の R行列を仮定する. つまり, 上の議論の中の R^{ab}_{cd} を R^{ab}_{dc} に置き換える. すると, FRT 構成法の定義式が次のようになるのは明らかである:

$$\boxed{RT_1T_2 = T_1T_2R}$$

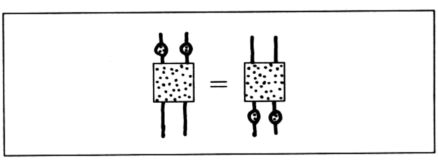
添字のついた成分で書くと, FRT 関係式は次のように書ける:

$$\boxed{T^a_i T^b_j R^{ij}_{cd} = R^{ab}_{ij} T^i_c T^j_d}$$

 を T^i_j,  を R で表すと, これらの関係式は次のように表される:

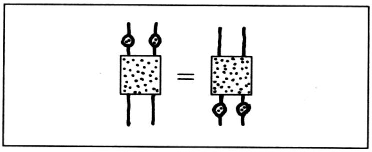


R^{ij}_{kl} は代数の生成元 T^a_b と可換であることを仮定しているので, FRT 構成法は, 次のように書き直される:

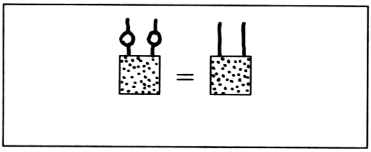


与えられた R 行列に対し, この代数を $F(R)$ で表す. 第 9 節で議論した不変量の場合 (代数は $A(E)$) とまったく同様の理由から, $F(R)$ は双代数となる. $A(E)$ と

$F(R)$ の類似は図式的に明らかである.

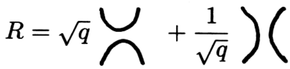


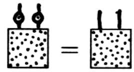
$\leftrightarrow \quad F(R)$

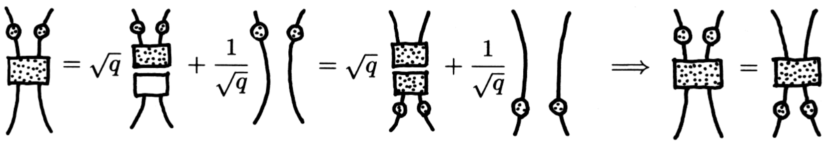


$\leftrightarrow \quad A(E)$

$SL(2)_q$ に対する R 行列を直接調べることにより, これらの構成法の関係がわかる. 第9節から, $SL(2)_q = A(E)$ (ただし, $E = \widetilde{\varepsilon} = \sqrt{-1}\,\varepsilon_{ab} q^{\varepsilon_{ab}/2}$) であり, 結び目理論の立場からは R 行列



が付随していたことを思い出そう. すると,  を満たす任意の行列  は自動的に次の $F(R)$ の関係式を満たすことが直ちにわかる:



したがって, $F(R)$ は商代数として $A(R)$ をもつ.

実際, 直接調べることにより, $F(R)$ は生成元 a, b, c, d と次の関係式をもつ代数に同型であることがわかる:

$$
\begin{array}{|cc|}
\hline
ba = qab & da = qad \\
db = qbd & ca = qac \\
bc = cb & \\
ad - bc = (q^{-1} - q)bc & \\
\hline
\end{array}
$$

$F(R)$ の中心は元 $(ad - q^{-1}bc)$ により生成され,

$$A(E) \simeq F(R)/\langle ad - q^{-1}bc \rangle$$

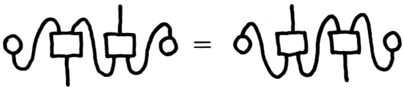
である. ただし, $\langle\cdot\rangle$ は関係式・により生成されるイデアルを表す. どの場合においても, FRT 構成法は, Hopf 代数 (または双代数) を YBE の解と直接関連づける

方法を示しており, とても重要である.

量子二重構成法により, ある種の双代数がその内部構造から YBE の解を自然に与えることがわかる. 付随した双代数 (量子群) は, これらの解の構造や位相不変量に関係する構造を理解するために使われる, 豊かな構造を備えている.

Hopf 代数と絡み目不変量

Hopf 代数の構造のどの部分が絡み目不変量の構成と関係があるのか, まだ明らかではない. Drinfeld の二重構成法が YBE の形式的な解を与えることは, 余積を使わずに, "Yang-Baxter 交換関係"



を認めることによって示すことができた. 対合射 $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ はまったく関係ないようにみえる. だがそうではない! **正確にいうと, Drinfeld の構成法は, 「真空」期待値モデルを代数の言葉で置き換えたようなものである.** このことを確かめるため, Drinfeld の構成法を復習し, その表現の形を調べよう. 積に関する生成元として, $\{e_0, e_1, \cdots, e_n\}$ と $\{e^0, e^1, \cdots, e^n\}$ をもつ代数 $\mathcal{A}$ が与えられているとする. (代数が有限次元でないときは, 形式巾級数を扱うために同様の定式化が用いられる.) $\mathcal{A}$ において, $e_0 = e^0 = 1$ (積に関する単位元) と仮定し, 積に関して次のような関係があるとする:

$$e_i e_j = m_{ij}^k e_k, \qquad e^i e^j = \mu_k^{ij} e^k.$$

(総和の記号 $\sum$ は省略されている.) さらに, 次のような余積 $\Delta : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ を仮定する:

$$\Delta(e_k) = \mu_k^{ij} e_i \otimes e_j, \qquad \Delta(e^k) = m_{ij}^k e^i \otimes e^j.$$

つまり, 上または下に添字のついた元を要素とする代数は, 余積がもう一方の積になっているという意味で, 双代数として双対になっている. $\rho = e_s \otimes e^s$ とし, ρ は $\rho\Delta = \Delta'\rho$ の形の Yang-Baxter 交換関係を満たすと仮定する. ただし, Δ' はΔと $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ の交換写像の合成とする. これらの仮定のもとで, ρ は YBE の代数的な式 $\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23} = \rho_{23}\rho_{13}\rho_{12}$ を満たす (定理 10.1). さらに, 次の式を満たす**対合射**となる反自己同型写像 $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ が存在するとする:

$$m((1 \otimes \gamma)\Delta(e_k)) = m((\gamma \otimes 1)\Delta(e^k)) = \begin{cases} 1 & (k = 0) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

(この式において, e^kと e_kを入れ換えても成り立つ.)

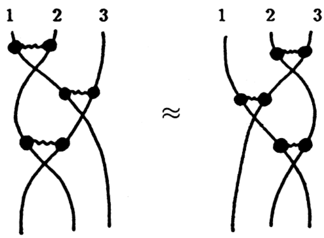
さて, $\mathbf{rep}:\mathcal{A}\longrightarrow\mathbf{M}$ とする. ただし, $\mathbf{M}$ は (可換成分をもつ) 行列の代数である. $\mathcal{A}$ の元 ● について, $\mathbf{rep}(\bullet)=$  . つまり, ● の表現は上と下に行列の添字がついたものとなる. 表現について考えるために, e_k, e^l の添字 k, l をなくすと便利である. そこで,  により $\rho=e_k\otimes e^k$ を表すことにする. ここで, 図の波線は, ρ を構成する元の積全体にわたる和を表す. そうすると, 次の式を得る:

$\mathbf{rep}($  $)=$ 

また, R 行列は,

$R=$ 

により定義する. 下側のラインの交差を, いかにして R と YBE



$$\rho_{12}\rho_{13}\rho_{23}=\rho_{23}\rho_{13}\rho_{12}$$

の結び目理論的な解とを結びつけるのかについて, 再び注意する.

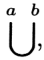
結び目理論の目的を考えて, R に (垂直方向の時間軸に関して) “A”型の交差点を対応させる:

$R=$  $\longleftrightarrow$  $\uparrow t$

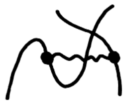
すると, R^{-1} は逆の交差点に対応し, **捻りの関係により** R^{-1} は次の形で与えられる:

$R^{-1}=$  $=$ 

ただし, R^{-1}を定義するために, R の添字を上げたり下げたりすることは, 生成と消滅の行列

$M^{ab}\longleftrightarrow$ , 　　$M_{ab}\longleftrightarrow$ 

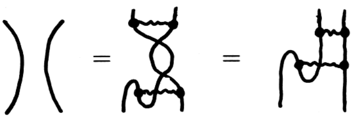
を用いて行われている. このような約束のもとで, 極大と極小とを保ったままで R^{-1} の図を変形することができる. よって,

$R^{-1} =$ 

となる. このことから, 写像 $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ は次のようにならなければならない:

$\mathbf{rep}(\gamma(\bullet)) =$ 

そこで, **対合射 $\gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ は上のように表現されると仮定する.** すると, 等式 $RR^{-1} = I$ は次のようになる:



言い換えると, 代数上は, $\sum_{s,t}(e_s \otimes e^s)(\gamma(e_t) \otimes e^t) = 1 \otimes 1$ でなければならない.

γ を $\mathcal{A}$ の対合射とするとき, 次の等式が成り立つ:

$$
\begin{aligned}
(e_s \otimes e^s)(\gamma(e_t) \otimes e^t) &= e_s\gamma(e_t) \otimes e^s e^t \\
&= e_s\gamma(e_t) \otimes \mu_l^{st} e^l \\
&= \mu_l^{st} e_s\gamma(e_t) \otimes e^l \\
&= m(1 \otimes \gamma)(\mu_l^{st} e_s \otimes e_t) \otimes e^l \\
&= m((1 \otimes \gamma)\Delta(e_l)) \otimes e_l \qquad \text{(余積に関する仮定)} \\
&= 1 \otimes 1 \qquad \text{(対合射の定義)}
\end{aligned}
$$

以上のことより, 次の定理を示したことになる:

定理 10.3. $\mathcal{A}$ を Drinfeld の構成法の仮定を満たす Hopf 代数とし, $\mathcal{A}$ は対合射が与えられた行列 M_{ab}, M^{ab} (互いに逆行列) によって次のように表現されているとする:

$\mathbf{rep}(\gamma(\bullet)) =$ 

このとき, 行列 $R, R^{-1}, M_{ab}, M^{ab}$は, 本節で詳しく述べられている「真空」期待値モデルを通して, 絡み目の正則同位のもとでの不変量を構成するための条件を満たす. □

Hopf 代数の形式化により, 正則同位のもとでの不変量を得るための抽象テンソ

ルに対する代数的なモデルを得る. この意味において, Drinfeld の構成法は普遍的な絡み目の不変量を作り出す ([LK26],[LAW1] と比較されたい)[†] .

準三角 Hopf 代数の定義へのミニガイド

Drinfeld [DRIN1] は, 二重構成法の形式化を**準三角 Hopf 代数**の概念に一般化した. Hopf 代数 $\mathcal{A}$ が準三角であるとは, $\mathcal{A}$ が次の式を満たす元 Rを含むときにいう:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad R\Delta = \Delta' R,\\
&(2) \quad R_{13}R_{23} = (\Delta \otimes 1)(R),\\
&(3) \quad R_{12}R_{13} = (1 \otimes \Delta)(R).
\end{aligned}
$$

この (1) の背景については既に議論した. (2) と (3) について考えるため, 二重構成法を議論したときと同じ記号のもとで話を進める. すると,

$$
\begin{aligned}
R_{13}R_{23} &= e_s \otimes e_t \otimes e^s e^t\\
&= e_s \otimes e_t \otimes \mu_i^{st} e^i\\
&= \mu_i^{st} e_s \otimes e_t \otimes e^i\\
&= \Delta(e_i) \otimes e^i.\\
\therefore\ R_{13}R_{23} &= (\Delta \otimes 1)(R).
\end{aligned}
$$

同様にして,

$$R_{12}R_{13} \quad = \quad (1 \otimes \Delta)(R).$$

準三角の概念は, 二重構成法の双対構造を直接的でなく, 公理的にしている. すべての主な性質は, 添字を用いることなく証明できる. 例えば $\mathcal{A}$ が準三角ならば $(\Delta' \otimes 1)(R) = R_{23}R_{13}$ となることは, $(\Delta \otimes 1)(R) = R_{13}R_{23}$ の 2 つの因子を入れ換えることから得られる. これより次のような計算ができる:

$$
\begin{aligned}
R_{12}R_{13}R_{23} &= R_{12}(\Delta \otimes 1)(R)\\
&= (\Delta' \otimes 1)(R)R_{12} \quad (R\Delta = \Delta' R)\\
&= R_{23}R_{13}R_{12}.
\end{aligned}
$$

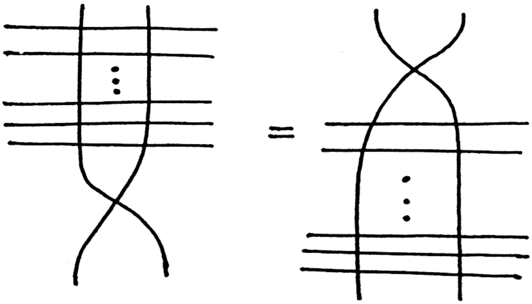
よって, R は YBE を満たすことがわかる. $\mathcal{A}$ が準三角のとき, $R^{-1} = (1 \otimes \gamma)R$ となることも同様に示される.

統計力学と FRT 構成法

YBE はもともと, 次数 4 の項点に付随する R 行列が格子点に対する行変換行列

[†]訳注: この点に関しては, Drinfeld [DRIN3]* の仕事を無視するわけにはいかない.

と可換になるための条件を求めるという統計力学の問題の中に現われた [BA1]. 図形的に, これは次のような形をしている:



ここで, $T =$  とし, T_1T_2 を図で示されたような行列の積とすれば, この等式は, 等式 $T_1T_2R = RT_1T_2$ とみなすことができる. 特に, これは, 結び目理論的な YBE の解 Rについて, $(t^a_b)^i_j = R^{ia}_{bj}$ は FRT 等式 $t^a_i t^b_j R^{ij}_{cd} = R^{ab}_{ij} t^i_c t^j_d$ の解を与えるということを意味する. このようにして, YBE の解 R に対し, FRT 構成法は R 行列自身の部分行列から構成される行列表現になっている.

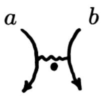
11 節　Homfly 多項式の特殊化に対する Yang-Baxter 模型

第 9 節においてブラケットに対する「真空」期待値模型が直接に Yang-Baxter 方程式 (YBE) の解を導き, この解は R 行列

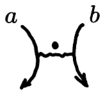
$R = (q - q^{-1})$  $+\, q$  $+$ 

$\overline{R} = (q^{-1} - q)$  $+\, q^{-1}$  $+$ 

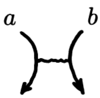
に一般化されることをみた. これらの式の中の小さな図形表示の辺は, 任意の添字集合 $\mathcal{I}$ からの "スピン" により, ラベルが付けられていて,



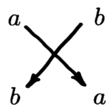
$\longleftrightarrow a < b,$



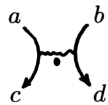
$\longleftrightarrow a > b$



$\longleftrightarrow a = b$



$\longleftrightarrow a \neq b$

という対応がある. 例えば, 

$= [a < b]\delta^a_c \delta^b_d$ である. ただし,

$$[a < b] = \begin{cases} 1 & (a < b \text{ のとき}), \\ 0 & (a \geq b \text{ のとき}) \end{cases}$$

である $\left(一般に,\ [P] = \begin{cases} 1 & (P\text{が真のとき}) \\ 0 & (P\text{が偽のとき}) \end{cases} \text{ である} \right)$. したがって,

$$R^{ab}_{cd} = (q - q^{-1})[a < b]\delta^a_c \delta^b_d + q[a = b]\delta^a_c \delta^b_d + [a \neq b]\delta^a_d \delta^b_c.$$

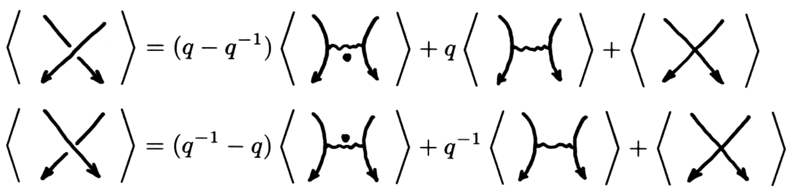
これらの図式の構造は, これからみていくように, 結び目多項式のステイトに直接対応している.

本節で考えるモデルは, 向きの付いた結び目や絡み目の図形表示に対して定義される. 再び, ブラケットの式:

$$\langle K\rangle = \sum_{\sigma}\langle K|\sigma\rangle\delta^{||\sigma||}$$

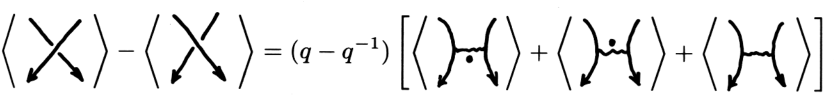
を使うことにする. ただし, σ, $\langle K|\sigma\rangle$, $||\sigma||$ はそれぞれ下で定義されるステイト, 項点の重みの積, ステイトのノルムを表す. そのとき, $\langle K\rangle$ が Homfly 多項式の特殊化の無限のクラスのための正則同位の不変量を与えるように調整できることを示す. これは, 2 変数 Homfly 多項式の存在を示すのに適当な模型のクラスを与える. この多項式と (Yang-Baxter ではない) 組合せ的な模型については, 第 5 節において議論したことを注意しておく.

このステイト模型はどのようにして定義されるべきであろうか? R 行列にはよい展開があるので, ステイト模型に対しても, まず次のようにおいてみる:

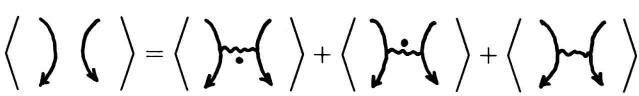


これは, R 行列が局所的な項点の重みを決定するということと同値である.

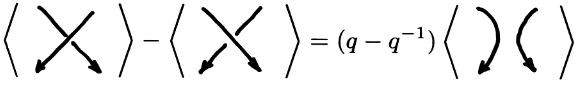
そうすると, 次の関係式が成り立つことに注意しよう:



さらに, 与えられた 2 つのスピン a, b に対し, $a<b$, $a>b$ または $a=b$ なので,



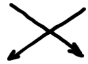
が成り立ち, したがって,



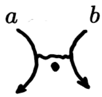
つまり, この模型は Homfly 多項式の正則同位版における交換公式を満足する. 辺は添字集合 $\mathcal{I}$ からのスピンによりラベルが付けられているので, この模型のステイトσは, 次のようにして得られることがわかる:

1. それぞれの交差点を

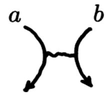
 または  または 

のように分離するか, もしくはグラフ的な交点  にする.

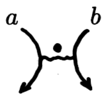
2. その結果得られた図形表示 σ に, σ のそれぞれのループが同一のスピンをもち, 次の法則に従うように, $\mathcal{I}$ の元をラベル付けする:



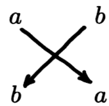
$\Rightarrow a < b$,



$\Rightarrow a = b$



$\Rightarrow a > b$,



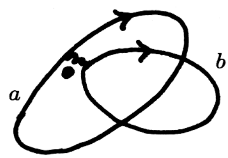
$\Rightarrow a \neq b$

[図形表示にはラベルが付いていないこともある. その場合は, $\langle K\rangle$ に寄与しない.]

例題. Kを三葉結び目の図形表示とすると, 典型的なステイトσは次のようなものである.



K



σ

$a < b$

ステイト内のループは自分との交差点をもたないことに注意せよ (そのような交点があると, 交差点を作る辺に異なる値のスピンを割り当てなければいけないという法則に反する).

$\langle K\rangle$ は (第 3 節の向きの付いていないブラケットの場合から一般化される) 「真空」期待値であるという考え方と同様に, 一定のスピン a をもつそれぞれのループには, a とループの回転の方向だけによる量を与えられなければならないことがわかる. この量を, 次の式により定義する:

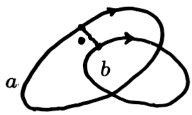
$$\delta^{||\sigma||} = \langle\sigma\rangle$$

ただし, δ は q に関係した変数で, $||\sigma||$ **はループの回転の方向により, ±1 倍された** σ **のループのスピンの和である.** つまり,

$$||\sigma|| = \sum_{\ell \in \{\sigma\text{の成分}\}} \mathrm{rot}(\ell) \cdot \mathrm{label}(\ell).$$

ただし, label(ℓ) はループ に割り当てられたスピン, rot(ℓ) は次のような規則で決まる±1 である:

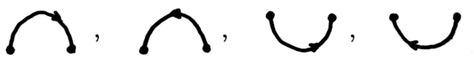
rot () = +1,　　rot () = −1.

よって, 

$= \sigma$ に対しては, 次を得る:

$$||\sigma|| = -a - b, \qquad \langle \sigma \rangle = \delta^{-a-b}.$$

注意. 与えられたループは $\mathcal{I}$ からの任意のラベルをもつので, 「真空」期待値の図に関しては, 生成と消滅の行列



$\overrightarrow{M}_{ab}$　　$\overleftarrow{M}_{ab}$　　$\overrightarrow{M}_{ab}$　　$\overleftarrow{M}_{ab}$

を

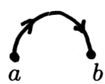
$\Big\langle$  $\Big\rangle = \sum_{a \in \mathcal{I}} q^{-a}$,　　$\Big\langle$  $\Big\rangle = \sum_{a \in \mathcal{I}} q^{a}$

となるように決めなければならない.

これらの行列が自然に出てくる場合がある. $a \in \mathcal{I} \Leftrightarrow -a \in \mathcal{I}$とする. (理論上, 正のスピンは負のスピンの対応を伴っている.) そして, 反 Kronecker のデルタ:

$$\Delta_{a,b} = \delta_{a,-b} = \begin{cases} 1 & (a = -b\text{ の場合}), \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

の変形として,



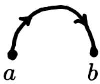
$= q^{a/2}\Delta_{a,b}$

と解釈する.　こで, (「真空」期待値の過程の時間を表す) 垂直方向の向きは, 一定のラベルが向けられた弧 $\bigcap$ が, 矢印の上向きまたは下向きに従って,

$$\uparrow +a, \qquad\qquad \downarrow -a$$

と解釈されるようなものを選ぶ.

(時間に関して逆向きに動いている粒子については, そのスピンとチャージは逆向きであるとする.) そうすると, 行列は次のようになる:



$= q^{a/2}\Delta_{a,b}$,



$= q^{-a/2}\Delta_{a,b}$,



$= q^{-a/2}\Delta^{a,b}$,



$= q^{a/2}\Delta^{a,b}$.

対称な添字集合 ($a \in \mathcal{I} \Leftrightarrow -a \in \mathcal{I}$ という意味で) に対しては, これらの行列は平凡なループに与えられた期待値を割り当てる. 行列は, 単に粒子や逆向きのスピンをもつ反粒子の生成・消滅の確率, あるいは, 粒子が時間とともに動きまわったときの軌道の確率を表しているにすぎない. このことをトポロジー的理論の観点からみると, この場合の「真空」期待値は時間や時間の矢印の向きによらないことがわかる.

さて, 前の模型の話に戻る. σを (スピンによるラベル付けをされる準備のできている) 表示的なステイトホルダー, またはラベル付けされたスピンステイトとみなすと, $\langle K\rangle = \sum_\sigma \langle K|\sigma\rangle\langle\sigma\rangle$ となる. 過程の条件にみあうようにスピンを与えて, 総和をとるという形で確率振幅が与えられているような, 特別な過程の図形的な表示が下図のようなステイトホルダーである. ループ上を回っていたり, 生成・相互作用・消滅などの連続の列を動き回る粒子が視覚化できるということに注意しよう. その列は時間の矢印の選択を含み, ループ上の動きはこれらの軌道を動く過程に関するメタ・タイム (meta-time) の選択を含んでいる. トポロジーの理論は, 時間の矢印とは無関係なのと同じように, メタ・タイムが独立であることを主張している.

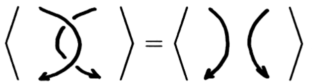


この理論が本当にトポロジー的であるために, Reidemeister 移動のもとでの $\langle K\rangle$ の振舞いを調べなければならない. まず, $\langle K\rangle$ が正則同位のもとでの不変量になるように δ を決めておく.

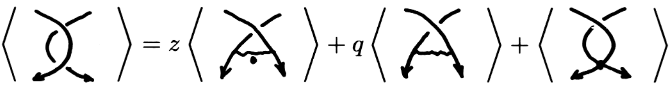
任意の q, δ, それに添字集合 $\mathcal{I}$ に対し, $\langle K\rangle$ が (巡回的な向きが入っていないような) II(A) と III(A) の不変量になっていることをみるのは簡単である. R と $\overline{R}$ は互いに逆行列で, $\delta^{||\sigma||}$ は交差点のタイプに無関係であるから, II(A) の場合は簡単である. それにもかかわらず, II(A) をステイト展開によりチェックする方法は,

例証してみる価値がある．

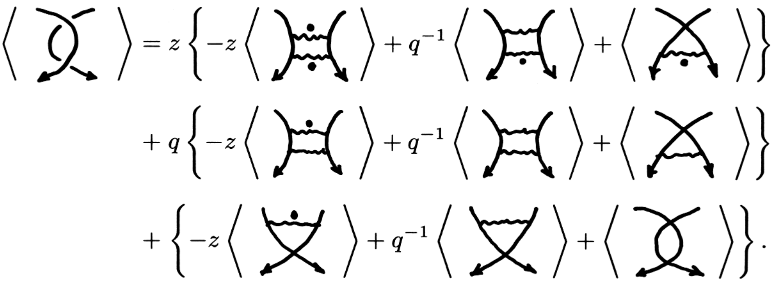
補題 11.1. 任意の添字集合 $\mathcal{I}$, 変数 q, δ に対して，

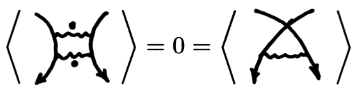


証明.

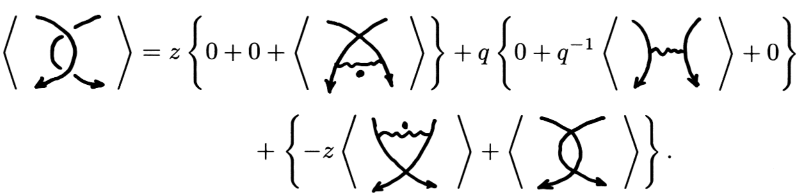


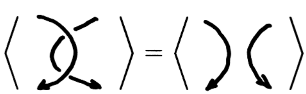
$(z = q - q^{-1})$



ここで，組合せは可換でない．よって，

したがって，



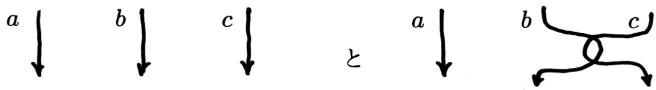
ここで，である．よって，となり，補題の証明が終る． □

補題 11.2. 上で定義したステイト模型 $\langle K \rangle$ は，任意の集合 $\mathcal{I}$ と変数 q と δ の任意の選択に対し，向きの付いた移動 III(A) のもとで不変である．

証明. このステイト模型は次の式によって定義されている:

$$\langle K\rangle = \sum_{\sigma} \langle K|\sigma\rangle^{\delta^{||\sigma||}}.$$

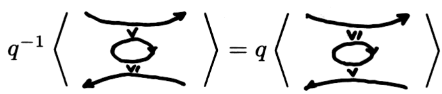
ただし, σ は図形 Kのスピンによるすべてのラベルの付け方を動き, $\langle K|\sigma\rangle$ は行列 R と$\overline{R}$ に対応する項点の重みの積であり, $||\sigma||$ は上で説明したようにループの数を数えたものである. R と$\overline{R}$ は YBE を満足するので, (III(A) 移動の) 三角形の与えられた入力, 出力に対して, すべてのステイトで $||\sigma||$ が同じであることをチェックすれば十分である. 命題 9.4 の証明と比べてみると, これはまさしくその証明と同じである. 例えば,

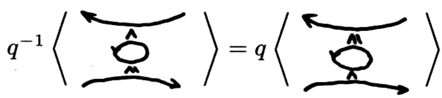


は等しいノルムをもつ. なぜならば, 対応するラベルと回転数が同じだからである. これで証明を終る. □

次の補題は, ブラケットの向きが逆に付いている移動 II のもとでの振舞いにとって, 鍵となるものである.

補題 11.3. $\langle K\rangle$ が次の条件を満たすならば, $\langle K\rangle$ は向きが逆な移動 II のもとで不変であり, よって正則同位の不変量となる.

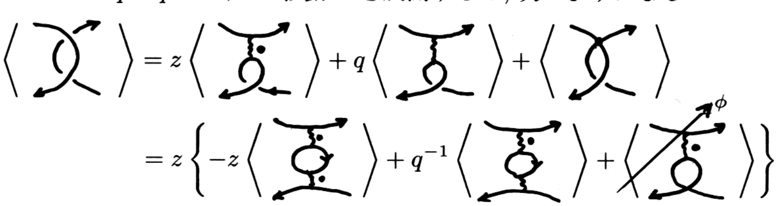
(i) 

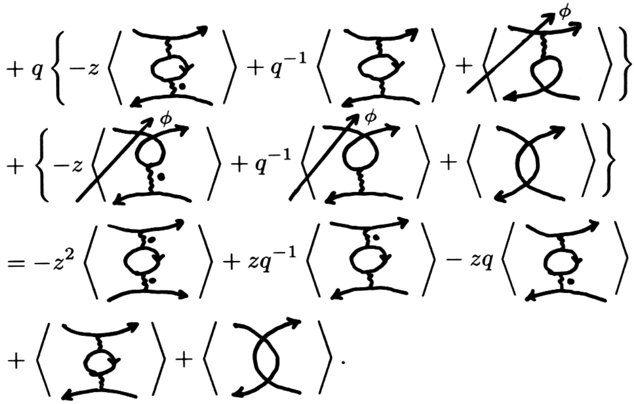
(ii) 

これらをステイト模型 $\langle K\rangle$ に対する巡回条件 (cycle conditions) とよぶ.

注意. 図形表示の中の隣り合うラインの間のスピンの大小関係を, 再び不等号を用いて直接書いていることに注意せよ.

証明. ある向きの付いた移動 II(B) の場合のみ証明を与える. 残りの場合は読者に委ねる. $z = q - q^{-1}$とする. 移動 II を展開すると, 次のようになる:



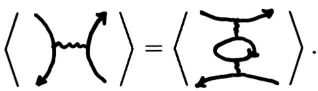


ここで, この式を簡単にするために, 次のことに注意しよう:

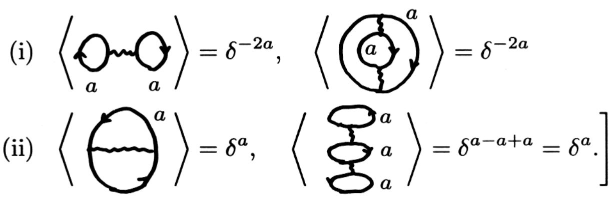


これは, 交差しているラインは異なる添字をもっているからである.

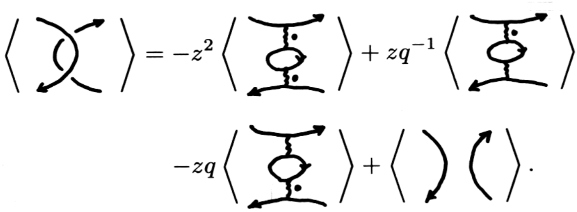
また, 次のことも簡単に確かめることができる:



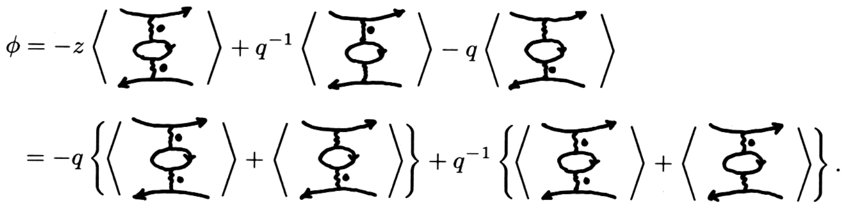
[これは, 回転数に関する等式から出てくる:



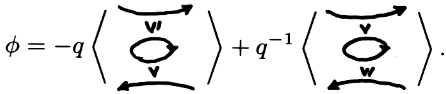
したがって,



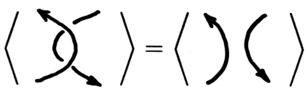
よって, $\langle K\rangle$ が移動 II(B) のもとで不変になるための必要条件は, 上の式の右辺の最初の 3 つの項の和が 0 になることである. ここで z で割ると, 次式を得る:



よって,



これで, 1 番目の巡回条件を証明したことになる. 2 番目も, 本質的な細かい部分は同様で,



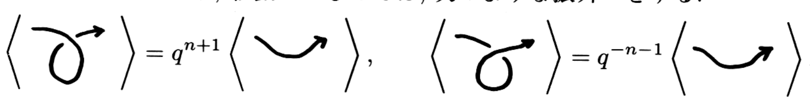
となるための条件として出てくる. これで補題の証明を終る. □

上で示したことから, 添字集合を

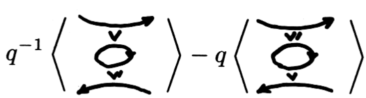
$$\mathcal{I}_n = \{-n, -n+2, -n+4, \cdots, n-2, n\} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

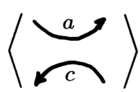
としたときに, $\langle K \rangle$ は正則同位のもとで不変量になる. もっと厳密にいうと:

命題 11.4. $\mathcal{I}_n = \{-n, -n+2, -n+4, \cdots, n-2, n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とし, $\langle K \rangle = \sum_{\sigma} \langle K|\sigma \rangle q^{||\sigma||}$ となるように, $\delta = q, z = q - q^{-1}$ とする. すると, $\langle K \rangle$ は正則同位の不変量になり, 移動 I のもとでは, 次のような振舞いをする:



証明. 正則同位のもとでの不変性を示すには, 巡回条件 (補題 11.3) を満たしていることを示せば十分である. 1 番目の条件に対する計算は次のようになる:



$$= \sum_{a>c} \left[q^{-1} \sum_{a>b\geq c} q^{-b} - q \sum_{a\geq b>c} q^{-b} \right]$$ .

上のように与えられた添字集合の選び方により, それぞれの係数

$$\left[q^{-1}\sum_{a>b\geq c}q^{-b}-q\sum_{a\geq b>c}q^{-b}\right]$$

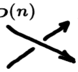
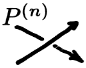
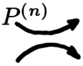
が同様に消えることが簡単にわかる. 2 番目の巡回条件についても, まったく同様に確かめられる.

移動 I のもとでの振舞いについては, 直接計算すればよい. 次の命題でその計算を一般化しているので, ここでは省略する. □

注意. 添字集合を $\mathcal{I}_n$, $\delta = q$ として, 次の式を定義する:

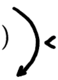
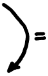
$$P_K^{(n)}(q) = (q^{n+1})^{-w(K)}\langle K\rangle/\langle 0\rangle.$$

ただし, $w(K)$ は Kの捻り数である. すると, $P_K^{(n)}$は次の条件を満足する:

1. Kが K'に全同位$\Longrightarrow P_K^{(n)}(q) = P_{K'}^{(n)}(q)$,
2. $P_O^{(n)} = 1$,
3. $q^{n+1}P^{(n)}$  $-\, q^{-n-1}P^{(n)}$  $= (q-q^{-1})P^{(n)}$  .

したがって, $P_K^{(n)}$は Homfly 多項式の 1 変数的特殊化であることがわかる ([JO4] と比べてみよ). 特殊化 $\{P_K^{(n)}|n = 1,2,3,\cdots\}$ の完全な集合は (結び目や絡み目の 2 変数多項式不変量としての) Homfly 多項式自身の存在を示すにも十分である. この向きの付いた 2 変数多項式への道は, 多少直接的でないが, この不変量の性質を理解するのにとてもつごうがよい.

この定式化の中で, 添字集合を $\mathcal{I}_1 = \{-1,+1\}, q = \sqrt{t}$ とすると, もとの Jones 多項式が出てくる. これは, Yang-Baxter の解

$R = (q-q^{-1})$   $+\,q$   $+$ 

に基づく Jones 多項式に対する向き付けられたステイト模型である. この (2 つの元からなる添字集合に対する) R と, ブラケット模型から自然に出てくる Yang-Baxter の解の間の関係については, すでに第 9 節で述べた. R 行列に対し, これらのモデルが, 第 10 節で説明したように, Fierz 恒等式を用いてお互いに移り合うということを示すのはよい練習問題であろう.

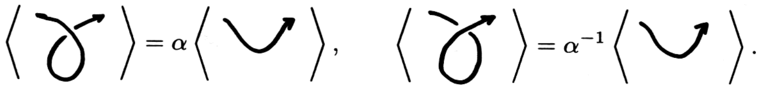
この模型の列についてのさらなるなぞは, 古典的な Alexander-Conway 多項式をうまく避けているということである. Conway 多項式を, $\nabla_O = 1$ で次の等式を満たすような全同位のもとでの不変量 ∇_Kであるとする:

∇  $-\,\nabla$  $= z\nabla$  .

すると,∇_Kは $n=-1$, つまり 0 次元スピン集合を必要とするようである. 実際 ∇_K は, この模型の列への直接的な言い換えはもたない. しかし, 別の R 行列を用いれば, ∇_Kに対する Yang-Baxter 模型は存在する. この問題については, 次節で取り上げる.

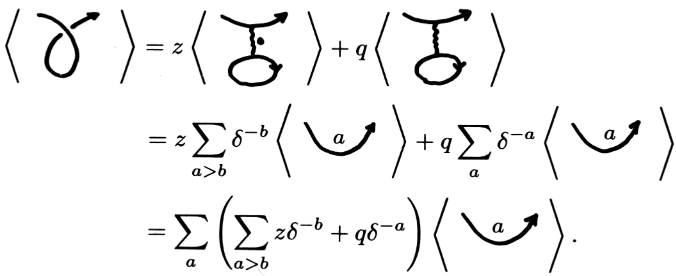
本節の締めくくりに, $\langle K\rangle$ が, ある α に対し, ⟨  ⟩ $=\alpha$⟨  ⟩ となるためには, 本当に $\mathcal{I}=\{-a,-a+\Delta,-a+2\Delta,\cdots,a-\Delta,a\}$ という形の正負平等なスピン集合を必要とするということを示そう. すると, 移動 I のもとである定数倍になるということと, これらの模型を使って説明してきた正則同位の不変量の特別な列との焦点が合うことになる.

命題 11.5. $\langle K\rangle$ を独立な変数 z,δ, そして任意の順序のついた添字集合 $\mathcal{I}=\{N_0<N_1<\cdots<N_m\}$ をもつ (本節で定義した) ステイト模型とする. さらに, $\langle K\rangle$ が, 次のような式を満たすという意味で単純であるとする:



すると, すべての差 $N_{k+1}-N_k$ は等しくなり, $N_0=-N_m$となる:

証明.



模型が単純であるためには, これらの係数すべてが等しくなることが必要である:

$$\begin{aligned}\alpha &= q\delta^{-N_0}\\ &= (q-q^{-1})\delta^{-N_0}+q\delta^{-N_1}\\ &= \cdots\\ &= (q-q^{-1})\sum_{i=0}^{m-1}\delta^{-N_i}+q\delta^{-N_m}.\end{aligned}$$

よって,

$$q\delta^{-N_0}=q\delta^{-N_0}-q^{-1}\delta^{-N_0}+q\delta^{-N_1}\ \Rightarrow q^{-1}\delta^{-N_0}=q\delta^{-N_1}$$
$$\Rightarrow q^2=\delta^{N_1-N_0}.$$

同様に, $k=0,\cdots,m-1$ に対し, $q^2=\delta^{N_{k+1}-N_k}$ となり, 証明が終る. □

12 節　Alexander 多項式

本節の主な目的は, 第 11 節で議論したのと本質的に同じ Yang-Baxter 模型が, Alexander-Conway 多項式を導くことを示すことである.

この構成に沿っていくつかの興味深い関係が出てくる. つまり, Yang-Baxter 方程式 (YBE) の解と Alexander-Conway 多項式の古典的な見方との関係である.

本節で議論される模型は, Francois Jaeger [JA4](氷模型の言葉で書かれている) により発見されたものを, 筆者が Alexander 多項式の模型として再構成したものである [LK23]. 他の人々(Wadati [AW3], H.C.Lee [Lee1]) は, 本書で今後使う R 行列と Alexander 多項式の関連性を調べている†. [LK18] や [JA8] では, このアプローチが統計力学において自由フェルミ粒子とどのように関係があるのかが示されている (第 13 節の練習問題も参照されたい). また, 多変数 Alexander 多項式のこのような議論については, [MUK2] も見ていただきたい. その R 行列自身は最初 [KUS] や [PS] に出てきた.

結び目多項式に対する最初のステイト模型は, 筆者 [LK2] による Alexander-Conway 多項式に対する FKT 模型であった. FKT 模型は (多変数) Alexander-Conway に対する (Yang-Baxter でない) ステイト模型を与える. その構造は, 多項式の Alexander による本来の定義に戻る. Alexander 多項式に対する単純な Yang-Baxter 模型が存在し, この模型が古典的な位相幾何学とも関係があるということは, 何かたいへんな驚きであった. この関係は第 13 節で論じられる.

それでは, 模型を与え, 対応する Yang-Baxter の解を述べることから始める. その後に, いくつかの関連した話題に戻ることにする.

Yang-Baxter 模型

1 変数 Alexander 多項式の Conway 版は, 次の性質により決定された:

(i)　Kが K'と全同位ならば, $\nabla_K = \nabla_{K'}$

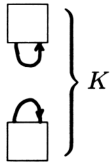
(ii)　$\nabla_O = 1$

(iii)　

---

†訳注: Deguchi [DE]*, Akutsu-Deguchi [AD]* において, 超 Lie 代数に関する可解格子模型から Alexander 多項式が自然に導かれることが示されている.

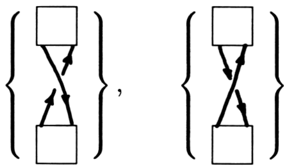
これらの公理の一つの重要な結論は, **分離する絡み目 K に対し ∇_K は消える** (0 になる) ということである. 実際, K を分離型であると仮定すると, K は次のように図示される.



(これを**分離**の定義として採用する.) すると, 次の式が得られる:

$$\nabla_A - \nabla_B = z\nabla_K.$$

ただし,

$A =$  $= B$

A と B は 2π だけ捻ることで全同位となるので, $z\nabla_K = 0$ であると結論づけることができ, よって $\nabla_K = 0$ である.

この性質は, 次の形のステイト模型を考える場合に問題となる:

$$\langle K \rangle = \sum_\sigma \langle K|\sigma \rangle \delta^{||\sigma||}$$

というのも, これらの模型は $\langle \bigcirc K \rangle = \langle \bigcirc \rangle \langle K \rangle$ という性質をもち, この等式が成り立つには $\langle \bigcirc \rangle = 0$ —— つまりすべての模型に対して 0 —— ということが必要になるからである.

原理的には逃げ道がある (そしてこれから見るように, その考え方は Alexander 多項式に対してうまくいく). ここで, 端点のある紐の結び目 (絡み目) の研究としての結び目理論の考え方に戻る:



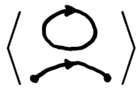
ここでは, **端点を固定させたままでの**全同位, あるいは正則同位は許されていて, 端点を越える変形は許されていない. もっと厳密にいうと, 図形表示はすべて, ある有限区間 I に対する帯状領域 $\mathbf{R}\times I$ にあるとしよう. 絡み目 L は, 一方の端点は $\mathbf{R}\times 0$ にあり, もう一方の端点は $\mathbf{R}\times 1$ にあるような, 入っていく点と出ていく

点をそれぞれ 1 つずつもったタングル (tangle) として表現される. L の端点のみが $(\mathbf{R}\times 0)\cup(\mathbf{R}\times 1)$ と交わる. すべての Reidemeister 移動は $\mathbf{R}\times I$ の内側 (つまり $\mathbf{R}\times I$ の内部) で行われる.

この結び目や絡み目の 2 端点タングルの理論は普通の理論と同値であり (練習問題), 模型を構成するためにこの理論を使う. そうすると, 次のような模型を考えることができる:

 $= 1$

であるが, しかし,

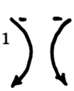
 $= 0$ かつ  $= 0.$

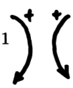
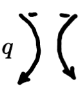
分離絡み目に対する性質は, こうすれば可能になる.

[***n* 端点タングル**とは, n 個の端点をもつ絡み目の図形表示のことである. 普通, 端点は, 図形表示のそれ以外の部分はその箱の内部にあるような, **タングルの箱** (平面状の矩形) の外側にあると考えられる.]

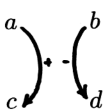
模型をきちんとつくるためには,Yang-Baxter の解が必要である. とりあえず, ここでは次のように考える:

$\mathcal{I}=\{-1,+1\}$ を添字集合とする.

$R=(q-q^{-1})$  $+q$  $-q^{-1}$  $+$  ,

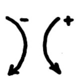
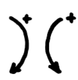
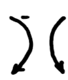
$\overline{R}=(q^{-1}-q)$  $+q^{-1}$  $-q$  $+$ 

とおく. ここで, 第 11 節と同じ記号を用いる. つまり,



$$=\begin{cases} 1 & (a=c=+1, b=d=-1 \text{ の場合}), \\ 0 & (\text{それ以外の場合}). \end{cases}$$

このとき,

$R-\overline{R}=(q-q^{-1})\Big[$  $+$  $+$  $+$  $\Big]$

$=(q-q^{-1})\Big[$  $\Big]$

であることに注意する. Rが正の交差点に, $\overline{R}$ が負の交差点に対応するものとすれば, このテンソルは次の式を満たす模型の候補になる:

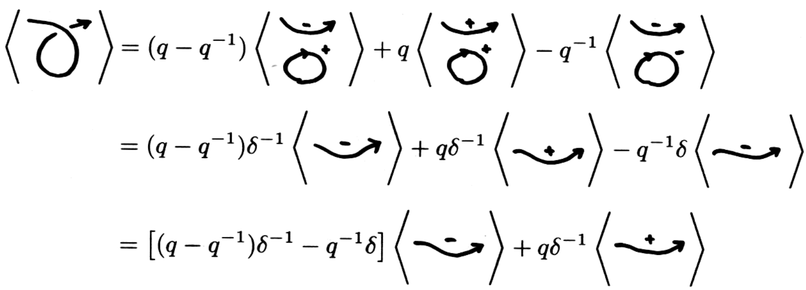


これら R と $\overline{R}$ はまさに YBE の解となっており, それぞれがお互いの逆になっていることは直接に確かめられる. [付録も参照せよ. そこでは, $\mathcal{I}=\{-1,+1\}$ に対する YBE のスピンを保存するすべての解を見つけるという過程の中で, この解を出している.]

したがって, この R 行列と, ちょうど第 11 節のようにラベルを付けることによって回転を計算したノルム $||\sigma||$ をもつ模型を, 添字集合 $\mathcal{I}=\{-1,+1\}$ を使って, 次のようにおいてみる:

$$\langle K\rangle=\sum_{\sigma}\langle K|\sigma\rangle\delta^{||\sigma||}$$

ここで $\langle$$\rangle=\langle$$\rangle$ となってほしいわけであるが, まず初めに**単純性**, つまり $\langle$$\rangle=\alpha\langle$$\rangle$ を要求する. そしてその制限が模型の構造を決定することをみよう. そこで計算をすると,



よって,

$$(q-q^{-1})\delta^{-1}-q^{-1}\delta=q\delta^{-1}$$

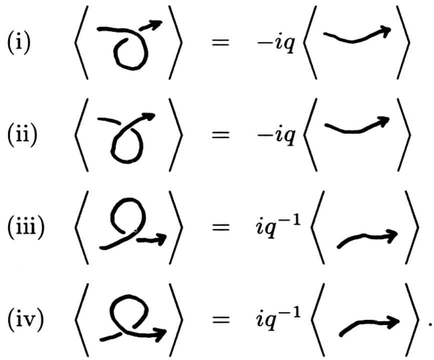
でなければならない. それゆえ,

$$q^{-1}(\delta^{-1}+\delta)=0$$

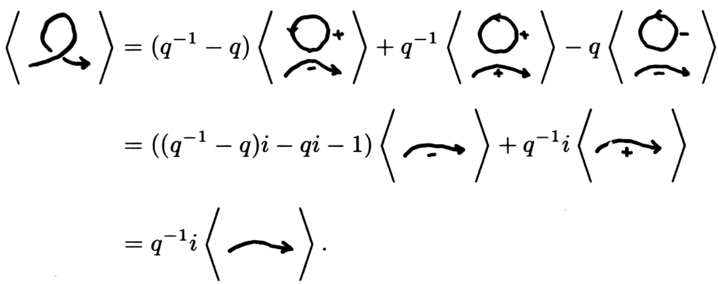
である. したがって, $\delta^{-1}+\delta=0$ となり, $\delta=i$ $(i^2=-1)$ をとる.

すべてのカールのタイプに対して, カールのついた模型がカールのついていない模型に定数をかけたものになるということを確かめるのは容易である. 実際, それは交差点のタイプにもよらないのである:

補題 12.1. 上で述べた $\delta = i\ (i^2 = -1)$ と $\langle K \rangle$ について, 次が成り立つ.



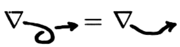
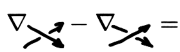
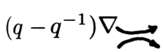
証明. (iii) を確かめる. 残りは読者に委ねる.



□

上の補題から, もし

$$\nabla_K = (iq^{-1})^{-\mathrm{rot}(K)}\langle K \rangle$$

とおくと, カールに対し,  である. 確かに,   である. あとは, II(B) 型の変形のもとで不変であることを確かめればよい. このことを確かめれば, ∇_Kは正則同位の不変量になり, カールのもとでの (定数倍以外の) 不変性を使えば全同位のもとでの不変量になる.

単純な次のような紐には, 0 という回転数を割り当てることに注意する:

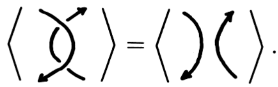
rot() $= 0$.

また, () + () = () $= 1$ であることも仮定する. そうすると, 模型は

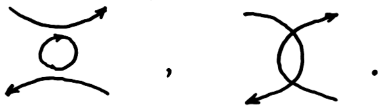
$$\langle K \rangle = \sum_{\sigma} \langle K | \sigma \rangle i^{||\sigma||}$$

となる．ただし，$i^2=-1$，$\langle K|\sigma\rangle$ は R行列により決定される頂点の重みの積であり，$\|\sigma\|$ は添字集合 $\mathcal{I}=\{-1,+1\}$ に対する回転のノルムである．

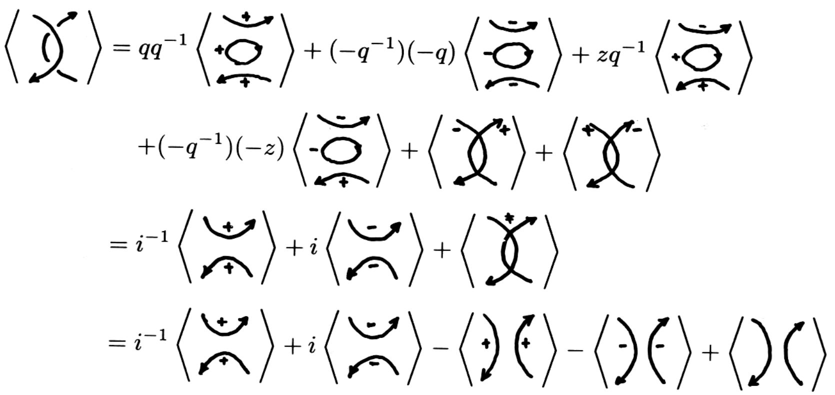
命題 12.2. $\langle K\rangle$ を上のように定義すると，



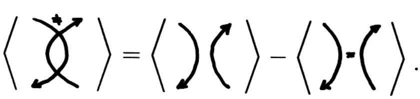
証明. の展開の各項を考える．寄与するものは，次の 2 つである:



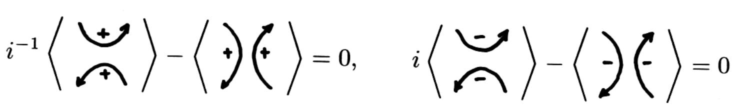
それゆえ，



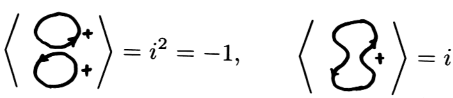
最後の等号は，次の等式による:

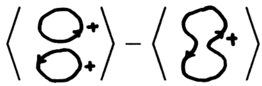


さて，次の二つの等式を仮定する:

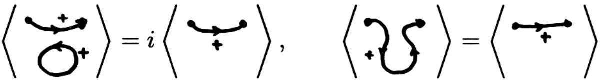


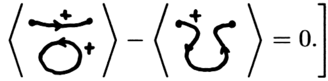
［これらは場合分けすれば容易に確かめられる．



$\Longrightarrow i^{-1}$  $= -i^{-1} - i = 0.$

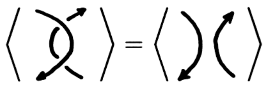
また,



$\Longrightarrow i^{-1}$ 

局所的な弧の 1 つが入ってきて出ていく紐の一部ならば, このような場合は別に考えなければならないことに注意する.

これらの最後の 2 つの等式の結果により,

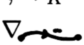


と結論づけることができる. これで証明を終る. □

これまでに, $\langle K \rangle = \sum_{\sigma} \langle K|\sigma \rangle i^{||\sigma||}$ が単純な入力／出力のタングルの正則同位の不変量であることを完全に示した. これより, $\nabla_K = (iq^{-1})^{-\mathrm{rot}(K)} \langle K \rangle$ がこれらのタングルに対し全同位の不変量であることも出てくる. また, 次の性質も確認できる.





これらの公理を確かめることにより, $\nabla_K = \nabla_K^+$ $+ \nabla_K^-$ は, (1. と 2. を帰納的に使って)  と  に関して自由であることがわかり, $\nabla_K = \nabla_K^+ = \nabla_K^-$ であることが出てくる. 言い換えると, $\langle K \rangle$ のステイトへの展開における $\langle$$\rangle$ と $\langle$$\rangle$ の係数は等しいことがいえる. 計算により, これは, すべてのステイトは正の入力, 正の出力をもつと仮定してよいことを意味する:



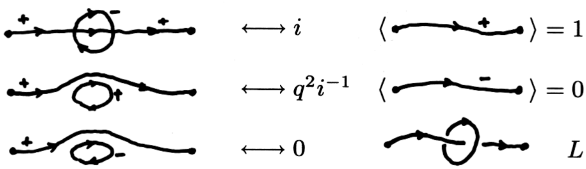
これらの公理から $\overline{K}$ の Conway 多項式を計算できることを既に知っているので, ∇_K はまさしく Conway 多項式であると結論できる. ただし, $\overline{K}$ はタングル K の閉包である:

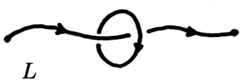


結び目$\overline{K}$ から, 区間を切り取り, ここでの構成法に合った上図左のような$\overline{K}$ のタングル Kを作って ∇_K を求めた. しかし, 切り取る区間の選び方, つまりタングル Kの与え方によらずに, 同じ ∇_K が得られるということを最後に注意しておく. 切り取る区間の選び方によらないということは, 性質 1 と性質 2 を使った対応するスケイン計算から出てくる.

実は, 模型に対する区間の選び方の独立性は, ステイトの和の形から直接に組合せ的にも確かめることができる. これは読者の練習問題として残しておく.

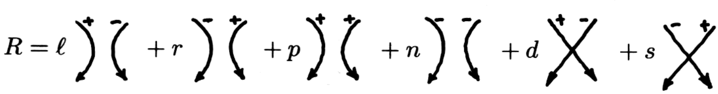
例題.





$$\begin{aligned} \langle L \rangle &= i + q^2 i^{-1} \\ \mathrm{rot}(L) &= -1 \\ \nabla_L &= (iq^{-1})^{\mathrm{rot}(L)} \langle L \rangle \\ &= iq^{-1}(i + q^2 i^{-1}) \\ &= -q^{-1} + q \\ \therefore\ \nabla L &= z \end{aligned}$$

Conway 多項式に対するこの模型についての謎はたくさんある. それらの多くは R 行列に由来するものである. 付録で, スピン集合 $\mathcal{I} = \{-1, +1\}$ に対するスピンを保存する YBE のすべての解を分類する. そのような解は, ある係数 ℓ, r, p, n, d, s に対し, 次のような形になることが必要である:



また, 付録 (第 18 節) の中で, Rが YBE を満たすには, 次の関係が必要十分であることを示す:

$$\boxed{\begin{gathered} r\ell d = 0 \\ r\ell s = 0 \\ r\ell(\ell - r) = 0 \\ p^2\ell = p\ell^2 + \ell ds \\ n^2\ell = n\ell^2 + \ell ds \\ p^2 r = pr^2 + rds \\ n^2 r = nr^2 + rds \end{gathered}}$$

1つの解の自然なクラスは, $d = s = 1,\ r = 0$ のとき出てくる. すると, 条件は次のように簡単になる:

$$p^2\ell = p\ell^2 + \ell, \qquad n^2\ell = n\ell^2 + \ell.$$

n と p が可逆であると仮定すると, $\ell = p - p^{-1},\ \ell = n - n^{-1}$を得る. つまり, $p - p^{-1} = n - n^{-1}$ である.

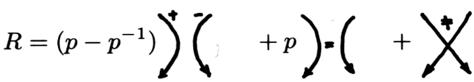
$$\Leftrightarrow np^2 - n = n^2p - p$$

$$\Leftrightarrow \boxed{np(p - n) = n - p}$$

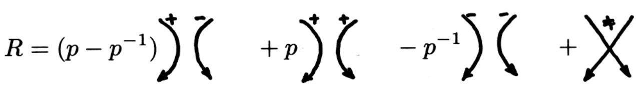
このようにして, 次の2つの基本的な解があることがわかる:

1. $n = p$
2. $np = -1$.

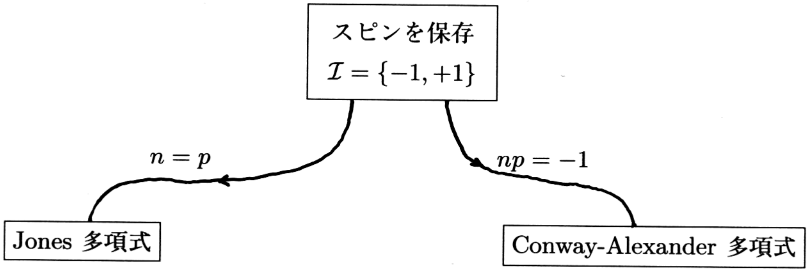
1番目の式は, 次の R 行列を与え, 第11節のように Jones 多項式を与える.



2番目の式は, 次の R 行列を与え, 本節でみたような Alexander-Conway 多項式を導く.



したがって, YBE の観点からは, 次の図式を得る.



この意味で, Jones 多項式と Conway 多項式は同じ基礎をもっている. しかしながら, 別の意味では, これらは非常に異なり, その違いはステイト模型の中に見受けられる.

$J\langle K\rangle$ を第 11 節で構成した Jones 多項式に対する向きの付いたステイト模型とすると,

$$J\langle K\rangle = \sum_{\sigma} J\langle K|\sigma\rangle t^{||\sigma||}$$

となる. ただし, t は代数的な変数である. $A\langle K\rangle$ を本節の模型とすると,

$$A\langle K\rangle = \sum_{\sigma} A\langle K|\sigma\rangle i^{||\sigma||}$$

である. ただし, $i^2 = -1$ とする.

ループに関係した部分は, Conway 多項式に関してはある数 $(i^{||\sigma||})$ になっていて, Jones に関しては代数的 $(t^{||\sigma||})$ になっている. この事実は, これらの模型を一見すれば気づく違いである.

Alexander 多項式について, 古典的な定義による多くの結果が知られている. 古典的な Alexander 多項式は$\Delta_K(t)$ と書かれ, Conway によるものと

$$\Delta_K(t) \doteq \nabla_K(t^{1/2} - t^{-1/2})$$

という関係がある. ただし, $\doteq$ は符号と t のべきの差を除いて等しいことを意味する. 本節の模型 $A\langle K\rangle$ は $z = q - q^{-1}$として表されることから, $\Delta_K(q^2) \doteq A\langle K\rangle(q)$ という式を得る.

この模型に関する次の問題は, 筆者にとって特に興味深い. もし Kがリボン結び目 (ribbon knot) ならば, t のある多項式 $f(t)$ が存在して,

$$\Delta_K(t) \doteq f(t)f(t^{-1})$$

となることがわかっている [FOX1]. 本節のステイト模型を使ったこの事実の証明はあるだろうか? リボン結び目は, 3 次元空間にリボン特異点のみをもつようには

め込まれた円盤の境界となるような結び目である. リボン特異点では, 円盤上の 2 本の弧が重なり, 円盤は自分自身と横断的に交わっている. 1 本の弧は円盤内部の弧であり, もう 1 本は円盤の境界の点から別の境界の点に向かう弧である.

次節では, ある古典的な結び目理論を見直し, Alexander-Conway に対するこの模型が Artin ブレイド群の Burau 表現とどのように関係しているかを示す.

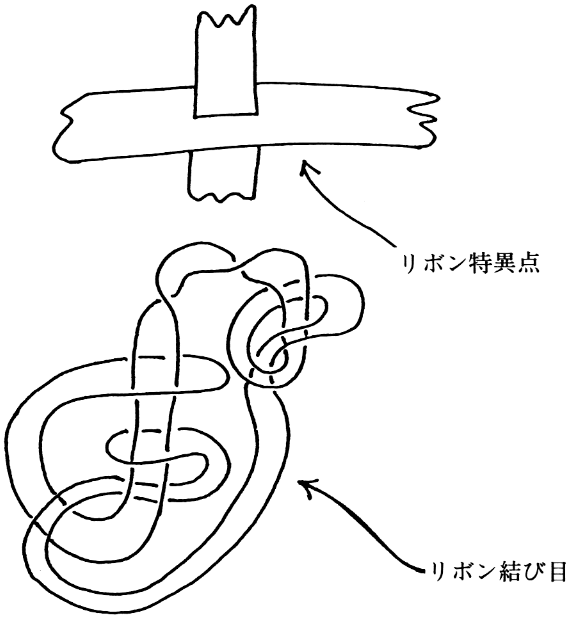
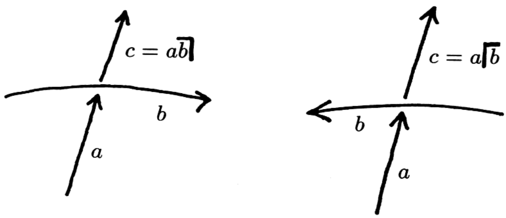


図 16.

13節　結び目クリスタル：現代的装いの古典的結び目理論

本節は, 古典的結び目理論の簡単な紹介である. この中には, 結び目の (補空間の) 基本群を含み, また Alexander 多項式の古典的な取扱いも含んでいる. 「現代的装い」といったのは, 基本群やクワンドルの一般化でもある**クリスタル** (crystal) $C(K)$ の構成から話を始めるからである. **クワンドル** (quandle) [JOY] とは, 結び目や絡み目の図形表示と密接に結びついた新しい代数不変量である (1979). David Joyce [JOY] は, クワンドルが向きの付いていない結び目のタイプを分類することを証明している. (2つの結び目が向き付けを考えないで同値であるとは, その結び目が S^3 の向きを逆転することも許す同相写像で移り合うことである. 図形表示 K と L で考えれば, K が L, あるいはその鏡像 L^* と全同位 (ambient isotopic) となることである.)

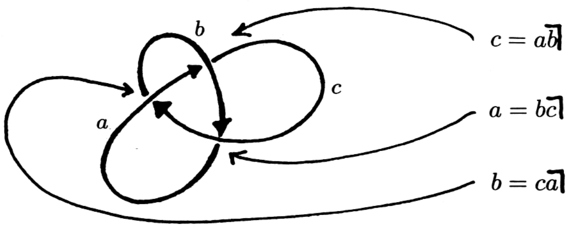
クリスタルを定義する前に, いくつか代数的な記法を用意しよう. 特に, 作用素の記法 $\overline{a}\!\rceil$ (" a 交差"と読む) を用いて, 非結合的な式を非可換な作用素の式に置き換える方法を説明していく. 厳密に言うと, 上で示した交差 ($\rceil$) は**右交差** (right cross) である. 同様に**左交差** (left cross)($\lceil$: $\lceil\!\overline{a}$ のように書く) があり, この交差の 2 つの表し方は, 次のように図形表示の交差点における向き付けの異なる 2 つのタイプを表すことになる:



この定式化において, 絡み目の図形表示 K 上の各々の弧に文字 $(a, b, c, \cdots)$ が付けられている. この模型において, この弧を**演算弧** (operand) とよぶ. 同時にこの弧は作用素の形をとり, 交差点に応じて右交差, あるいは左交差がつけられる.

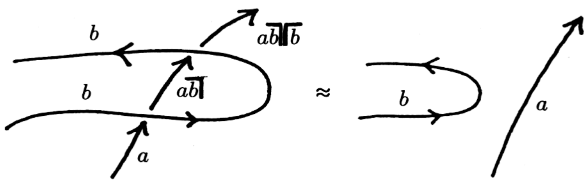
上で図示したように, 上交差の弧 b が入ってくる下交差の弧 a に作用した結果, 弧 c が出現する, とみなしている. したがって, 交差点が右手系か左手系に応じて, $c = a\overline{b}\!\rceil$ あるいは $c = a\lceil\!\overline{b}$ と書く.

この段階では, これらの記法は単に代数系にすぎず, むしろ結び目に対して**コード** (code) を構成している. 例えば三葉結び目 (trefoil) の場合, 次のように 3 つのコードの等式が得られる.



この記法で, かつ結び目や絡み目の正則同値の不変量を与える最も簡単な代数は何であろうか?

この問に答えるために, Reidemeister 移動のもとで, この式がどうなるかを調べてみよう. 最初に移動 II を考える:

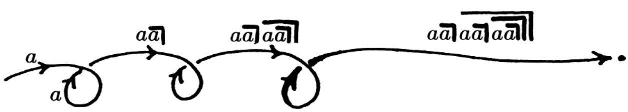


この図より, II 型の不変性が, 任意の a, b に対し

$$a\overline{b}\rceil\lceil\overline{b} = a, \qquad a\lceil\overline{b}\,\overline{b}\rceil = a$$

という式に対応していることがわかる. さらに, 代数を構成するためには, 任意の 2 つの元 x, y に対し, x と $\overline{y}\rceil$ の積が $x\overline{y}\rceil$ を, x と $\lceil\overline{y}$ の積が $x\lceil\overline{y}$ を構成していると考えることが必要となるだろう.

例題.



任意の 2 つの元 x, y から $x\overline{y}\rceil$ を構成できるからといって, 図形表示上で幾何的解釈をもつとは限らない. また, 記号を並べて積を表すのであるから, **結合的**であるが**非可換**であると仮定しているのである.

結び目の図形表示において, 交差のない x, y では積 $x\overline{y}\rceil$ を作る必要はなく, クリスタルにおいてこのような積は必要ない. しかし, 交差のない a_0 に対して, $a_0\overline{b_1}\rceil\overline{b_2}\rceil\overline{b_3}\rceil\cdots\overline{b_k}\rceil$ の形の積は自然に起こり得るのだから,

$$\overline{\overline{a}\rceil b\overline{c}\rceil}\rceil\overline{d}\rceil$$

のような交差をもつ元の積は考えておく必要がある．これを**作用素の積** (operator product) とよぶ．1 は空語を表しているものとしよう．作用素の積によって生成される代数 $\pi(K)$ を**作用素代数** (operator algebra) とよぶことにする．

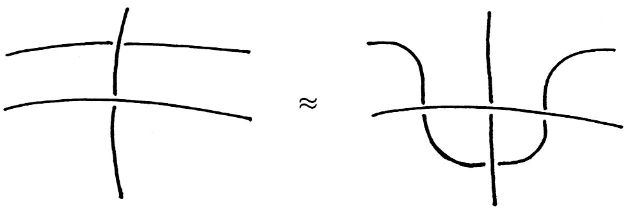
クリスタル $C(K)$ とは，$\pi(K)$ と**基本的クリスタル** (primary crystal) $C_0(K)$ の和集合のことで，基本的クリスタルとは，交差のない a と作用素代数の元 β の積 $a\beta$ の形をとる要素すべてによって構成されている集合のことである．したがって，作用素代数は基本的クリスタルに右からの積で作用し，基本的クリスタルは交差点により，作用素代数に移される．

クリスタルの任意の元 a, b に対し，$a\overline{b\rceil}\,\overline{\lceil b} = a$ としたいのだから，最初の公理 (自明な理由で II と名づける) は次のものとする．任意の $b \in C(K)$ に対して，

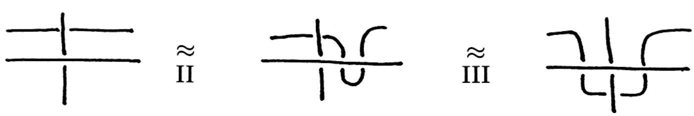
II. $$\overline{b\rceil}\,\overline{\lceil b} = \overline{\lceil b}\,\overline{b\rceil} = 1.$$

この等式は $\pi(K)$ におけるものであり，この結果，$\pi(K)$ が群になることに注意されたい．さらにもう 1 つ公理を加えると，$\pi(K)$ が絡み目 K の基本群と同型になることがわかる．

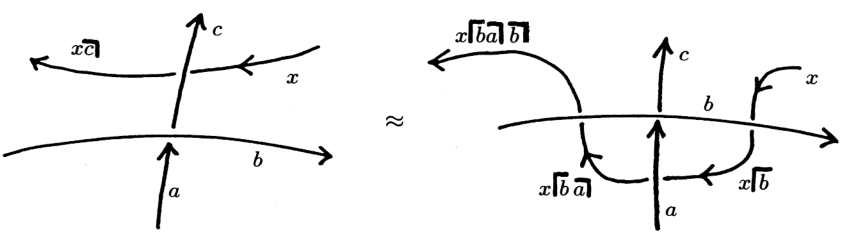
公理を加える前に，移動 III について調べなければならない．**遠回り** (detour) とよばれる次の移動を使う：



移動 II があれば，遠回りの移動は移動 III と同値になることがわかる：



ここで，遠回りを代数的に調べてみよう：



以上により, 公理は次のようになるべきである:

$$c = a\overline{b}\rceil \text{ のとき}, \quad \overline{c}\rceil = \lceil\overline{b}a\rceil\overline{b}\rceil.$$

あるいは より簡潔に:

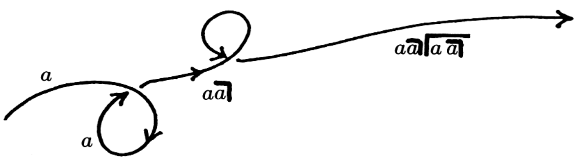
D. $$\overline{a\,\overline{b}\rceil}\rceil = \lceil\overline{b}a\rceil\overline{b}\rceil \qquad \text{(D は遠回りを表す)}$$

この規則は, 向きに依存していろいろな形をとり得る. すなわち,

$$\lceil\overline{a\overline{b}\rceil} = \lceil\overline{b}\lceil\overline{a\overline{b}\rceil}, \qquad \overline{a\lceil\overline{b}}\rceil = \overline{b}\rceil\overline{a}\rceil\lceil\overline{b}, \qquad \lceil\overline{a\lceil\overline{b}} = \overline{b}\rceil\lceil\overline{a}\lceil\overline{b}$$

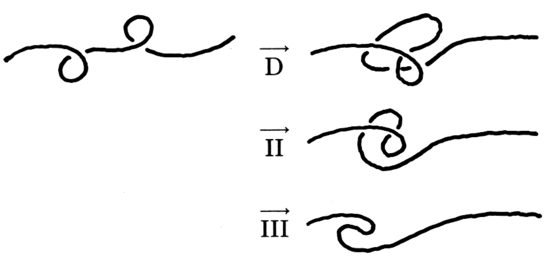
交差からみると, **遠回りの公理**は**深さを減少させる規則**なのである. 2 重の深さをもつ表示 ($\overline{a\overline{b}\rceil}\rceil$) を, 1 重の深さをもつ表示 ($\lceil\overline{b}a\rceil\overline{b}\rceil$) に置き換えていることになる. この置き換える方法は次のようである: 内部の交差のついた表示 ($\overline{b}\rceil$) は, 右側に内部と同じ形で写され, 左側には逆の形で写されている. 交差のついた表示 ($\overline{b}\rceil$) を中から移動させると, 前の表示は全体をおおっていた外側の交差と同じ交差がつく.

代数的な形におけるこれらの規則, $\overline{a}\rceil\lceil\overline{a} = 1$, $\overline{a\overline{b}\rceil}\rceil = \lceil\overline{b}a\rceil\overline{b}\rceil$ は, 正則同位の微妙な見方を捕らえている. 例えば:



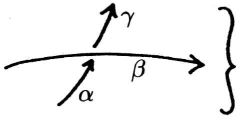
$$\left\{\begin{array}{lll} a\overline{a}\rceil\lceil\overline{a\overline{a}\rceil} & \underset{\mathrm{D}}{=} & a\overline{a}\rceil\lceil\overline{a}\lceil\overline{a}\,\overline{a}\rceil \\ & \underset{\mathrm{II}}{=} & a\lceil\overline{a\overline{a}\rceil} \\ & \underset{\mathrm{II}}{=} & a \end{array}\right\}$$

この代数的な同値性は, 遠回りの移動を用いた Whitney のトリックの動きに完全に一致している:



遠回りの公理を別の代数的視点からみると, 基本群との関係を示していることがわかる. Wirtinger 表示には, 各々の弧に生成元が, 各々の交差点に関係子が対応し

ている. 下の図のように交差点の符号が正であれば, 関係子は



$$\gamma = \beta^{-1}\alpha\beta$$

となる.

既にクリスタルでみたように, 交差点で弧に上図のようにラベル付けをしているとすると, 作用素の関係式

$$c\rceil = \lceil b\, a\rceil\, b\rceil$$

が得られる. すなわち, $\gamma = c\rceil, \alpha = a\rceil, \beta = b\rceil$ とおくと, これは $\gamma = \beta^{-1}\alpha\beta$ とみなすことができる. $\gamma = \beta^{-1}\alpha\beta$ は, 絡み目補空間の基本群の Wirtinger 表示において, 交差点における標準的な関係子なのだから, **作用素のなす群 $\pi(K)$ は, 絡み目の補空間の基本群と同型になる.**

いまや**クリスタルの形式的な定義**をいかにすべきかは明白であろう. 写像 $f, g : C_0 \longrightarrow \pi$ に対して, 記法 $a\rceil, \lceil a$ を用いて, $f(x) = x\rceil, g(x) = \lceil x$ とする. π を 2 項演算 $x, y \mapsto xy$ をもつ群とする. π は C_0 に右から次のように作用する

$$C_0 \times \pi \mapsto C_0 \quad ; \qquad (a, \lambda) \mapsto a\lambda$$

しかも, $(a\lambda)\mu = a(\lambda\mu)$ が成立する. さらに, 以下の条件を満たす:

II. 任意の $x \in C_0 \cup \pi$ について, $x\rceil\lceil x = 1$.

D. 任意の $x, y \in C_0 \cup \pi$ について, $\overline{xy}\rceil = \lceil y\, x\rceil\, y\rceil$
(および, この等式の他の 3 つの変化).

定義 13.1. **クリスタル** (crystal) とは, 写像 $\rceil, \lceil : C_0 \longrightarrow \pi$ をもつ集合 $C = C_0 \cup \pi$ である. ここで, C_0 と π は交わりがなく, π は C_0 に作用する群であり, C_0 から π への写像は上の条件 II と D を満たす. なお, 条件 D は, $\alpha \in \pi, a \in C_0$ に対し, $\overline{a\alpha}\rceil = \alpha^{-1}\, a\rceil\, \alpha, \lceil\overline{a\alpha} = \alpha^{-1} \lceil a\, \alpha$ とみなすこともできる.

定義 13.2. 2 つのクリスタル C, C' が**同型**であるとは, 以下の 3 つの条件を満たすような, $\Phi(C_0) = C_0', \Phi(\pi) = \pi'$ となる全単射 $\Phi : C \longrightarrow C'$ が存在することである.

1. 任意の $x \in C_0$ に対して, $\overline{\Phi(x)}\rceil = \Phi(x\rceil), \lceil\overline{\Phi(x)} = \Phi(\lceil x)$.
2. 任意の $x \in C_0, \alpha \in \pi$ に対して,$\Phi(x\alpha) = \Phi(x)\Phi(\alpha)$.
3. $\Phi|_\pi$ は群の同型写像である.

定義 13.3. K を有向絡み目の図形表示とする. 図形の各々の弧に, $C_0(K)$ の生成元を, 各々の交差点に ($c = a\, b\rceil$ あるいは $c = a\lceil b$ という形の) 関係子をつけるこ

とにより, **絡み目クリスタル** $C(K)$ を K に対応させる. (上に示したような) 積を認め, 公理を規定した後, 同値類をとることにより得られる構造がクリスタルには入っているものとする.

例題. $C(K) = (a, b, c \,|\, c = a\overline{b}\rceil, b = c\overline{a}\rceil, a = b\overline{c}\rceil)$.

ここでは, 関係子 $r_1, r_2, \cdots, r_m$ を法とする $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 上の自由クリスタルを表す省略形

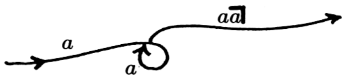
$$C(K) = (a_1, a_2, \cdots, a_n | r_1, r_2, \cdots, r_m)$$

を採用している.

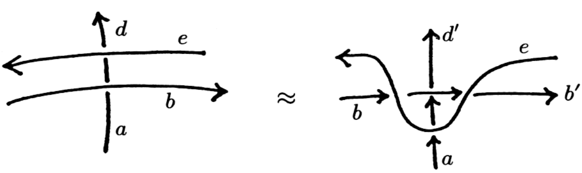
クリスタルには,「基本群 $\pi(K)$ がその "周辺 (peripheral)" 集合 $C_0(K)$ にどのように作用しているか」という情報があるので, 基本群よりも多くの情報をもっているのである. 実際, 2 つの結び目 K と K' が同型なクリスタルをもつならば, K は, K' かその鏡像 K'^{*} に全同位になってしまう. このことは, クリスタルに David Joyce のクワンドル [JOY] を関連づけることにより得られるのだが, その前に次の定理を示しておく.

定理 13.4. K と K' を 2 つの有向絡み目の図形表示とする. K が K' に正則同位ならば, $C(K)$ と $C(K')$ は同型である. また, K が K' に全同位ならば, $\pi(K)$ と $\pi(K')$ は同型である.

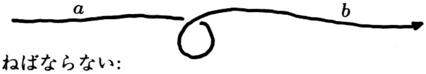
証明. $\overline{a\overline{a}}\rceil = \lceil a\overline{a}\rceil\,\overline{a}\rceil = \overline{a}\rceil$ であるから, $\pi(K)$ は Reidemeister 移動 I



のもとで不変である[†]. [$C(K)$ になると, $a\overline{a}\rceil$が a と等しいとは主張できないので, I 型のもとで不変ではない.] あとは, 遠回りの移動の "上"への交差の場合を調べるとよい.



[†]訳注: Reidemeister 移動 I のもとで不変であることを示すには, この図と逆のカール



についても, $\overline{a}\rceil = \overline{b}\rceil$ を示さねばならない:

$$\overline{a}\rceil = \lceil\overline{b}\overline{b}\rceil\,\overline{a}\rceil\lceil\overline{b}\overline{b}\rceil = \lceil\overline{b}a\rceil\overline{\lceil b}\rceil\,\overline{b}\rceil = \lceil\overline{b}\overline{b}\rceil\overline{b}\rceil = \overline{b}\rceil$$

上の図形表示を見ると, $d = a\overline{b}\rceil\lceil\overline{e}, d' = a\lceil\overline{e b\lceil\overline{e}}\rceil, b' = b\lceil\overline{ee}\rceil$ となっている. したがって,

$$d' = a\lceil\overline{e}\lceil\overline{b\lceil\overline{e}} = a\lceil\overline{ee}\rceil\overline{b}\rceil\lceil\overline{e} = a\overline{b}\rceil\lceil\overline{e} = d.$$

同様に, (いく通りかの向きの変化を法として) 残りの 3 つの場合も, II 型と III 型の移動のもとでの $C(K)$ 不変性が示される. よって, $C(K)$ は正則同位の不変量である. □

クワンドル (Quandle).

K を有向絡み目, $C(K)$ を K のクリスタルとする. $C_0(K)$ 上に 2 項演算 $*$ と $\overline{*}$ を, 次のように定義する:

$$a * b = a\overline{b}\rceil, \qquad a \mathbin{\overline{*}} b = a\lceil\overline{b}.$$

補題 13.5.

$$\begin{aligned} (a * b) \mathbin{\overline{*}} b &= a, \\ (a * b) * c &= (a * c) * (b * c) \end{aligned}$$

(ここで, $*$ と $\overline{*}$ を入れ換えても, 同様な等式が成立する.)

証明.

$$\begin{aligned} &(a * b) \mathbin{\overline{*}} b = a\overline{b}\rceil\lceil\overline{b} = a\ , \\ &(a * b) * c = a\,\overline{b}\rceil\overline{c}\rceil, \\ &(a * c) * (b * c) = a\overline{c}\rceil\overline{b\overline{c}\rceil}\rceil = a\overline{c}\rceil\lceil\overline{c}\,\overline{b}\rceil\overline{c}\rceil = a\overline{b}\rceil\overline{c}\rceil = (a * b) * c. \end{aligned}$$

よって, 証明された. □

任意の $a \in C_0(K)$ に対して, $a * a = a, a \mathbin{\overline{*}} a = a$ という公理を加えることによって $(C_0(K), *, \overline{*})$ から得られる商を, $Q(K)$ とする. すると, $Q(K)$ は 2 項演算をもつ代数となり, (新しく加えた公理によって, 移動 I を考え) K の全同位の不変量となる.

K に対して, 弧にラベル $\{a_1, \cdots, a_n\}$ を付け, $*$ と $\overline{*}$ のもとでラベルの形式的な積 (結合的でない積) すべてからなる集合を考え, それを次の**クワンドルの公理** [JOY] で割った商集合が, $Q(K)$ である.

1. 任意の a に対し, $a * a = a$, $a \mathbin{\overline{*}} a = a$.
2. 任意の a と b に対し,$(a * b) \mathbin{\overline{*}} b = a$, $(a \mathbin{\overline{*}} b) * b = a$.
3. $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$, $(a \mathbin{\overline{*}} b) \mathbin{\overline{*}} c = (a \mathbin{\overline{*}} c) \mathbin{\overline{*}} (b \mathbin{\overline{*}} c)$.

すなわち, $Q(K)$ は Joyce のクワンドルと同じものであり, このことから, クリスタル $C(K)$ が向き付けられた結び目を, 鏡像を除いて, 分類することがわかる.

クワンドルは非結合代数である. クリスタルでは, 非結合性を作用素の記法によって逃れることができる:

$$(a*b)*c = a\,\overline{b}\rceil\overline{c}\rceil, \qquad a*(b*c) = a\,\overline{b\,\overline{c}\rceil}\rceil$$

クワンドルにおける (例えば, $((a*b)*c)*d$ のような) 左からの結合積は, 深さ 1 の作用素の積に対応する:

$$((a*b)*c)*d = a\overline{\overline{b}\rceil\overline{c\,\overline{d}\rceil}\rceil}\rceil\ .$$

一方, 他の結合積は, 作用素が入り組んでしまう. 例えば, 次のようになる:

$$a*(b*(c*d)) = a\,\overline{b\,\overline{c\,\overline{d}\rceil}\rceil}\rceil.$$

結合積の重複度が原因で, クワンドルは扱いづらいように見える. しかし, クリスタルの 2 つめの公理 ($\overline{a\alpha}\rceil = \alpha^{-1}\overline{a}\rceil\alpha,\ a \in C_0, \alpha \in \pi$) により, 次がわかる.

定理 13.6. (Winker [WIN]) 任意のクワンドルの積は, 左からの結合積に書き換えられる.

この定理は,Winker の学位論文の核となるものである. これは, クワンドル の元の標準的な表示を与え, 結び目, 絡み目クワンドルの構造の広範囲な解析を可能にする. Winker はクリスタルによる定式化を用いておらず, クワンドルの中で直接この結果を示している. クリスタルによる証明を次に与える.

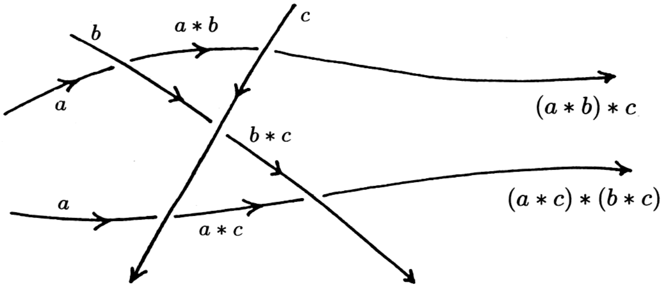
Winker の定理の証明. 任意の $a \in C_0, \alpha \in \pi$ に対する $\overline{a\alpha}\rceil = \alpha^{-1}\overline{a}\rceil\alpha$ と $\lceil\overline{a\alpha} = \alpha^{-1}\lceil\overline{a}\alpha$ の規則は, C_0 のどんな形式的積についても, 明らかに深さを減少させる. ある積が深さ 0 か 1 になると, クワンドルの記法では左からの結合積に対応することになり, 証明が終る. □

例題.

$$\begin{aligned} a*(b*c) &= a\overline{b\overline{c}\rceil}\rceil \\ &= a\lceil\overline{cb}\rceil\overline{c}\rceil \\ &= ((a \mathbin{\overline{*}} c)*b)*c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a*(b*(c*d)) &= a\,\overline{b\,\overline{c\,\overline{d}\rceil}\rceil}\rceil \\ &= a\overline{b\lceil\overline{dc}\rceil\overline{d}\rceil}\rceil \\ &= a\lceil\overline{d}\lceil\overline{cd}\rceil\overline{b}\rceil\lceil\overline{dc}\rceil\overline{d}\rceil \\ &= ((((((a \mathbin{\overline{*}} d) \mathbin{\overline{*}} c)*d)*b) \mathbin{\overline{*}} d)*c)*d. \end{aligned}$$

注意. クワンドルの公理は Reidemeister 移動のイメージとも一致する. 例えば,

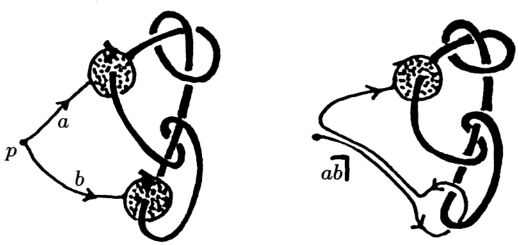


このように, 分配則 $(a*b)*c=(a*c)*(b*c)$ は, III 型の移動の形を表している.

注意. クワンドルには, ホモトピー論による解釈がある ([JOY] か [WIN] を参照のこと). そのアイデアは, $Q(K)$ の各元が, 結び目を横切る円板と基点 p と円板の境界を結ぶ紐からなる, いわゆる**投げ縄** (lasso) により表されているというものである:



2 つの投げ縄の積 $(a*b)$ は, b に沿う道によって a に**余分な紐をつける**ことによって得られる [基点から円板に向かい, $\overline{*}$ の場合はその方向に沿って ($*$ の場合は逆に) 円板を回り, 紐に沿って基点に戻る. そして a を付ける].



$a*b\equiv a\overline{b}\rceil$

この解釈では, $a*b=a\overline{b}\rceil$ と思うことができる. ただし, $\overline{b}\rceil$ は [紐に沿って進み, 円板を回って基点に帰ってくるような] b に対応する S^3-K の基本群の元である.

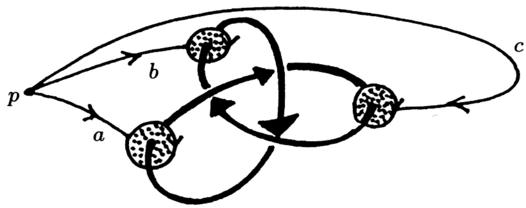


投げ縄の紐 b は絡み目と複雑にもつれるが, 元 $\overline{b|}$ (あるいは$\overline{|b}$) は, 群 π において, メリディアン (meridian) と共役である. ここでメリディアンとは, 基点から絡み目の弧に向かって進み, 弧を 1 回まわり, 基点に戻るものである. 図形表示においては, これらの生成元は, 次のように標準化できることになる:

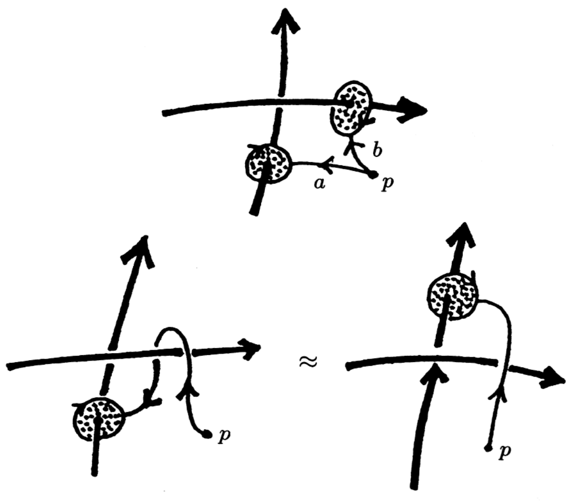
1) 非有界領域に基点をとる.

2) 投げ縄の紐は, 図形表示のすべての紐の上を通るものとする.

このように定めると, 三葉結び目 T に次のように生成元をとることができる:



この $a * b = a\overline{b|}$ の幾何的な定義から, ホモトピー的な解釈が可能となった:



交差点における関係式 $(c = a * b)$ は, 投げ縄 $a * b$ から投げ縄 c へのホモトピーを実際に表している. 基本群の言葉でいえば, (クリスタルで代数的にみたように) $\overline{c|} = \overline{b|}^{-1}\overline{a|}\,\overline{b|} = \overline{|b}\,\overline{a|}\,\overline{b|}$ となる. 投げ縄をすべらせることは, 基本群におけるこの関係式を図示するのに, 最適な方法である.

クワンドルのホモトピー的な解釈は, 幾何的な部分として, 関係式 $a * a = a$ と $a \mathbin{\overline{*}} a = a$ を含んでいる.

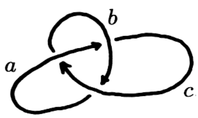
クリスタルラインの例.

1. クリスタルの最も簡単な例は, $a\overline{b}\rceil = 2b - a = a\lceil\overline{b}$ と定義することによって得られる. ここで, ある整数 m を法として, $a, b, \cdots \in \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ である. ここで,

$$
\begin{aligned}
a\overline{b}\rceil\overline{b}\rceil &= a\overline{b}\rceil\lceil\overline{b} = a,\\
x\overline{a\overline{b}\rceil}\rceil &= 2(a\overline{b}\rceil) - x = 2(2b - a) - x = 4b - 2b - x\\
&= 2b - (2a - (2b - x)) = x\lceil\overline{b}\overline{a}\rceil\overline{b}\rceil
\end{aligned}
$$

となることに注意する. この場合, 対応する群構造 π は $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ の加法群になる.

絡み目 K に対して, クリスタル構造, および図形表示 K の交差点の関係式と両立する最小の法 m $(m \neq 1)$ を求めることができる. 三葉結び目 (trefoil) に対しては ($\overline{a} = \overline{a}\rceil = \lceil\overline{a}$ を用いて) 次のようになる.

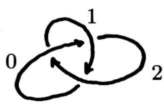


$$
\left.\begin{aligned}
c &= a\overline{b} = 2b - a\\
c &= c\overline{a} = 2a - c\\
a &= b\overline{c} = 2c - b
\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{aligned}
-a + 2b - c &= 0\\
2a - b - c &= 0\\
-a - b + 2c &= 0
\end{aligned}\right.
$$

$$
\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}
\underset{\text{行}}{\rightarrow}
\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\underset{\text{列}}{\rightarrow}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

(ここでは, 行と列の基本変形を行っている.) したがって, $m(K) = 3$.

三葉結び目に対する最小の法は 3 である. これは, 次の図形表示上のラベル付けに対応している.



$(2 \cdot 0 - 2 \equiv 1 \pmod 3)$.

したがって, 三葉結び目の 3 彩色が $(\mathbf{Z}/3\mathbf{Z})$–クリスタルに対応しているのである. $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})$–クリスタルにおいて, $a\overline{a} = 2a - a = a$ となり, $m(K)$ は K の全同位の不変量になる. したがって, $m(K) = 3$ により, 三葉結び目が平凡でないことがわかるのである.

2. 例 1 の一般化の 1 つの方法は, $\overline{a}\rceil = \lceil\overline{a}$ となる最も一般的なクリスタルを考えることである. すなわち, 任意の $a, b \in \mathcal{C}_0$ に対し, $a\overline{b}\,\overline{b} = a$, かつ $\overline{a\overline{b}} = \overline{b}\overline{a}\overline{b}$ が必要になるのである. このようなクリスタルを, **光クリスタル** (light crystal) とよび, (これは, 偶発的クワンドル (involuntary quandle) [JOY] に対応している), $\mathcal{CL}(K)$ によって, 結び目 K の光クリスタルを表す. $\mathcal{CL}(K)$ は K の向きによらないことに注意されたい.

三葉結び目の場合, 次のようになる.

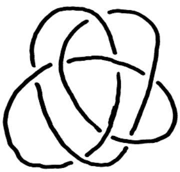


$$\begin{aligned} c &= a\overline{b} & & & a\overline{c} &= b\overline{c}\,\overline{c} = b \\ b &= c\overline{a} & &\Longrightarrow & b\overline{a} &= c\overline{a}\,\overline{a} = c \\ a &= b\overline{c} & & & c\overline{b} &= a\overline{b}\,\overline{b} = a \end{aligned}$$

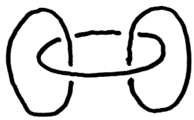
$x * y$	a	b	c
a	a	c	b
b	c	b	a
c	b	a	c

$\Big\}\ x * y = x\overline{y}$

この計算によると, 三葉結び目 (trefoil) T の場合, $\mathcal{CL}(T)$ は有限であり, $\mathcal{C}_0\mathcal{L}(T) = \{a, b, c\}, \pi\mathcal{L}(T) \simeq \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ となる. 一般に, 偶発的クワンドルは有限ではない. Winker [WIN] によると, 結び目の無限の偶発的クワンドルの例は, 8_{16} で生じる. また, 下図右のような比較的簡単な絡み目でも, 無限の偶発的クワンドルをもってしまう.



8_{16}



8 の字結び目 (figure eight) E について, 光クリスタル (偶発的クワンドル) を計算すると, おもしろいことがわかる. 有限なのだが, $\mathcal{C}_0\mathcal{L}(E)$ は 5 つの元からなり, 図形表示の線分より 1 つ多くなってしまう. (図形表示の線分の数より代数的な元のほうが多いという) この現象は, **クリスタル (またはクワンドル) が色分けの考えの一般化である**ことによる. 通常, 何色も色が与えられるのだが, 結び目や絡み目の特別な形が, これらの色の部分集合のみを使用しているということになるのである.

3. 最も重要なクリスタルの構造として, ([ALEX2] にちなんだ)**Alexander クリスタル**をあげることができる. $\mathcal{M}$ を環 $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ 上の加群とする. $a, b \in \mathcal{M}$ に対し, $a\overline{b}\rceil$ と $a\lceil\overline{b}$ を次の等式で定義する:

$$a\overline{b}\rceil = ta + (1-t)b, \qquad a\lceil\overline{b} = t^{-1}a + (1-t^{-1})b.$$

これらの等式は, クリスタルの公理を満たす:

$$\begin{aligned} a\overline{b}\rceil\lceil\overline{b} &= t^{-1}(ta + (1-t)b) + (1-t^{-1})b \\ &= a + (t^{-1}-1)b + (1-t^{-1})b \\ &= a \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a\overline{b\overline{c}\rceil}\rceil &= ta + (1-t)b\overline{c}\rceil \\
&= ta + (1-t)(tb + (1-t)c) \\
&= ta + (t-t^2)b + (1-t)^2 c
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a\lceil\overline{c}\overline{b}\rceil\overline{c}\rceil &= t(a\lceil\overline{c}\overline{b}\rceil) + (1-t)c \\
&= t(ta\lceil\overline{c} + (1-t)b) + (1-t)c \\
&= t(t(t^{-1}a + (1-t^{-1})c) + (1-t)b) + (1-t)c \\
&= ta + (t^2-t)c + (t-t^2)b + (1-t)c \\
&= ta + (t-t^2)b + (1-t)^2 c.
\end{aligned}
$$

したがって, $\overline{b}\rceil\lceil\overline{b} = 1$, $\overline{b\overline{c}\rceil}\rceil = \lceil\overline{c}\overline{b}\rceil\overline{c}\rceil$ である. 加群 $\mathcal{M}$ の Alexander クリスタルを $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ とすると, $\mathcal{C}_0(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ であり, $\pi(\mathcal{M})$ は写像

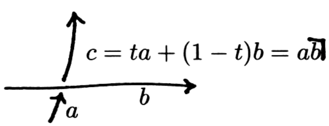
$$\overline{b}\rceil, \lceil\overline{b} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}, \qquad a\overline{b}\rceil = \overline{b}\rceil(a),\ a\lceil\overline{b} = \lceil\overline{b}(a)$$

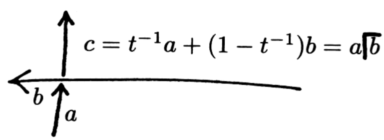
により生成される $\mathcal{M}$ の自己同型群である.

さらに次の関係に注意する:

$$a\overline{a}\rceil = ta + (1-t)a = a, \qquad a\lceil\overline{a} = t^{-1}a + (1-t^{-1})a = a.$$

よって, 各元 $a \in \mathcal{M}$ は, a を固定する自己同型 $a\ :\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ に対応している. 結び目理論の観点からすると, $\mathcal{A}(\mathcal{M})$ は全同位の不変量となる加群 $\mathcal{M}(K)$ (これは Alexander 加群とよばれる [CF],[FOX2]) を引き起こす. ここで, $\mathcal{M}(K)$ とは, 図形表示 K の辺のラベルによって生成され, 次の関係式を法として得られる $\mathbf{Z}[t,t^{-1}]$ 上の加群を意味する:





結び目の図形表示においては, 交差点の関係式のどの 1 つをとっても, 残りの関係式から得ることができる. よって, n 交差点の結び目の図形表示に対して, $(n-1)$ 個の交差点の関係式により, $\mathcal{M}(K)$ を計算することができる.

例題. 三葉結び目 T について調べてみる.

$$
\begin{aligned}
c &= a\overline{b}\rceil = ta + (1-t)b \\
b &= c\overline{a}\rceil = tc + (1-t)a \\
a &= b\overline{c}\rceil = tb + (1-t)c
\end{aligned}
$$

ここで, $\mathcal{M}(T)$ は次の関係式により得られるが, 最初の関係式は残り 2 つの関係式の和の (-1) 倍となっている.

$$ta + (1-t)b - c = 0$$
$$(1-t)a - b + tc = 0$$
$$-a + tb + (1-t)c = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} t & 1-t & -1 \\ 1-t & -1 & t \\ -1 & t & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

詳しく考察すると, **関係子行列の任意の $(n-1) \times (n-1)$ 小行列の行列式は, $\mathbf{Z}[t, t^{-1}]$ において, 任意の $m \in \mathcal{M}$ に対して $f(t) \cdot m = 0$ となる Laurent 多項式 $f(t)$ というイデアルを生成する.** この行列式は, 符号と t の累乗を除いて定まり, **Alexander 多項式** $\Delta(t)$ とよばれる. Alexander 多項式は結び目の全同位の不変量である.

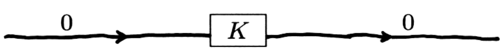
三葉結び目 T の場合は, 次のようになる:

$$\Delta_T(t) \doteq \mathrm{Det}\begin{pmatrix} -1 & t \\ t & 1-t \end{pmatrix} = (t-1) - t^2$$
$$\doteq t^2 - t + 1$$

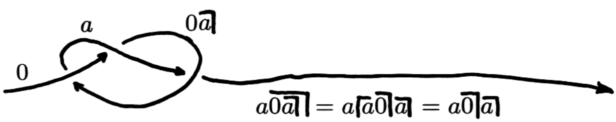
(ここで, $\doteq$ は t の符号と累乗を除いて一致するという意味を表す.)

Alexander 多項式を最初にあげたクリスタルの例, すなわち法 m による例の一般化とも考えることができる.

Alexander 多項式を計算するだけならば, 図形表示に直接関係子をおいてよい. 始めに図形表示を切ってしまい, 2 糸タングルとして 0 という値が入力かつ出力しているとする:



例えば,



次の式に注意する:

$$x0\rceil = tx + (1-t)0 = tx, \qquad x\lceil 0 = t^{-1}x + (1-t^{-1})0 = t^{-1}x.$$

したがって,

$$a\overline{0}\rceil\overline{a}\rceil = t(ta) + (1-t)a = (t^2 - t + 1)a = \Delta(t)a.$$

$\Delta(t)a = 0$ という条件により, $\Delta(t) = t^2 - t + 1$ が Alexander 多項式である.

山高帽子から兎が出るように, 突然に Alexander クリスタルが出現したが, 実際, 次の結果により Alexander クリスタルは, クリスタルの公理の一意的な線形表現として, 必然的に出てくることがわかる.

定理 13.7. $\mathcal{M}$ を可換環 R 上の階数 3 以上の自由加群とする. また, $\mathcal{M}$ が次の式で定義される演算をもつクリスタルの構造をもっているものとする:

$$a\overline{b}\rceil = ra + sb, \qquad a\lceil\overline{b} = r'a + s'b$$

ここで, $r, s, r', s' \in R$ とし, $a, b \in \mathcal{M}$ とする. もし,r, s, r', s' が R において可逆な元ならば, $r = t,\ \ s = 1 - t,\ \ r' = t^{-1},\ \ s' = 1 - t^{-1}$ とおける. したがって, この線形的な表現は, 必然的に Alexander クリスタルの形をもつ.

証明. 仮定より, a, b を R 上独立な元としてよい. クリスタルの構造 $a\overline{b}\rceil\lceil\overline{b} = a$ より, $a = (ra + sb)\lceil\overline{b} = rr'a + (r's + s')b$. よって, $rr' = 1,\ \ r's + s' = 0$. $a\lceil\overline{b}\,\overline{b}\rceil = a$ に対して同様に計算すると, $r'r = 1,\ \ rs' + s = 0$. r と r' は互いに可逆な元となり, $r' = r^{-1}$. 一方, $r^{-1}s + s' = 0,\ \ rs' + s = 0$. よって, $s' = -r^{-1}s, r' = r^{-1}$. ここで, 等式 $x\overline{a\overline{b}\rceil}\rceil = x\lceil\overline{b}\,\overline{a}\rceil\overline{b}\rceil$ に代入してみる:

$$\begin{aligned}
x\overline{a\overline{b}\rceil}\rceil &= x\overline{ra + sb}\rceil = rx + s(ra + sb) \\
x\lceil\overline{b}\,\overline{a}\rceil\overline{b}\rceil &= r(r(r'x + s'b) + sa) + sb \\
&= rx + r^2s'b + rsa + sb \\
&= rx + (r^2s' + s)b + rsa \\
&= rx + (-rs + s)b + rsa. \quad (s' = -r^{-1}s)
\end{aligned}$$

したがって, さらに次の条件が得られる:

$$s^2 = -rs + s \ \Rightarrow\ s = 1 - r.$$

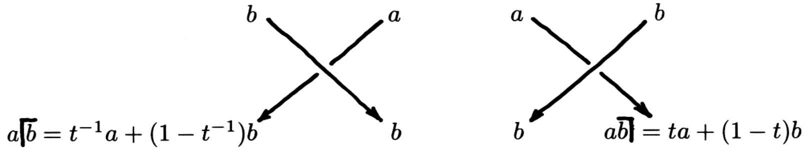
以上により, $r = t$ とおくと, $s = 1 - t,\ \ r' = t^{-1},\ \ s' = 1 - t^{-1}$ となる. □

注意. この定理は, 絡み目の正則表示の色付けに対し, 組合せ的に考察することによって, 古典的な Alexander 加群が自然にかつ直接得られることを示している. 読者には, 被覆空間を用いる古典的な扱い ([FOX],[LK3],[ROLF]) との比較をしていただきたい.

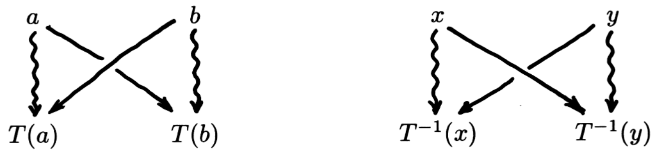
Burau 表現.

これまでに Alexander 多項式を Yang-Baxter 模型の枠組みの中で説明したが，実は，Alexander 加群と Alexander 多項式の統計力学模型における R 行列の間には注目すべき関係があるのである．

この関係をみるために，まず Alexander クリスタルから**ブレイド群の Burau 表現**を取り出す必要がある:



a, b をベクトル空間 V の基底の元としよう．$T : V \longrightarrow V$ を，$T(b) = ab = ta + (1-t)b$, $T(a) = b$ と定義する．



この基底に関し，T は次の行列をもつ (行列も T で表す):

$$T = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 1-t \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} = \begin{bmatrix} 1-t^{-1} & 1 \\ t^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

n–糸ブレイド群 B_n の表現を得るために，次のようにおく:

$$\rho(\sigma_1) = \begin{bmatrix} [T] & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix}, \qquad \rho(\sigma_2) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & [T] & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix},$$

$$\rho(\sigma_{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \mathbf{0} \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & [T] \end{bmatrix}.$$

ここで, 大枠の行列のサイズは $n \times n$ であり, $[T]$ は 2×2 のブロックである. ($\rho(\sigma_i^{-1})$ は, 上の行列でブロック T を T^{-1} に置き換えればよい.)

クリスタルが不変量になっているという議論により, 写像

$$\rho : B_n \longrightarrow GL(n; \mathbf{Z}[t, t^{-1}])$$

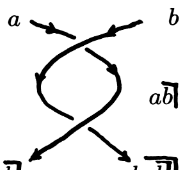
が, ブレイド群の表現になっていることがわかる. これが **Burau 表現**である.

この表現を用いて, Alexander 多項式を計算することができる.

命題 13.8. $w \in B_n$ を n–糸 Artin ブレイド群の元とし, $\rho(w) \in GL(n; \mathbf{Z}[t, t^{-1}])$ を Burau 表現のもとで w を表す行列とする. $n \times n$ 単位行列を I とし, $A(t) = \rho(w) - I$ とおく. このとき $A(t)$ はブレイド w の閉包の絡み目 $\overline{w}$ に対する Alexander 行列となっている (Alexander 行列とは, 前節であげた最後の例の Alexander 加群 $\mathcal{M}(\overline{w})$ に対する関係子行列のことである). □

注意. この命題は, $K = \overline{w}$ に対して, $\Delta_K(t)$ が $A(t)$ のすべての $(n-1) \times (n-1)$ 小行列の行列式によって生成されるイデアルの生成元になっていることを示している ([FOX] を見よ). いま考えている場合においては, $\Delta_K(t)$ が $A(t)$ の任意の $(n-1) \times (n-1)$ 小行列の行列式に (t の符号と累乗という不確定要素を除いて) 等しいことがわかる. $\Delta_K(t) \doteq \mathrm{Det}(A'(t))$ と書く. ここで $A'(t)$ は上で述べた小行列を表し, $\doteq$ は $\pm t^{\ell}$ ($\ell \in \mathbf{Z}$) の形の要素を除いて等しいという意味である.

この命題の証明は省略するが, 証明するには, $A'(t)$ がブレイドを閉じることによって, 加群 $\mathcal{M}$ の関係子になっていることを述べればよい. 例えば:



$$a\overline{b}\rceil = ta + (1-t)b$$

$$b\overline{a\overline{b}\rceil}\rceil = tb + (1-t)(ta + (1-t)b) = (t - t^2)a + (t + (1-t)^2)b = (t - t^2)a + (t^2 - t + 1)b$$

$$\rho(\sigma_1) = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 1-t \end{bmatrix},$$

$$\rho(\sigma_1^2) = \rho(\sigma_1)^2 = \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & t - t^2 \\ 1-t & t^2 - t + 1 \end{bmatrix}.$$

$\rho(\sigma_1^2)$ は, ブレイドの最初から終りまでの目録のようなものをつくっている. ブレイドを閉じると, 次の式が得られる:



$$\Rightarrow a = a\overline{b} = ta + (1-t)b$$
$$b = b\overline{a\overline{b}} = (t-t^2)a + (t^2-t+1)b$$

この関係式が行列 $A(t) = \rho(w) - I$ (ただし, $w = \sigma_1^2$) に一致している.

この例によると,

$$A(t) = \begin{bmatrix} t-1 & t-t^2 \\ 1-t & t^2-t \end{bmatrix}.$$

したがって, (1×1 小行列をとると)

$$\Delta\overline{w} \doteq t-1.$$

さらに, $K = \overline{\sigma}_1^3$ とおくと, 次のようになる:

$$\rho(\sigma_1^3) = \rho(\sigma_1)^3 = \begin{bmatrix} t & t-t^2 \\ 1-t & t^2-t+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & t \\ 1 & 1-t \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} t-t^2 & t^2+(1-t)(t-t^2) \\ t^2-t+1 & t(1-t)+(t^2-t+1)(1-t) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} t-t^2 & t-t^2+t^3 \\ t^2-t+1 & t^2-t^3-t+1 \end{bmatrix}$$

よって, $A_K(t) = \rho(\sigma_1)^3 - I = \begin{bmatrix} t-t^2-1 & t-t^2+t^3 \\ t^2-t+1 & t^2-t^3-t \end{bmatrix}$. したがって, 既に得たものと一致して, $\Delta_K(t) \doteq t^2-t+1$ となる.

演習. Burau 表現が忠実でないことが (John Moody [MD] によって) 示されたのは, つい最近 (1990 年春) のことである. すなわち, $\rho(b)$ が単位行列となる自明でないブレイド b が存在するのである. もちろん, $\rho(b)$ は b の Burau 表現のことである. Moody の例は次のような交換子である:

$$[765432'7'7'667765'4'32'1'23'456'7'7'6'6'7723'4'5'6'7', 7'7'87788778]$$

ここで, 7 は σ_7, 7′ は σ_7^{-1} を表し, $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ である.

Moody の 9–ブレイドの交換子において, ρ が単位行列であること, さらにブレイドが自明でないことを, 閉包をとると平凡でない絡み目ができることを用いて, 示せ.

Burau 表現からの R 行列.

本節の最後では, Burau 表現と, 前の第 12 節で Alexander-Conway 多項式の模型を得るために用いた R 行列との関係を示すことにする. Burau 表現は, V を $\mathbf{Z}[t,t^{-1}]$ 上の加群とするとき, ブレイドの生成元 σ_i と写像 $\rho(\sigma_i): V \longrightarrow V$ を関連づけるものとみなせる. $\Lambda^*(V)$ を V の外積代数とする. すなわち, $d=\dim(V/\mathbf{Z}[t,t^{-1}])$ とすると, $\Lambda^*(V)=\Lambda^0(V)\oplus\Lambda^1(V)\oplus\cdots\oplus\Lambda^d(V)$ となる. ここで, $\Lambda^0(V)=\mathbf{Z}[t,t^{-1}]$ であり, $\Lambda^k(V)$ は V の基底の元 $\{v_1,v_2,\cdots,v_d\}$ の形式的な積 $v_{i_1}\wedge\cdots\wedge v_{i_k}$ とそれらの $\mathbf{Z}[t,t^{-1}]$ の係数をもつものの和からなる. これらのウェッジ積は, 結合的で, 反可換 ($v_i\wedge v_j=-v_j\wedge v_i$) であり, かつ線形的 ($(v+w)\wedge z=(v\wedge z)+(w\wedge z)$) である. ρ を $\widehat{\rho}: B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Lambda^*(V))$ に拡張したとき, R 行列が生じることを見ていくのである. 筆者は Vaughan Jones [JO8] がこの点を指摘してくれたことに感謝している. この関係が, 古典的なトポロジーと YBE から生じるステイト模型の相互関係に関して, たくさんの興味深くかつ重要な問題を導いている.

ではここで構成法について述べよう: まず, 2–ブレイドに対する Burau 表現について考える. V が基底 $\{a,b\}$ $(a=v_1, b=v_2)$ をもつとすると,

$$\rho(\sigma)(a)=b, \qquad \rho(\sigma)(b)=ta+(1-t)b$$

$\Lambda^*(V)$ において $\{1,a,b,a\wedge b\}$ が基底となり, $\widehat{\rho}(\sigma)$ は次のように作用する:

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}(\sigma)(1)&=1\\
\widehat{\rho}(\sigma)(a)&=b\\
\widehat{\rho}(\sigma)(b)&=ta+(1-t)b\\
\widehat{\rho}(\sigma)(a\wedge b)&=(\rho(\sigma)(a))\wedge(\rho(\sigma)(b))=(-t)a\wedge b.
\end{aligned}$$

基底 $\{1,a,b,a\wedge b\}$ に対応する $\widehat{\rho}(\sigma)$ の行列を R とする:

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & t & 0\\ 0 & 1 & 1-t & 0\\ 0 & 0 & 0 & -t\end{bmatrix}.$$

付録にあげた判定の基準を用いると, R が YBE の解であることがわかる. 2–スピンのスピンを保つ模型に一致することをみるには,

$$\begin{aligned}
++ &\longleftrightarrow 1, \qquad & +- &\longleftrightarrow b\\
-+ &\longleftrightarrow a, \qquad & -- &\longleftrightarrow a\wedge b
\end{aligned}$$

とすればよい. すると

$R =$

	++	+−	−+	−−
++	1			
+−		0	t	
−+		1	$1-t$	
−−				$-t$

R が YBE を満たすことをみるには, 付録を参照されたい.

一方, 最初に t を t^{-2} に置き換え, さらにすべての列に t をかけるという操作により, 基底を変えることができる:

1			
	0	t	
	1	$1-t$	
			$-t$

$$\longmapsto$$

1			
	0	t^{-2}	
	1	$1-t^{-2}$	
			$-t^{-2}$

$$\longmapsto$$

t			
	0	t^{-1}	
	1	$t-t^{-1}$	
			$-t^{-1}$

ここで, 中央部分の 2×2 行列における基底を直接変える:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t^{-1} \\ t & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & x \end{bmatrix}\right)$$

すると, 次の行列が得られる.

t			
	0	1	
	1	$t-t^{-1}$	
			$-t^{-1}$

これが, 第 12 節で Alexander-Conway 多項式に対する模型を導くために用いた Yang-Baxter 行列である.

演習. FRT 構成 (第 10 節) を用いて, R 行列

$$R = \begin{bmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & t-t^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -t^{-1} \end{bmatrix}$$

に対応する双代数が, $T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し, 次の関係式と余積をもつことを示せ.

$$\text{関係式}\begin{cases} ba = -t^{-1}ab & db = tbd \\ ca = -t^{-1}ac & dc = tcd \\ bc = cb & \\ b^2 = c^2 = 0 & \\ ad - da = (t^{-1} - t)bc & \end{cases}$$

$$\text{余積}\begin{cases} \Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c \\ \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d \\ \Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c \\ \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d. \end{cases}$$

([LK23]p.314, [GE] を見よ. また [LEE], [LK18], [MUK2] と比較せよ.)

注意と問題. 表現 $\widehat{\rho}: B_n \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Lambda^*(V))$ を詳しく調べ, それが適当な基底により, 行列 $R(\widehat{\rho}(\sigma_i)) = I \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes R \otimes I \otimes \cdots \otimes I$ に対応していることを示すのは, 読者に委ねる. ここで, I は単位行列である.

第 12 節におけるステイト模型と (Burau 表現に関係した) Alexander 多項式の判別式による定義は, 上の注意により関係づけられる. 詳しい記述は [LK18],[JA8] を見ていただきたい. この関係のポイントは次の定理である.

定理 13.9. A を有限次元ベクトル空間 V の線形変換とする. $\widehat{A}:\Lambda^*(V)\longrightarrow\Lambda^*(V)$ を A の V の外積代数への拡張とし, $\mathcal{S}:\Lambda^*(V)\longrightarrow\Lambda^*(V)$ を $\mathcal{S}|\Lambda^k(V)(x)=(-\lambda)^k x$ で定義する. このとき, 次が成り立つ:

$$\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\mathrm{Tr}(\mathcal{S}\widehat{A}). \qquad \square$$

言い換えれば, 線形変換の特性多項式は, ベクトル空間の外積代数上の A に対応する変換のトレースによって表されることになる. このトレースこそが Alexander 多項式に対する統計力学模型に関係するものである.

[LK18] において H.Saleur と筆者は, Alexander 多項式に対するステイト模型の解釈が, 統計力学における自由フェルミ模型にぴったりと一致することを示し, また, ステイトの和が, 絡み目の図形表示に対する Berezin 積分で書き直せることを示した† . このことにより, 新しい方法による判別式で Alexander 多項式を表すことができる. Murakami [MUK2] によれば, 色分けされた絡み目の多変数 Alexander-Conway 多項式に対する Yang-Baxter 模型が, 同じ方法で得られるのである ([MUK3] と比較せよ).

一般に, Yang-Baxter ステイト模型を使って定義される結び目多項式は, (Alexander 加群のような)加群の零加群としての解釈はもたない. この方向に沿って第 12 節で与えたステイト模型を再定式化することは, 統計力学の観点における Alexander 多項式の古典的定理の解析, および Jones 多項式とその関連する定理の一般化への道を切り開くことになる.

演習 (Berezin 積分). Berezin 積分 [RY] は, Grassman 変数とともに考えると都合がよい. θを単一な Grassman 変数とすると, 定義により,

$$\int d\theta 1=0.$$

一方,

$$\int d\theta\theta=1.$$

そして必要ならば, $\theta d\theta=-d\theta\theta$ とする. $\theta^2=0$ より, θ の一般的な関数 $F(\theta)$ は, $F(\theta)=a+b\theta$ の形をしている. したがって,

$$\int d\theta F(\theta)=b=dF/d\theta$$

となり, 不思議なことになる.

$x^1,x^2,\cdots,x^n;y^1,y^2,\cdots,y^n$ を異なる反可換な Grassman 変数とする. すると, $(x^i)^2=(y^i)^2=0$. 一方, $i\neq j$ について, $x^ix^j=-x^jx^i$, $y^iy^j=-y^jy^i$ かつ

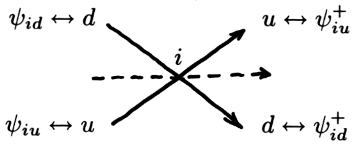
†訳注: 自由フェルミ模型やその他の可解模型から Alexander 多項式のステイト模型に対する R 行列が導かれることを最初に示したのは Deguchi [DE]* である.

$x^i y^j = y^j x^i$ となる. M を可換環上の $n \times n$ 行列とする. $x^t = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$, $y^t = (y^1, y^2, \cdots, y^n)$ とし, y は列行列とする. 次の式を示せ.

$$\mathrm{DET}(M) = (-1)^{n(n+1)/2} \int dx^1 \cdots dx^n dy^1 \cdots dy^n e^{x^t M y}$$

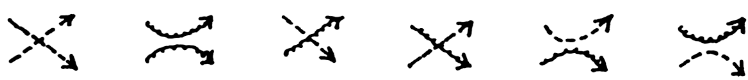
これが Berezin 積分である.

演習. この演習により, 自由フェルミ模型 ([SAM], [FW]) と第 12 節で述べた Alexander-Conway ステイト模型の関係 ([LK18]) が明らかになるであろう. 次のようにユニバース (絡み目の図形表示の影) のすべての線分に Grassman 変数を与える:



ここで, ψ^+ は出る方, ψ は入る方であり, u と d の名称は交点の方向に応じて, 上へ (up) か下へ (down) を意味している.

図形表示のステイトとは, 図形の各辺に+1 か−1 が与えられているものとする. −1 のラベルの辺は**フェルミ的** (fermionic), +1 の辺は**ボーズ的** (bosonic) とよばれる. 頂点の重みは, 次のように与えられているとする:



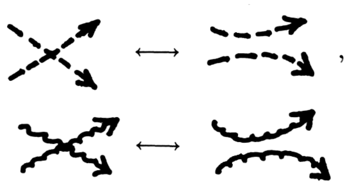
w_1　　w_2　　w_3　　w_4　　w_5　　w_6

ここで, 破線は+1 を, 波線は−1 を意味している.

K を図形表示とするとき, $\langle K \rangle$ はステイトの総和

$$\langle K \rangle = \sum_{\sigma} \langle K|\sigma \rangle (-1)^{\mathcal{L}(\sigma)}$$

を表し, σ は上のステイト全体, $\langle K|\sigma \rangle$ は与えられたステイトの頂点の重みの積, $\mathcal{L}(\sigma)$ はフェルミ的ループの数を意味している. ループの個数は, 一般的な分離 (下図に示す) によって数える:



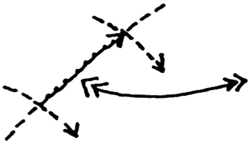
定数要素を除き, (もちろん, 異なる項点の重みを, 交点の2つのタイプに対応させることにより) 第12節の Alexander 多項式のステイト模型が上の形に置き換えられることを示せ. また, Alexander (Burau) R 行列に対し, 項点の重みが次の式を満たすことを確かめよ:

$$w_1w_2 = w_5w_6 - w_3w_4.$$

ここで, 模型の重みが "自由フェルミ条件" $w_1w_2 = w_5w_6 - w_3w_4$ を満たしていると仮定し, 話を進めよう. $w_2 = -1$ とおく. Grassman 形式は

$$d\psi d\psi^+ = \prod_i d\psi_i d\psi_i^+,$$

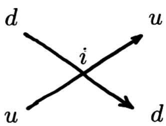
かつ $A = A_I + A_P$ と定義する. A_I (相互作用; interaction) と A_P (増殖; propagator) は以下のようなものである:



$\psi_{iu}^+\psi_{ju}$

$$A_P = \sum_{\langle i,j\rangle} \psi_{i\alpha}^+\psi_{j\beta}$$

A_P は, K の向き付けられた辺すべてに関して, その辺に対するフェルミ的生成と消滅の作用の積の総和である.



$$A_I|_i = w_3\psi_{id}\psi_{id}^+ + w_4\psi_{iu}\psi_{iu}^+ + w_5\psi_{iu}^+\psi_{id} + w_6\psi_{id}^+\psi_{iu}$$

A_I は, 上のようなすべての項点に関する相互作用の項の和である.

ここで, K を次のようなフェルミ的な入力と出力をもち, また1つずつの入力と出力をもつタングルのユニバースとする:



K

次の式を示せ:

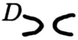
$$\langle K\rangle = \int d\psi d\psi^+ e^A$$

ここでの積分は Berezin 積分である. さらに, この式が次を満たす行列 $\mathbf{A}$ の存在を意味していることを示せ:

$$\langle K\rangle = \mathrm{Det}(\mathbf{A}).$$

14節　Kauffman 多項式

Kauffman 多項式 ([LK8], [JO5], [TH3], [TH4]) (Dubrovnik 版) は, 向き付けられていない絡み目 Kの正則同位の不変量 D_Kとして定義されている. $D_K = D_K(z, a)$ は 2 変数の多項式であり, 以下の条件を満たす:

1. $K \approx K' \Rightarrow D_K = D_{K'}$
2. D $- D$ $= z(D$ $- D$$)$
3. D $= \mu = ((a - a^{-1})/z) + 1,$

   D $= aD$ ,

   D $= a^{-1}D$

次の式で, (有向絡み目の) 全同位の不変量 Y_K に標準化される:

$$Y_K = a^{-w(K)} D_K.$$

ここで、$w(K)$ は Kの捻り数 (writhe) である.

この多項式には, L_K という同類の多項式がある. L_K は次の式を満たし, やはり正則同位の不変量である:

L $+ L$ $= z(L$ $+ L$$),$

L $= \lambda = \left(\dfrac{a + a^{-1}}{z}\right) - 1,$

L $= aL$,　　L $= a^{-1}L$ .

この L 多項式に $a = 1$ を代入すると, 1 変数の全同位の不変量 Q 多項式 ([BR]) になる. 同様に, L を 2 変数の全同位不変量に標準化する:

$$F_K(a, z) = a^{-w(K)} L_K.$$

実際, Fと Yという 2 つの多項式は変数の変換により, 同値になる. すなわち, 次の命題が成立する ([LICK2] と比較せよ).

命題 14.1. $c(K)$ を Kの成分数, $w(K)$ を捻り数とすると, 次が成り立つ:

$$L_K(z,a) = (-1)^{c(K)} i^{-w(K)} D_K(-iz, ia),$$
$$F_K(z,a) = (-1)^{c(K)} Y_K(-iz, ia). \qquad \square$$

(最初の式は, 当然向きの付いていない絡み目に対して成立する式だが, $w(K)$ を計算するためには, 任意に向きを与えてよい. なぜなら, $i^{-w(K)}$ は向きの付け方によらないからである. 2 番目の式は, 向きが重要な要素になっている.)

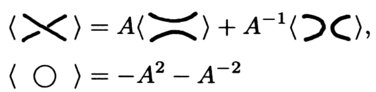
証明は読者に委ねるが, いくつかの重要な考察や例をあげよう.

***D* と *L* に対する考察.**

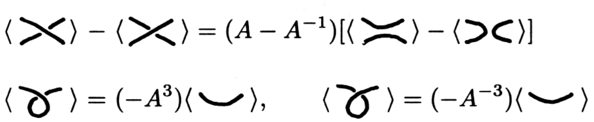
まず, $D(\bigcirc) = \mu, L(\bigcirc) = \lambda$ とおく. これはループの値であるが, ループと絡み目 Kの分離和 (disjoint union) $\bigcirc \coprod K$の多項式は, ループの値と Kの値の積になるという意味で重要である:

$$D(\bigcirc \textstyle\coprod K) = \mu D(K), \qquad L(\bigcirc \textstyle\coprod K) = \lambda L(K).$$

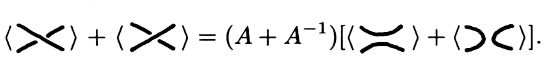
ブラケット多項式 (第 3 節を見よ) は, L と D 両方の特別な場合となっている.



したがって, **Jones 多項式も *F*と *Y*の特別な場合である.** 実際, 次のようになる:



よって, $\langle K\rangle(A) = D_K(A - A^{-1}, -A^3)$. 同様に,



よって, $\langle K\rangle(A) = LK(A + A^{-1}, -A^3)$. このことにより, Jones 多項式が Fと Yの特殊値であることが直接に計算できる. 次の式は, 既に示してある:

$$V_K(t) = f_K(t^{-1/4})/f_O(t^{-1/4}).$$

ここで,

$$f_K(A) = (-A^3)^{-w(K)} \langle K\rangle(A)$$

である. したがって,

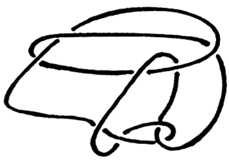
$$f_K(A) = Y_K(A - A^{-1}, -A^3), \qquad f_K(A) = F_K(A + A^{-1}, -A^3).$$

以上より，

$$V_K(t) = \frac{Y_K(t^{-1/4} - t^{1/4}, -t^{-3/4})}{-t^{-1/2} - t^{1/2}}, \qquad V_K(t) = \frac{F_K(t^{-1/4} + t^{1/4}, -t^{-3/4})}{-t^{-1/2} - t^{1/2}}.$$

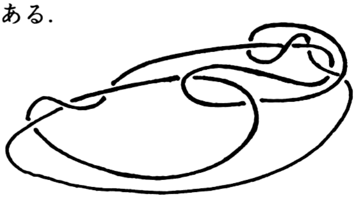
多項式 Fと Yは，カイラル性を判定するのにいくぶん都合がよい．Homfly 多項式より判定能力が少しよいという意味である．これらのことに関しては [LK8] を見ていただきたい．また [LK3] の本には，9 交差点までの結び目の L 多項式 (平凡な結び目が値 1 をもつように標準化してあるが) の表がある．Thislethwaite [TH5] は，12 交差点までのすべての結び目について，これらの多項式を計算している．

ここで，カイラル性に対して 2 つの例をあげよう：9_{42}の結び目はカイラルである．



9_{42}

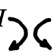
このカイラル性は，Fでも Homfly 多項式によっても判定できない．10_{79}の結び目もカイラルである．



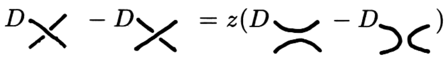
10_{79}

このカイラル性は F (と Y) で判定されるが，Homfly 多項式では判定されない．

Birman-Wenzl 代数.

Homfly 多項式に関連して代数 (Hecke 代数) が存在することは，既に述べた．Hecke 代数 $\mathcal{H}_n$は，ブレイド群 B_nの $\mathbf{Z}[z, z^{-1}, a, a^{-1}]$ 群環を関係式 $\sigma_i - \sigma_i^{-1} = z$ (または，$\sigma_i^2 = 1 + z\sigma_i$) で割った商環である．この関係式が対応する多項式の関係式 H $- H$ $= zH$ に一致し，そのことによって，Hecke 代数上でトレースが定義でき，ブレイドを Hecke 代数に持ち上げることによって，H多項式 (Homfly 多項式へ標準化されていない多項式) の値を求めることができる．Homfly 多項式を構成するために，代数レベルで，直接これらのトレースを構成する方法もある ([JO3] を見よ)．

同様に考えることにより，Kauffman 多項式に対する代数を得ることができる．

これが Birman-Wenzl 代数 [B1] である[†]．例えば, Dubrovnik 多項式を使うならば, 基本的な関係式は  であり, 形式的にブレイドの半群環における関係式:

$$\sigma_i - \sigma_i^{-1} = z(U_i - 1)$$

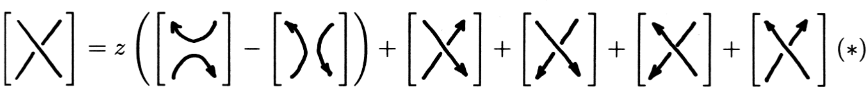
に対応している．ここで U_i は第 7 節で論じた i と $i+1$ 番目のカップ–キャップの組合せである．この代数により, ブレイドと Temperly-Lieb 生成元 U_iの相互作用が理解できる ([LK8] を見よ).

Jaeger の定理.

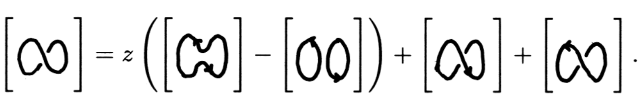
Homfly 多項式と Kauffman 多項式は別個のもので, 異なるトポロジー的な性質をもつものであるが, 両者の間にたいへん美しい関係がある．Francois Jaeger [JA9] による研究であり, 特別な場合は Reshetikhin [RES] によっても述べられている．

Jaeger によれば, Y 多項式は, 与えられた絡み目 Kに随伴するいくつかの絡み目の Homfly 多項式に何らかの重みを与え, それらの和をとったものになる．これは, Homfly 多項式 P_Kによって評価されるステイト上での, Y_Kのステイト展開式とみることができる．

Jaeger の構成のアイデアはたいへん簡単である．次のような定式化を考える:



この式の中の小さな図形は, (その箇所だけ異なる) 大きな図形表示の 1 部分であり, 対応する多項式の計算値を意味している．向き付けられた図形表示については, 多項式値 (Homfly 多項式) と回転数 (rotation number) によって計算される．詳しい計算方法は以下に述べる．(∗) は, 全体が有向絡み目の図形表示となるように, 矛盾なく矢印の指定されたステイトを要求している．例えば,



$[K]$ の展開式に対する**ステイト**は, Kのいくつかの交差点を分離し, 結果として得られる絡み目に向きを与えることによって得られる．(∗) の式は, ステイトに頂点の重みを与えていることになる．したがって,

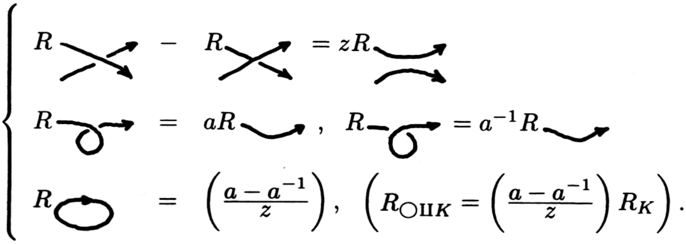
$$[K] = \sum_{\sigma} [K|\sigma][\sigma].$$

[†]訳注: Kauffman 多項式に対する代数は, J.Murakami [MUK4]* が最初である．

ここで, $[K|\sigma]$ は項点の重み ($\pm z$, あるいは 1) の積を表し, $[\sigma]$ は既に述べた有向絡み目σの計算値である. 具体的に, $[\sigma]$ を次の式で定義する:

$$[\sigma] = (ta^{-1})^{\mathrm{rot}(\sigma)} R_\sigma(t - t^{-1}, a)$$

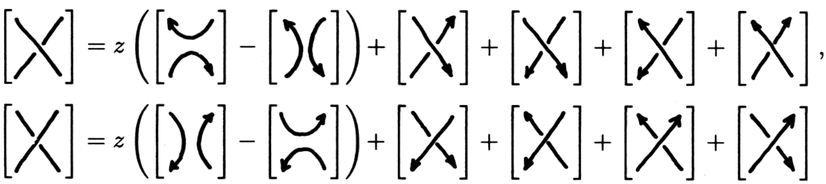
ただし, rot(σ) は絡み目σの回転数 (Whitney degree) を表し, $R_\sigma(z, a)$ は Homfly 多項式の正則同位版の多項式であり, 次の公理的定義で与えられるものである:



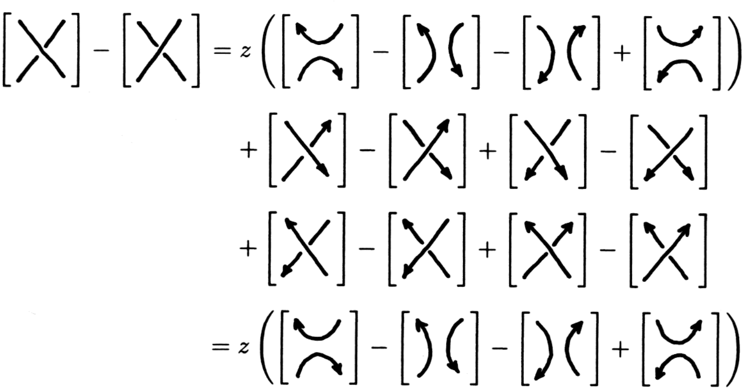
定理 14.2. (Jaeger) 上の記法のもとで, $[K]$ は Kauffman 多項式 (の Dubrovnik 版) の Homfly 多項式による展開式を与えている:

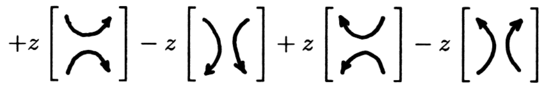
$$[K](t - t^{-1}, a) = D_K(t - t^{-1}, t^{-1}a^2).$$

略証. まず, 上で述べた模型が Dubrovnik 多項式の交換等式

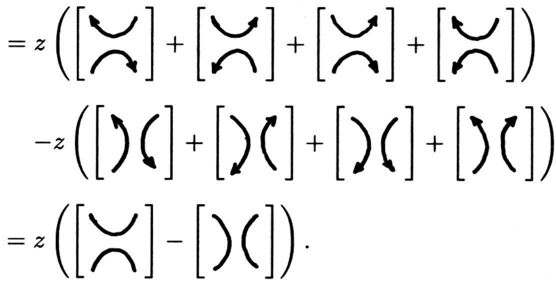


を満たすことに注意する. これらの等式から, 次が得られる:

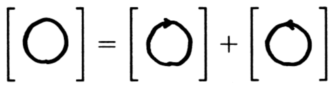




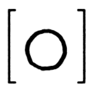
(ステイト展開に関する Conway 等式)



この模型におけるループの値は次で与えられることに注意する.



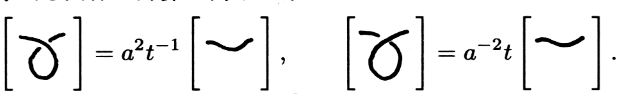
$$= (ta^{-1})^{-1}R_{\bigcirc} + (ta^{-1})R_{\bigcirc}$$
$$= (t^{-1}a + ta^{-1})\left(\frac{a - a^{-1}}{t - t^{-1}}\right)$$
$$= \frac{t - t^{-1} + t^{-1}a^2 - ta^{-2}}{t - t^{-1}}$$



$$= 1 + \frac{t^{-1}a^2 - ta^{-2}}{t - t^{-1}}.$$

これはまさに $D_K(t - t^{-1}, t^{-1}a^2)$ の μ の値である.

また次の等式も同様の計算で簡単に確かめることができる:

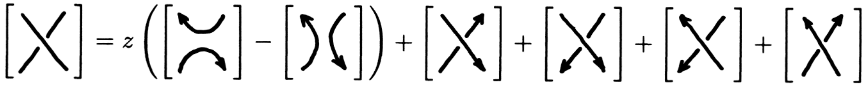


最後に, (R_σが正則同位の不変量であることに基づいて) $[K]$ が正則同位の不変量であることを確かめる必要があるが, これは省略する. 以上により, 定理が示された. □

考察. Dubrovnik 多項式のこの模型によって, R_K の模型に基づく D_K のある種の Yang-Baxter 模型が存在することがわかる. 実際,

$$D_K(t - t^{-1}, a^2t^{-1}) = \sum_\sigma [K|\sigma](ta^{-1})^{\mathrm{rot}(\sigma)}R_\sigma(t - t^{-1}, a)$$

という式が得られる．ここで，ステイトσは，向きの付いていない図形表示Kからいくつかの交差点を分離し，得られた絡み目に向きを与えることにより得られるものであった．展開公式 (*)



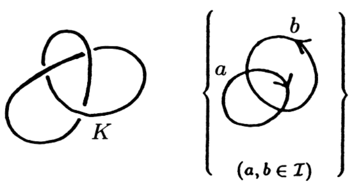
に従って，頂点の重みの積 $[K|\sigma]$ は$\pm z, 1$ の積であった．もし $a = t^{n+1}$とおくと，$R_\sigma(t - t^{-1}, t^{n+1})$ を第 11 節の Yang-Baxter 模型に置き換えられる．このことから，より深い研究に値する特別なD_Kの模型の集合が与えられる．

研究課題． 上で述べたD_Kの模型について研究せよ．

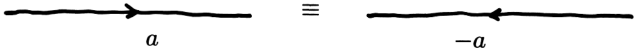
Yang-Baxter 模型と $SO(n)$ に対する量子群

D_Kに対する Yang-Baxter 模型への別の道がある．それは Homfly 多項式の説明で用いた Yang-Baxter の解から直接得られるものであり，もちろん，先にあげた (Dubrovnik 多項式の Homfly 展開を用いる) 模型もこの Yang-Baxter の解を基にしているとみることもできる．ここでは，今までにあげたものと類似のステイト構造を研究する．その過程で，群 $SO(n)$ に関連した Yang-Baxter の解が現れる．

アイデアは次のようなものである．K を向きの付いていない絡み目とする．結果として得られる図形表示 σ の各成分は，平面上の (自己交差のない) Jordan 曲線になっているように，まず Kのいくつかの交差点で分離し，射影する．このようにして得られたラベル付きの図形表示 σ を，Kのステイトσと定義する．**各成分には向きが付けられており，順序づけられた添字集合 $\mathcal{I}$ からのラベルが付けられている．** Kが三葉結び目の場合，下の図は Kの 1 つのステイトである．



ここで，$a \in \mathcal{I}$ **ならば** $-a \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \subset \mathbf{R}$: **実数) と仮定し，さらに向きとラベル** $(a \longmapsto -a)$ **を同時に変えたものは元のステイトと同値であるとみなす．**



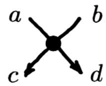
このことにより，次の図



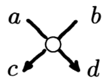
の成立を仮定しているので, 分離する場合に, ステイトは常に局所的に  の形であるとしてよい. この仮定のもとでは, ループの量 $||\sigma||$ を向きの付いている場合と同様にして,

$$||\sigma|| = \sum_{\ell \in \{\sigma \text{の成分}\}} \mathrm{rot}(\ell) \cdot \mathrm{label}(\ell)$$

と定義でき, 有向 R 行列を

 $\longleftrightarrow$ 

$\longleftrightarrow R^{ab}_{cd}$

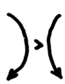
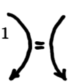
 $\longleftrightarrow$ 

$\longleftrightarrow \overline{R}^{ab}_{cd}$

で与えると, $[K|\sigma]$ は, 図形表示の交差点に対して R $(\overline{R})$ を割り当て, 頂点の重みの積をとったものと定義できる.

ステイトは, 各交差点で分離 () か, あるいは射影 () を実行しているので, R と $\overline{R}$ は $a = c, b = d$ あるいは $a = d, b = c$ のときのみ零でない. 実際, R と $\overline{R}$ として, これまでの節でおなじみとなった解の形

$R = (q - q^{-1})$  $+ q$  $+$  ,

$\overline{R} = (q^{-1} - q)$  $+ q^{-1}$  $+$ 

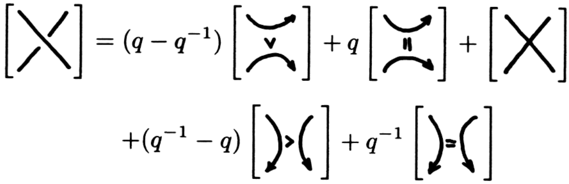
を使用する.

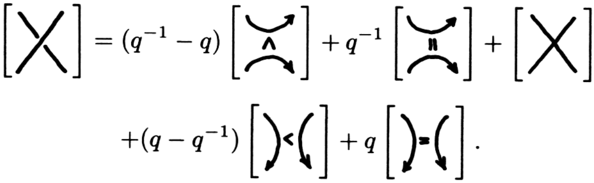
これらを用いると, ステイトの和は次のような定義になる:

$$[K] = \sum_{\sigma} [K|\sigma] q^{||\sigma||}.$$

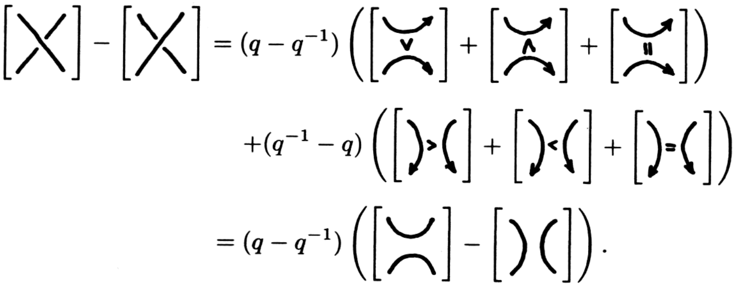
いまから, 添字集合をうまく選ぶと $[K]$ が Dubrovnik 多項式の模型となることをみていく.

添字集合 $\mathcal{I}$ について述べる前に, $[K]$ が交差交換の等式を満たすことを確認しておこう.





したがって,

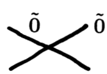


添字集合 $\mathcal{I}$ については, 2 つの場合があり,

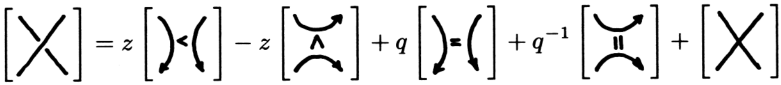
n が奇数ならば, $\mathcal{I}_n = \{-n, -n+2, \cdots, -1, \widetilde{0}, 1, 3, \cdots, n-2, n\}$,
n が偶数ならば, $\mathcal{I}_n = \{-n, -n+2, \cdots, -2, 0, \widetilde{0}, 2, 4, \cdots, n-2, n\}$

を採用する. ここで, 各添字集合に特別な零が存在していることに注意する. この特別な零は, 数としては通常の零と同じく $q^{\widetilde{0}} = 1$ のように作用する. また, 奇数の場合, 他の添字は 2 の間隔をおいているが, $\widetilde{0}$ は前後と 1 の間隔しかおいていないことにも注意する. この特別な零は次のようにして取り扱う.

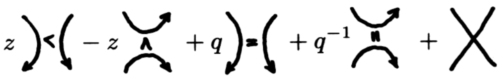
零の規則

1. n が奇数の場合,  の状態が現れたら  に置き換え, 頂点の重みは 1 にせよ. [通常の添字の場合, 交差の状態においては, 2 つのラインが異なる添字以外は, 重みが 0 になる.]
2. n が偶数の場合, 特別な零は, 添字 0 のコピーとして取り扱う.

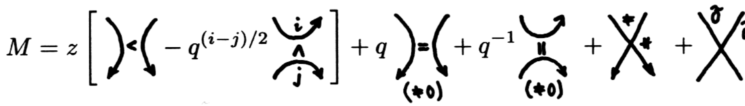
零の規則は正則同位の不変性に必要なのであり，移動 I のもとで乗法的になるのもこの規則による．これらの事柄を確かめていくのだが，まず，この模型から YBE の解を導いてみよう．模型は



のような形をしているのだから，対応する散乱行列も次の形と考えてしまう：



もちろん，ここで  は零の規則にも適用するようにしておく．しかしこの行列は YBE を満たさない．正確な行列は (n が奇数の場合)



である．ここでは，零の規則も図形表示の記法で記述してあるが，水平方向の分離において特別な要素 $q^{(i-j)/2}$ が現れている．**この特別な要素は，回転数により出現したものである．**

この特別な要素の原因を調べるために，模型の形

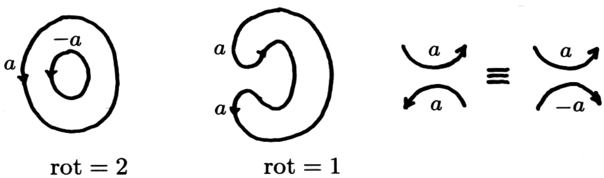
$$[K] = \sum_{\sigma} [K|\sigma] q^{||\sigma||}$$

を振り返ってみよう．この模型では 三角形の移動に対するステイトにおいて，$q^{||\sigma||}$ はもはや一定値ではなくなっている．この変化の最も簡単な (また，特徴的な) 例は，



の回転数の差にみることができる．

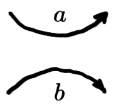
例えば，



rot = 2　　　rot = 1

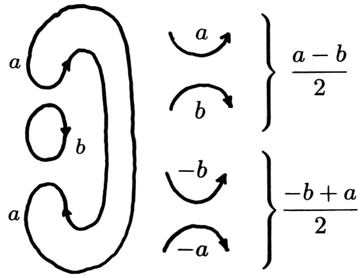
$||\sigma|| = 0$　　　$||\sigma'|| = a = (a-(-a))/2$

一般的な原因は，次の図形表示上に現れる q の累乗にある：



$\longleftrightarrow \quad q^{(a-b)/2}.$

ここで, 2 番目の例をあげよう.



$$||\sigma''|| = a - b = \left(\frac{a-b}{2}\right) + \left(\frac{-b+a}{2}\right).$$

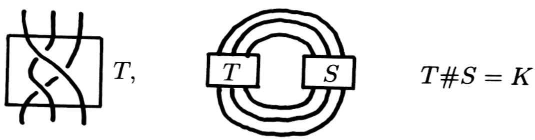
以上の考察により, Mが QYBE (Quantum 版 YBE) を満たすならば, $[K]$ は IIIA の三角形移動のもとで不変となる. したがって, 次が得られる:

命題 14.3. $[K]$ を向きの付いていない図形表示に対して, 上で述べたように定義する. Mが QYBE の解ならば, $[K]$ は移動 IIIA のもとで不変である.

証明. この模型では,

$$[K] = \sum_{\sigma} [K|\sigma] q^{||\sigma||}$$

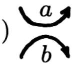
と定義した. $[K|\sigma]$ は, 向きの付いたステイトに対する頂点の重みの積であった. T を移動 III の状態に対するタングルとし, Sを Kの残りの部分を表すタングルとすると, タングルの和の意味で, $K = T\#S$ は以下のようになる:



(S は, 実際にはTの外側の平面全体のタングルである.)

Kの任意のステイトは, Tと S のステイトσ_Tとσ_Sの#和とみなすことができる. 移動 III に関する不変性をみるには, すべてのステイトσ_Tを考え, 任意に与えられたステイトσ_Sに対し, 総和

$$\sum_{\sigma_T \in \mathcal{S}(T,\sigma_S)} [K|\sigma] q^{||\sigma||}$$

が T に三角形移動を施しても不変であることを示さなければならない.(ここで $\sigma = \sigma_T \# \sigma_S$ で, $\mathcal{S}(T, \sigma_S)$ はσ_Sの端点の条件に合うような端点をもつTのステイト全体を表す.) 既に見たように, 任意のステイト$\sigma = \sigma_T \# \sigma_S$に対し, $||\sigma||$ は σ_Tにおける (Tの鉛直方向に対し水平になる)  の状態から得られる $(a-b)/2$ の形の和と, σ_Tの選び方によらない部分の和に分けられる. したがって,

$$||\sigma|| = \left[\sum_{\sigma_T \text{内の}} \left(\frac{a-b}{2} \right) \right] + c$$



である. ここで, c は σ_Tに依存しない量を表す. すると,

$$\sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}(T, \sigma_S) \\ \sigma = \sigma_T \# \sigma_S}} [K|\sigma] q^{||\sigma||} = \left[\sum_{\sigma_T} [K|\sigma] \prod q^{(a-b)/2} \right] q^c.$$

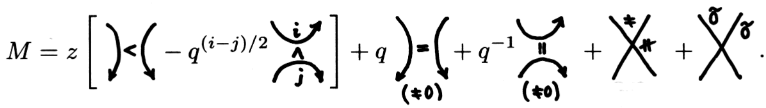
よって, 総和

$$\sum_{\sigma_T} [K|\sigma] \prod q^{(a-b)/2}$$

が, 三角形移動のもとで不変であることを示せばよい. もし, $q^{(a-b)/2}$ という項が特別な項点の重みとみなせるならば, この不変性は, 行列 Mが YBE の解であることにより直ちにわかり, 命題が証明される. □

実際, 零の規則の効果により, Mは YBE を満たすのである.

命題 14.4. 添字集合は, 既に述べたように零の規則をもつものとする. このとき, Mは QYBE の解である. ここで, Mは (これも既に述べたが) 次のように図形表示上で表される行列である:



考察. 命題を証明する前に, Mの一般的な形を考えてみよう: f^i_jを基本行列とする. すなわち, f^i_j は (i,j) 成分が 1 で他は 0 の行列である. ここで, i と j は添字集合 $\mathcal{I}$ に属する. n が奇数の場合として, $\mathcal{I} = \{-n, -n+2, \cdots, -1, \widetilde{0}, 1, 3, \cdots, n-2, n\}$ をとる. すると, Mは次のようになる:

$$M = z \left[\sum_{i<j} f^i_i \otimes f^j_j - q^{(i-j)/2} \sum_{i<j} f^i_{-j} \otimes f^{-i}_j \right]$$

$$+q\sum_{i\neq 0} f_i^i \otimes f_i^i + q^{-1}\sum_{i\neq 0} f_{-i}^i \otimes f_i^{-i}$$

$$+\sum_{i\neq j,-j} f_j^i \otimes f_i^j + f_{\widetilde{0}}^{\widetilde{0}} \otimes f_{\widetilde{0}}^{\widetilde{0}} \qquad (z = q - q^{-1}).$$

ここでは, 抽象テンソルの規約に対応するように, 添字を換えてある. つまり次のような対応をさせた:



$\equiv f_a^a$



$\equiv \sum_{i<j} f_i^i \otimes f_j^j,$



$\equiv \sum_{i\neq 0} f_i^i \otimes f_i^i$



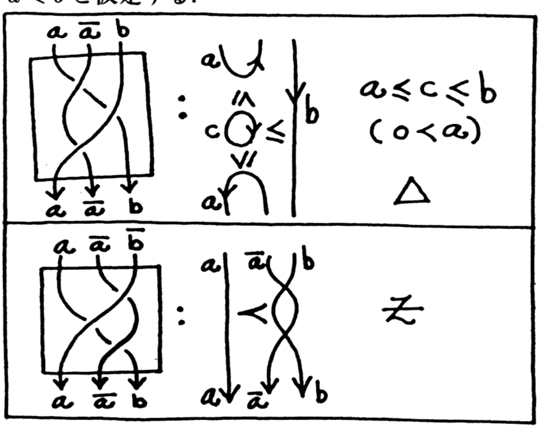
$\equiv \sum_{i\neq j,-j} f_j^i \otimes f_i^j.$

この規約を用いると, Mが [TU1], [RES], [JI2] で引用されている行列に直接に対応していることがわかる. [RES] においては, Mが QYBE を満たすことを, $SO(n)$ に対する量子群によって証明しており, 回転数がどのように表現論と関係しているかわかればおもしろいであろう.

以下の説明では, 再び Mに対して抽象テンソルの形を用いる. 図形表示上でみていくには, やはり抽象テンソルが役立つのである.

命題 14.4 の証明. n が奇数で, かつ大事な 2 つの場合のみを考えることにする. 以下では, $\overline{a}$ は a に負の符号をつけたもの: すなわち, $\overline{a} = -a$ という意味である.

Case 1. $0 < a < b$ と仮定する.



上の場合は, 中心のループが $a \le c \le b$ となるスピン c をもつ場合すべてについて, 和をとらなければならない. その合計を Δ とおく. 下の場合は z となる. Δ を計算すると, 次のようになる.

$$\Delta = q^{-2}z + (-z)^2 z \sum_{a<c<b} q^{(a-c)} + (-z)^2 q(q^{-2})^{k+1} \qquad (k = (b-a-2)/2)$$

$$= q^{-2}z + z^2 q(1-q^2)[q^{-2} + (q^{-2})^2 + \cdots + (q^{-2})^k] + z^2 q(q^{-2})^{k+1}$$

$$= q^{-2}z + z^2 q(1-q^{-2})[(q^{-2} - (q^{-2})^{k+1})/(1-q^{-2})] + z^2 q(q^{-2})^{k+1}$$

$$= q^{-2}z + z^2 q(q^{-2} - (q^{-2})^{k+1}) + z^2 q(q^{-2})^{k+1}$$

$$= q^{-2}z + z^2 q^{-1}$$

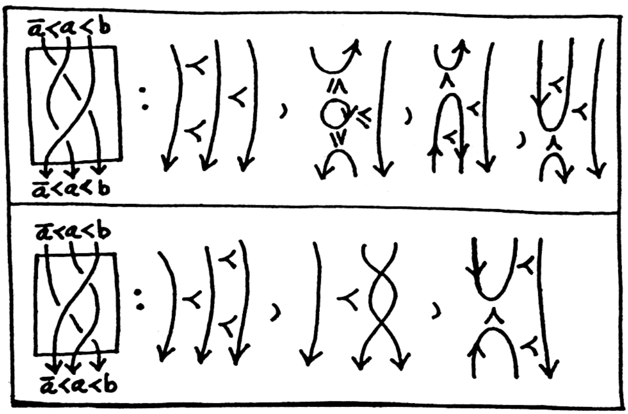
$$= (q^{-2} + zq^{-1})z$$

$$= (q^{-2} + 1 - q^{-2})z$$

$$\Delta = z.$$

したがって, 添字を上のように選んだ場合, M は YBE を満たすことになる.

Case 2.

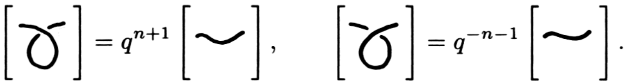


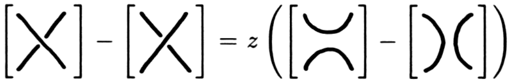
$\tilde{0}$ をループに代入して得られる余分な値は, 零の規則により, 上の部分の明らかに余分な項をちょうど消去することになる. したがって, 上の部分と下の部分は等しくなる.

以上の 2 つの場合が, 行列 M が YBE の解である証明の代表的な方法である. 残りの場合は読者に委ね, 証明を終る. □

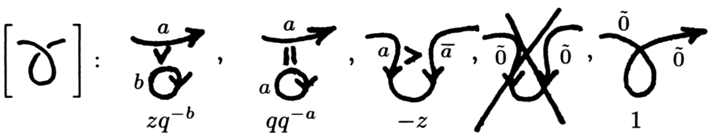
最終的に次の定理が得られることになる.

定理 14.5. 添字集合 $\mathcal{I}_n$ を今までと同様なものとすると, 模型 $[K]$ は正則同位の不変量となる. さらに, この模型は移動 I のもとで, 次の式のように乗法的になる:



この模型の定義により,  を満たすから, Kauffman 多項式の Dubrovnik 版に対して, 無限個の模型を与えたことになる.

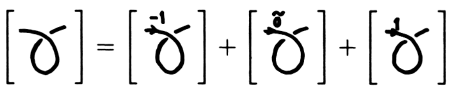
証明. 移動 IIB のもとでの不変性の証明は省略する. ここでは, 移動 I について確かめてみる. n が偶数のときは省略し, 奇数 n について, 添字集合 $\mathcal{I} = \{-n, -n+2, \cdots, -1, \widetilde{0}, 1, 3, 5, \cdots, n\}$ を採用する. 実際に, $\mathcal{I} = \{-1, \widetilde{0}, 1\}$ の場合を詳しく調べてみよう: 下の正則表示は,  に対して考えるべき 4 つのタイプのステイトとそれらの頂点の重みを表している.



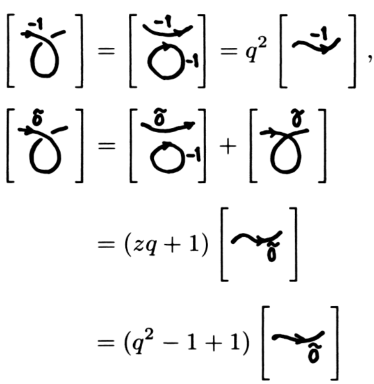
$(a \neq \widetilde{0})$

図の最後のものは, 零の規則を用いている.

添字集合 $\mathcal{I} = \{-1, \widetilde{0}, 1\}$ を用いると, 次のようになる:



ところで, 次が成り立つ:



$= q^2$  ,

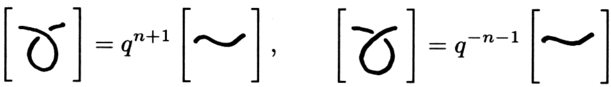


$= (zq + z + qq^{-1} - z)$ 

$= (q^2 - 1 + q - q^{-1} + 1 - q + q^{-1})$ 

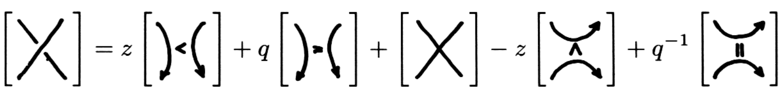
$= q^2$  .

以上の計算から, $\mathcal{I} = \{-1, \widetilde{0}, 1\}$ に対しては  $= q^2$  となる. $\mathcal{I} = \mathcal{I}_n$ に対しても, 同様に計算することにより,

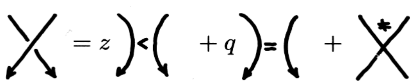


となる. これで証明は完了する. □

要約. この議論はまず, 次の展開式



を満たす D_K のステイト模型 $[K]$ の存在を仮定し, $SL(n)$ 上の R 行列

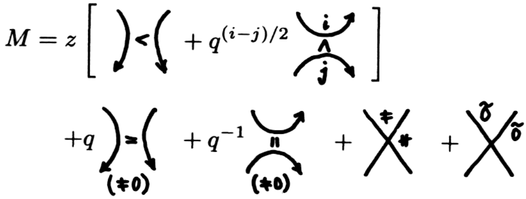


に対する頂点の重みを用いてスタートした. この考えが, 実際に有効な (特別な添字集合の) ステイト模型

$$[K] = \sum_{\sigma} [K|\sigma] q^{||\sigma||}$$

の発見につながった. ここでのステイトは, Kの交差点を, 互いに交わりをもつ Jordan 曲線の集合となるように分離するか, 射影することによって得られる. これらの Jordan 曲線に, 向きと添字集合からのラベルを付け, ステイトσと定義す

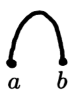
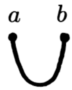
る. $[K|\sigma]$ は, 向きの付けられた R 行列からの項点の重みの積であり, $||\sigma||$ は σ における Jordan 曲線 ℓ に対する $\mathrm{rot}(\ell)\mathrm{label}(\ell)$ の総和である. YBE 方程式の第 2 の解は, この模型の構造から (前記の議論において特殊化した特別の添字集合のもとで) 次の行列によって生じたのであった.



この点から, 考察してきた模型が Turaev [TU1] によって構成された模型と一致することがわかる. 彼は, Jimbo [JI1] の仕事から得られる解 M からスタートしている. [RES] において Reshetikhin は, M が $SO(n)$ に対する量子群を解析することによって生じることを示している. $SL(n)$ と $SO(n)$ が, 量子群を通して関連づくことは, たいへん重要であろう. この見方においても, ステイトを通じてこれまでみてきた関係と同様に進行するストーリーがあるかもしれない. 特に, 回転数を補う要素 $q^{(i-j)/2}$ に対する量子群による解釈があるはずである. 最後に, 行列 M とその逆行列 $\overline{M}$ は, Birman-Wenzl 代数 [B1] の特別な表現を得るためにも使われることを述べておこう. このことは, ここで述べた模型の構造によって明らかである.

15 節　有向模型と区分的線形模型

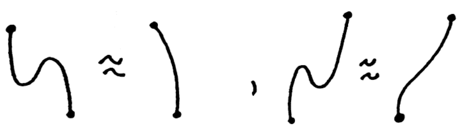
第 9 節の絡み目不変量に対する向きの付いていない抽象テンソルの模型を思い出していただきたい．その不変量は, 生成・消滅および次図のブレイドの作用素をもつ一般「真空」振幅とみなすことができた:

 $\longleftrightarrow M_{ab},$　　 $\longleftrightarrow M^{ab},$

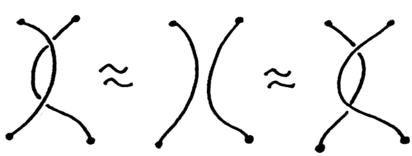
 $\longleftrightarrow R^{ab}_{cd},$　　 $\longleftrightarrow \overline{R}^{ab}_{cd},$

この見方の根底にあるトポロジーは, 図形表示上の標高関数に関する極大, 極小を考慮にいれた一般化された Reidemeister 移動を土台としてもっている．これらの移動は, 次のようなものであった:

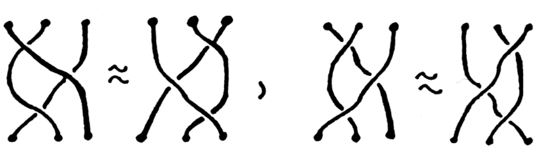
1.



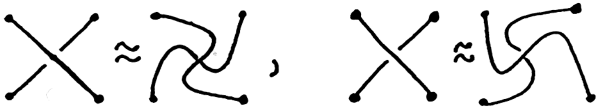
2.



3.



4.



これらは, M と R の代数的条件に置き換えられる:

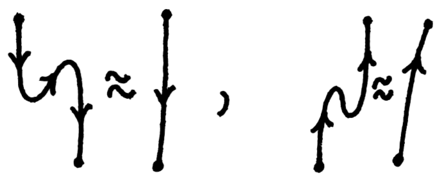
1. $M_{ai}M^{ib} = \delta_a^b,\ M^{ai}M_{ib} = \delta_a^b.$
2. R と $\overline{R}$ は 互いに逆行列.
3. R , $\overline{R}$ に対する Yang-Baxter 方程式 (YBE).
4. $\overline{R}_{cd}^{ab} = M_{ci}R_{dj}^{ia}M^{jb},\quad \overline{R}_{cd}^{ab} = M^{ai}R_{ic}^{bj}M_{jd}.$

また, Drinfeld の二重化構成において, 条件 4 は Hopf 代数の対合射 (とその表現) に置き換えられることも既に述べた (定理 10.3).

同様な条件が, 向きの付いた絡み目の図形表示の正則同位不変量に対しても成立する. ここで, これらの条件を記し, かつ Hopf 代数構造や他の模型との比較をしてみよう.

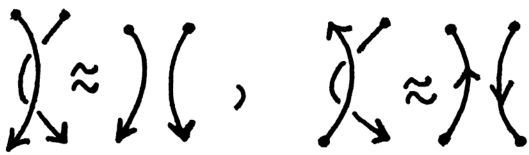
向きの付いた場合の Reidemeister 移動の一般化は次のようになる:

1.

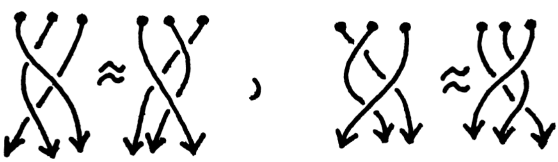


(および向きを逆転したもの)

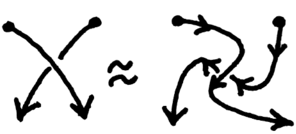
2.



3.

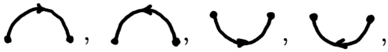


4.

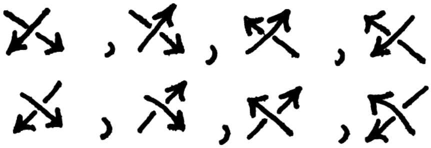


(およびこれの変種)

この場合, 生成・消滅において, 次図のように右へあるいは左へ向きが付いた場合があり,



ブレイド作用素も



のようにいろいろな場合があることに注意する.

回転移動 4 と 2 つのタイプ 2 移動を組み合わせると, Yang-Baxter 関係式 3 のみを考えればよい (三角形移動の他の場合は, これらの関係式から得られる). すると, 代数的な関係式は, 1 から 4 (の抽象テンソル) を直接にもってくればよい.

このようにして, 「真空」振幅の形をとる向きの付いた模型 (有向模型) を考えることができる.

向きの付いた振幅により, 既に議論した模型の特徴も明らかになる. 例えば, 「ループの振幅は一般に平面上の回転の意味付けに依存する」ということが明らかになる. その結果, $\langle$$\rangle \neq \langle$$\rangle$, あるいは, その特殊値が, 生成・消滅の行列の性質に関連してくるということが予測される.

話をより明確にするために, 今までの模型を向きの付いた振幅として, また, (以下に定義するが) 区分的線形 (PL) 模型として見ることができることを示そう. その上で, 向きの付いた振幅と PL ステイト模型の関連を問題として取り上げる. まず, PL 模型から始める.

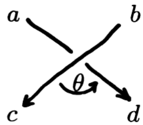
区分的線形ステイト模型.

これから述べる模型は, 区分的に線形な結び目の図形表示に対するものである. まず, 筆者が [LK10] において, 区分的線形なカテゴリーでこのタイプの模型を表した. それは, ブラケット多項式と統計力学の Potts 模型の一般化に共通の模型を与えるためであった. Jones [JO4] は, 可微分カテゴリーを用い, 絡み目不変量に対して, より一般的な頂点模型を与えた. この可微分模型は, 絡み目の図形表示に沿う角媒介変数を含んでいる. 本節では, 角度の情報が頂点に集まっているような, Jones 模型の区分的線形版とでもいうべきものを考える ([LK14],[LK23] を見よ). 統計力学において, これらのモデルは, (おそらく他にもあるだろうが)Perk と Wu [PW] や Zamolodchikov [Z3] に見ることができる[†].

区分的に線形な絡み目の図形表示は, まっすぐな線分からなり, 頂点は (4 本の辺が出る) **交差点**と, (2 本の辺が出る) **かど**のみである. 図形表示は向き付けられて

[†]訳注: このような θ–依存性を模型に導入することは, 可解模型の分野ではよく行われることである. 例えば [SAA]* などを参照されたい.

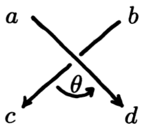
おり, 局所的に交差点は今までのように2つのタイプであるとする. 行列 $S_{cd}^{ab}(\theta)$ が, 次のように各交差点に対応している:



$$\longleftrightarrow S_{cd}^{ab}(\theta) = R_{cd}^{ab}\lambda^{(d-a)\theta/2\pi}.$$

ここで, θ は2本の交わる線分のなす角度を反時計回りの方向で計り, 弧度法で表したものである. また R_{cd}^{ab} は, $a,b,c,d \in \mathcal{I}$ ($\mathcal{I} \subseteq \mathbf{R}$) に対する YBE の解である. さらに, R はスピンを保つ, すなわち, $a+b=c+d$ 以外の場合は $R_{cd}^{ab}=0$ と仮定しておく.

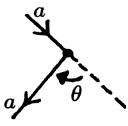
逆の交差点には, $\overline{S}_{cd}^{ab}(\theta)$ を次のように対応させる:



$$\longleftrightarrow \overline{S}_{cd}^{ab}(\theta) = \overline{R}_{cd}^{ab}\lambda^{(d-a)\theta/2\pi}.$$

$\overline{R}$ は R の逆行列, すなわち, $R_{ij}^{ab}\overline{R}_{cd}^{ij} = \delta_c^a\delta_d^b$ である. ここで, 角度の要素は交差点のタイプに依存していないことに注意されたい.

この模型は区分的線形であるから, 2本の辺を結ぶ頂点がある. この場合, 頂点の重みは, その頂点で結びつく辺のなす角度にも影響を受ける:



$$\longleftrightarrow \lambda^{\theta a/2\pi}$$

区分的に線形な絡み目の図形表示 K に対する**分配関数** (あるいは**振幅関数**) は, 総和 $\langle K\rangle = \sum_\sigma [K|\sigma]$ で表される. ここで $[K|\sigma]$ は, もちろん頂点の重みの積である. ステイト σ は, 絡み目の図形表示の (頂点から頂点までの) 辺にスピンを与えたものであり, 2本の辺が結びつく頂点ではスピンは一定, かつ交差点では $a+b=c+d$ となっている.

頂点の重みの積は, $[K|\sigma] = \langle K|\sigma\rangle\lambda^{||\sigma||}$ と書き直すことができる. ここで, $\langle K|\sigma\rangle$ は交差点における R の値の積であり, $||\sigma||$ はすべての交差点とかどの角度の指数の和である. したがって,

$$\langle K\rangle = \sum_\sigma \langle K|\sigma\rangle\lambda^{||\sigma||}.$$

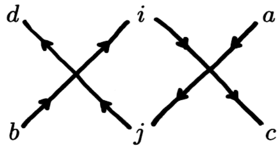
次の基本的な定理 [JO4] により, $\langle K\rangle$ が正則同位の不変量である十分条件が与えられる.

定理 15.1. 行列 R^{ab}_{cd} がYBEを満たし, R がクロスチャネル反転性(cross-channel inversion)

$$\sum_{i,j} R^{ia}_{jc} R^{jb}_{id} \lambda^{((c-i)/2+(d-j)/2)} = \delta^a_d \delta^b_c$$

を満たすならば, 上であげた模型 $\langle K \rangle$ は正則同位の不変量となる.

注意. クロスチャネルの条件は, 向き付けが逆のタイプII移動に対応している. 下の図形は, $R^{ia}_{jc} R^{jb}_{id}$ に対応する添字縮約のパターンを示す:



この定理を証明する前にいくつかの考察を行う.

区分的 Reidemeister 移動.

図17に, 区分的Reidemeister移動を示している. (この図はいつものように, 代表的なものをあげてある. さらにいくつか, 例えばタイプIIIで交差を入れ換えたものなどがある.)

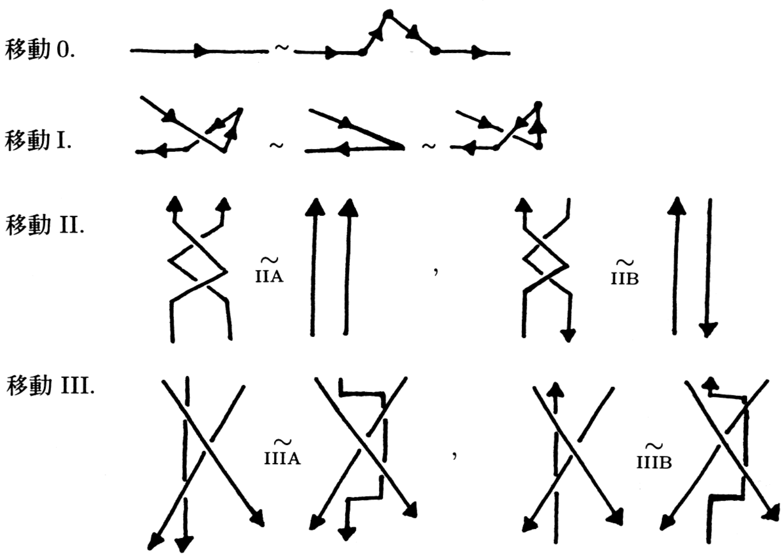
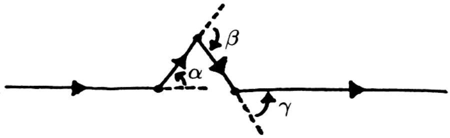


図 17.

これらの移動のもとでの不変性を調べるために, 角度を追ってみる.
例えば, 移動 0 について考える:



ユークリッド平面においては, 三角形の内角の和は π であるから, 角度の和 $\alpha+\beta+\gamma$ は 0 に等しくなる. したがって, 上のような状態における頂点の重みの積は, まっすぐな線分の場合と同じになる.

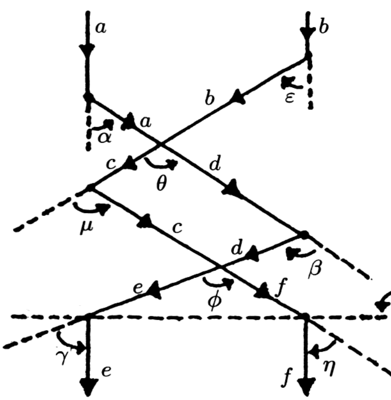
タイプ II 移動についてであるが, 入力と出力の線分は平行であると仮定してよい. 角度の影響は多少複雑である. この点を明らかにし, 定理の証明に進むために, まず $\langle K\rangle$ の移動 IIA のもとでの不変性を証明しよう.

補題 15.2. 行列 R^{ab}_{cd} と $\overline{R}^{ab}_{cd}$ は逆行列, すなわち $R^{ab}_{ij}\overline{R}^{ij}_{cd}=\delta^a_c\delta^b_d$ であるとする. (上で述べた角度の頂点の重みを用いると) 模型 $\langle K\rangle$ は PL 移動 IIA のもとで不変である.

証明. 既に記したように, $\langle K\rangle$ は次の総和の形をしている:

$$\langle K\rangle=\sum_{\sigma}\langle K|\sigma\rangle\lambda^{||\sigma||}.$$

ここで, $\langle K|\sigma\rangle$ は R と $\overline{R}$ による頂点の重みの積であり, $||\sigma||$ はステイト σ において角度により影響を受ける部分の総和である. R と $\overline{R}$ は逆行列として与えられているから, 図 18 のようにタイプ IIA の状態で, a, b が入力で, e, f が出力であるような (この模型はスピンを保つから, $a+b=e+f$ となっている) 任意のステイト σ, σ' に対して, $||\sigma||=||\sigma'||$ を示せばよい.



$a+b=c+d$
$c+d=e+f$
スピンを保つタイプ IIA の状態

(この直線は下降する
矢線に垂直)

図 18.

Δ を, 図 18 のような図形の一部分に現れる角度の影響の総和とする. このとき, $\Delta = 0$ を示す.

図 18 より,

$$(*)\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma & =0 \\ \varepsilon+\mu+\eta & =0 \\ \theta+\phi & =\mu-\beta \\ a+b=c+d & =e+f \end{cases}$$

したがって,

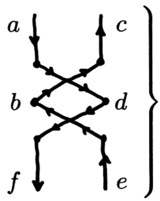
$$\Delta = a\alpha + b\varepsilon + (d-a)\theta + \mu c + d\beta + (f-c)\phi + \gamma e + \eta f.$$

等式 (*) を使って Δ の式を簡潔にしていくと, $\Delta = 0$ が得られる.

$$\begin{aligned}
\Delta &= a\alpha + d\beta + e\gamma + (d-a)\theta + b\varepsilon + c\mu + f\eta + (f-c)\phi \\
&= a\alpha + (a+b-c)\beta + (a+b-f)\gamma + (f-c)\phi + b\varepsilon \\
&\quad +(a+b-d)\mu + (a+b-e)\eta + (d-a)\theta \\
&= (b-c)\beta + (b-f)\gamma + (f-c)\phi + (a-d)\mu + (a-e)\eta + (d-a)\theta \\
&= (d-a)\beta + (b-f)\gamma + (f-c)\phi + (a-d)\mu + (a-e)\eta + (d-a)\theta \\
&= (d-a)(\beta+\theta-\mu) + (b-f)\gamma + (f-c)\phi + (a-e)\eta \\
&= (a-d)\phi + (b-f)\gamma + (f-c)\phi + (a-e)\eta \\
&= (c-b)\phi + (f-c)\phi + (b-f)\gamma + (a-e)\eta \\
&= (f-b)\phi + (b-f)\gamma + (f-b)\eta \\
&= (f-b)(\phi-\gamma-\eta) \\
&= (f-b)(0) \qquad \text{(図 18 により)}
\end{aligned}$$

$\therefore\ \Delta = 0.$ □

同様の計算により, 図 19 のようにスピンを与えると, 移動 IIB の場合には, $\Delta/2\pi = [(c-b)+(f-d)]/2$ が得られる.



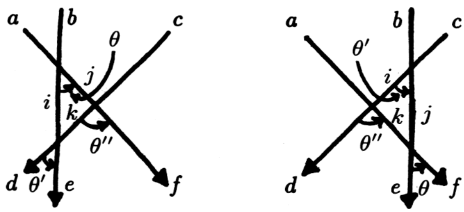
$$\frac{\Delta}{2\pi} = \frac{(c-b)+(f-d)}{2}$$

図 19.

これで, 定理 15.1 におけるクロスチャネル反転性の式が納得できるであろう.

定理 15.1 の証明. 上にあげた補題や考察により, $\langle K \rangle$ が移動 IIIA のもとで不変であることを示せばよい. (第 11 節で述べたように, 移動 IIA, IIB, IIIA により, 移動 IIIB が実現されるのである.)

さて, 図 20 を見ていただきたい. いろいろな形の移動 III について証明しなければならないが, 標準的な角度を与えたことで, 図 20 のように単純化した図形で, 両者の角度の影響する項の和が一致することを証明すれば十分であることに注意する.



$$S^{ab}_{ij}(\theta)S^{jc}_{kf}(\theta+\theta')S^{ik}_{de}(\theta') = S^{bc}_{ij}(\theta')S^{ai}_{dk}(\theta+\theta')S^{kj}_{ef}(\theta)$$

図 20.　ラピディティをもつ量子 Yang-Baxter 方程式

図 20 のように, ステイト σ にスピン $\{a,b,c,i,j,k,d,e,f\}$ を与えておくと, 左側の図形において $2\pi||\sigma||$ に対する値は

$$\begin{aligned}\Delta &= (j-a)\theta + (e-i)\theta' + (f-j)(\theta+\theta') \\ &= (f-a)\theta + (f-j+e-i)\theta'\end{aligned}$$

である. 右側の図形の場合は,

$$\begin{aligned}\Delta' &= (j-b)\theta' + (k-a)(\theta+\theta') + (f-k)\theta \\ &= (f-a)\theta + (k-a+j-b)\theta'\end{aligned}$$

となる. ここで,

$$k+j=e+f \text{ より }, \ f-j+e-i = k-e+e-i = k-i,$$

$$a+b=i+j \text{ より }, \ k-a+j-b = k+b-i-b = k-i.$$

よって, $\Delta = \Delta'$ となる. $S^{ab}_{cd}(\theta) = R^{ab}_{cd}\lambda^{(d-a)\theta/2\pi}$ であるから, この角度の計算と R が YBE の解であることにより, $\langle K \rangle$ は移動 IIIA のもとで不変であることが示される. □

注意. 証明を眺めてみると, 実際には, R^{ab}_{cd} が YBE を満たすならば, $S^{ab}_{cd}(\theta) = R^{ab}_{cd}\lambda^{(d-a)\theta/2\pi}$ がラピディティ媒介変数 θ をもつような次の YBE

$$S^{ab}_{ij}(\theta)S^{jc}_{kf}(\theta+\theta')S^{ik}_{de}(\theta') = S^{bc}_{ij}(\theta')S^{ai}_{dk}(\theta+\theta')S^{kj}_{ef}(\theta)$$

を満たすことを示している．この等式は物理的状況の抽象化によって得られたのであるが，その物理的状況において，θ は頂点における相互作用に含まれる粒子間の運動量の差を表している．

ラピディティ媒介変数について，背景となる言葉がいくつか必要であろう．根本的な前提は，粒子が特別な相対論的状況のもとで相互作用しているということである．言い換えれば，相互作用する 2 つの粒子の運動量は，Lorentz 変換により移されるのであるが，結果として得られる散乱振幅は不変でなければならない．(光の速さを 1 とする) 相対論の状況では，エネルギー (E)，運動量 (p)，質量 (m) の間には次の基本的関係がある:

$$E^2 - p^2 = m^2.$$

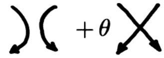
質量を 1 とすると，

$$E^2 - p^2 = 1$$

となり，$E = \cosh(\theta), p = \sinh(\theta)$ と表すことができる．Lorentz 変換により θ を一定の値に移す．光束円錐座標において (第 II 部第 9 節を見よ) エネルギー運動量は $[e^{\theta}, e^{-\theta}]$ の形をとり，これは Lorentz 変換のもとで，$[A,B] \mapsto [Ae^{\theta}, Be^{-\theta}]$ により移される．したがって，2 つの粒子が，それぞれ，ラピディティ **(rapidity)** θ_1, θ_2 をもつならば，差 $\theta_1 - \theta_2$ は Lorentz 不変となる．S 行列は，このラピディティの差の関数でなければならない．

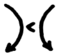
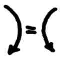
ここで，図 20 の図形を考えてみる．運動量は相互作用において保存されるのだから，向きの付いた三角形の相互作用において，まん中の項は他の 2 つの項のラピディティ差の和となるようなラピディティ差をもたなければならない．(三角形の外角に関する定理により) 対応する線分の角度は，まさにこの関係式を満たしている．

したがって，ラピディティ差を相互作用の線分間の角度と同一視することができ，区分的線形な図形表示から，正確な角度の関係を得ることができる．この角度の対応は驚くべきことであり，より深い物理的解釈にも関係してくる．不思議なことに，ラピディティ媒介変数をもつ YBE は，場の理論と統計力学双方の本来の方程式の形に一致している．ここで，自明でないラピディティ媒介変数を含む最も簡単な解を考えてみる．例えば，

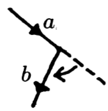
$S^{ab}_{cd} =$  $= \delta^a_c\delta^b_d + \theta\delta^a_d\delta^b_c$

とおく．$S^{ab}_{cd}(\theta)$ がラピディティ θ をもつ QYBE を満たすことを確かめてみてほしい．しかし，この S を使って絡み目不変量を導く方法はわからない．一方，みかけはより複雑な形をしている $S^{ab}_{cd}(\theta) = R^{ab}_{cd}\lambda^{(d-a)\theta/2\pi}$ は，結び目理論にとって都合がよいのである．

注意. 定理 15.1 を用いるために, クロスチャネルの条件を満たすように λ を調整しなければならない. 既に第 11 節で, この問の解となる例を取り扱ってきた. それは,

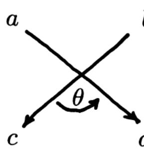
$R^{ab}_{cd} = (q - q^{-1})$  $+\, q$  $+$ 

であり, 添字集合 $\mathcal{I}_n = \{-n, -n+2, \cdots, n-2, n\}$ に対して, $\lambda = q$ とおくことになる. この場合, ステイトの評価式は第 11 節で述べたものと一致することがわかる. 第 11 節では, ステイト σ は一定のスピンをもつループからなり, 各々のループは ($||\sigma||$ において) スピンと回転数の積の値が与えられていた. PL 模型における局所的な角度は, 総和をとることにより同じ結果を導くのである. このことをみるために, まず, 入力 a と出力 b のスピンをもつ 2 本の辺が出ている頂点を考えてみよう. $a = b$ のとき, 通常の場合と同じになる.



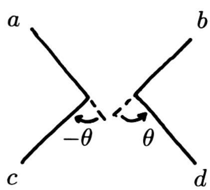
$\longleftrightarrow \lambda^{((a+b)/2)\theta/2\pi}$

次に, 交差点における角度の影響を考えてみよう.



$\longleftrightarrow \lambda^{(d-a)\theta/2\pi}$ (角度の影響)

ここで, $a + b = c + d$ と仮定する. すると, もし交点のない状態にしてみると次のようになる:



$\longleftrightarrow \lambda^{((a+c)/2)(-\theta/2\pi)}\lambda^{((b+d)/2)\theta/2\pi}$

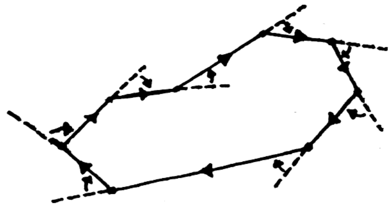
$$= \lambda^{(((d-a)+(b-c))/2)\theta/2\pi}$$
$$= \lambda^{(d-a)\theta/2\pi}$$

交差点における角度の寄与する値は, 一般的な頂点の重みを用いると, 交差点を分離して「かど」とみなしたときに寄与する値の和と一致する.

第 11 節の R 行列において, このような分離と一定のスピンをもつループとしてのステイトの間にある対応があった. ($a = d,\ b = c$ のとき, $(d-a)\theta/2\pi = 0$ にな

ることに注意してほしい.) すなわち, 各ループはある値 (a というループのスピンの値) をもっていた.

$$\begin{aligned} \|\text{ループ}\| &= \frac{a}{2\pi} \times (\text{かどの角の和}) \\ &= \frac{a}{2\pi}(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) \\ &= a \cdot \mathrm{rot}(\text{ループ}) \end{aligned}$$

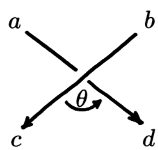


上の式により, ループの値も第 11 節で用いたものと正確に一致していることがわかる. 以上により, 第 11 節の模型が本節の PL ステイト模型の特別な場合になっていることが明らかになった. また第 11 節の模型については「真空」期待値の形で既に説明してあり, PL ステイト模型も同様な方法で構成されることになる.

向きの付いていない模型に対する注意.

第 14 節において, Homfly 多項式に対する向きの付いた模型を "対称化" することにより, Kauffman 多項式のステイト模型が自然に得られることを述べた. このことにより, Homfly 模型に対する $SL(n)$ Yang-Baxter の解から, ある Yang-Baxter 解が構成された. また, この新しい Yang-Baxter 解のある要素を, 向きの付いていない模型の回転数をうまく用いることによって説明できることもみてきた.

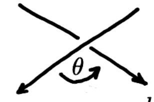
ラピディティ媒介変数 θ を用いる区分的線形によるアプローチによっても, このテンソルの形が得られることをみてみよう: 次の図



に対応して, 等式

$$S^{ab}_{cd}(\theta) = R^{ab}_{cd}\lambda^{(d-a)\theta/2\pi}$$

が成立していると仮定し, さらに, $T^{ab}_{cd}(\theta)$ を次のように構成しておく:

$T^{ab}_{cd}(\theta) \leftrightarrow$  $+$  $= \pi - \theta$

(約束 $\xrightarrow{a} \equiv \overleftarrow{-a}$ を使用する.) すると,

$$T^{ab}_{cd}(\theta) = R^{ab}_{cd}\lambda^{(d-a)\theta/2\pi} + \overline{R}^{-ca}_{d-b}\lambda^{(-b+c)(\pi-\theta)/2\pi}.$$

ここで, $a+b=c+d$ (つまり, R がスピンを保つと仮定している) より, $d-a=b-c$ である. よって,

$$\begin{aligned} T^{ab}_{cd}(\theta) &= R^{ab}_{cd}\lambda^{(d-a)\theta/2\pi} + \overline{R}^{-ca}_{d-b}\lambda^{(d-a)(\theta-\pi)/2\pi} \\ &= \left[R^{ab}_{cd} + \overline{R}^{-ca}_{d-b}\lambda^{(a-d)/2}\right]\lambda^{(d-a)(\theta/2\pi)}. \end{aligned}$$

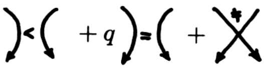
ここで,

$$\widehat{R}^{ab}_{cd} = R^{ab}_{cd} + \overline{R}^{-ca}_{d-b}\lambda^{(a-d)/2}$$

とおくと, 次が得られる:

$$T^{ab}_{cd}(\theta) = \widehat{R}^{ab}_{cd}\lambda^{(d-a)\theta/2\pi}.$$

このテンソル $\widehat{R}$ は, 第 14 節において

$R = (q - q^{-1})$  , $\lambda = q$,

とし, 添字集合を Kauffman 多項式に対する Turaev 模型を導くように選んだテンソル ($\widehat{R}$ は第 14 節における M である) になっている.

$\widehat{R}$ が YBE の解であることを保証するような, R の一般的な条件を決定するという格好の研究課題が残される. この問題を提示し, 本節を終えることにする.

16 節 Jones 多項式から出てくる 3 次元多様体の不変量

本節の目的は, 3 次元多様体の不変量が Jones 多項式からどのように構成されるかを説明することである. Reshetikhin と Turaev によるこのアプローチ [RT2] は, Edward Witten による量子場の理論と Jones 多項式についての画期的な論文の中で初めて提唱された不変量を, 具現化したものである. (Witten の見方については第 17 節を見よ.)

Reshetikhin-Turaev のアプローチでは, 不変量を構成するために量子群を用いる. その不変量は, 結果として得られる和が Kirby 移動 [KIRB] のもとで不変となるように調整された, 絡み目多項式の平均である. この際,「3 次元多様体は, 3 次元球面内の枠付き絡み目に沿った手術により表される」という Dehn と Lickorish の定理 [LICK1] を用いる. Kirby [KIRB] は, 枠付き絡み目の移動の集合を与え, 3 次元多様体の分類が, それらの移動と全同位変形を法とした枠付き絡み目の分類と同値になることを示した.

実際, 本節では, 古典的 Jones 多項式の場合に対する Reshetikhin-Turaev 不変量のある変形をもっぱら扱う. この場合については, Lickorish [LICK3] がブラケット多項式 (第 3 節と [LK4] を参照) と (第 7 節で説明したような) 図形的な Temperley-Lieb 代数のある性質を基にして, その不変量の存在を完全に初等的な方法で示した. よって, 本節では 3 次元多様体の不変量を構成するために, ブラケット多項式の知識のみを必要とする.

まず Kirby 計算と不変量の公式を述べることから始める. それから Temperley-Lieb 代数の背景を説明するところに戻ることにする.

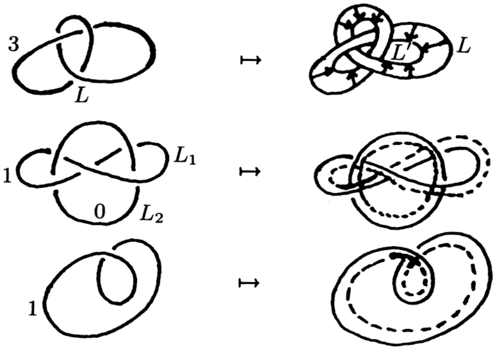
枠付き絡み目と Kirby 計算

3 次元空間に埋め込まれた単純曲線 K を考える. K は滑らかであるとし, K の直交ベクトル場を固定する. そして, その直交ベクトルの大きさが小さければ, それらの先端はもとの曲線 K の近くを動き, ある整数回だけその周りを回りながら, もう一つの埋め込まれた曲線を描く. その曲線を K' とし, K と同じ向きを与えると, 捻り数は絡み数 $\mathrm{lk}(K, K')$ と等しくなる. この整数 $n = \mathrm{lk}(K, K')$ を **K の枠組み (framing)** とよぶ. 逆に, K に整数 n を割り当てると, $n = \mathrm{lk}(K, K')$ となるような直交ベクトル場と曲線 K' を構成することができる. K の補空間における K' の

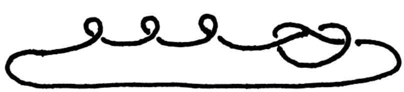
全同位類は, この方法によりただ一つに決定される.

定義により, **枠付き絡み目 (framed link)**L とは, L の各成分に一つずつ整数を割り当てた絡み目 L のことである. これらの整数は, 上で示したような成分の直交枠組み (normal framing) を描くために使われる. 絡み目表示に対して, ふつう**黒板の枠組み (blackboard framing)** として用いられる自然な枠組みがある. L の各成分 L_i に, 整数 $n_i = w(L_i)$ を割り当てる. ただし, $w(L_i)$ は L_iの交差点の符号の和である. (この和は, L_iの向きによらず, したがって, 向きの付いていない絡み目に対して一意に決まる.)

黒板の枠組みを決める直交ベクトル場は, その絡み目が描かれている平面を用いることによって得られる. つまり, 交差点を除きベクトルはその平面上にあるとし, 押し出され成分 L_i' は, 下の図のように本質的に L_iと平行なコピーを描くことにより得られる.



これらの例において, 絡み目の成分に枠組み数を付記しているが, これらの数は $w(L_i) = n_i$により図形表示から決定されることに注意する. 実際, 正または負のカールを付け加えることにより, 成分の捻り数を変えることができるので, どんな枠組みも黒板の枠組みとして実現できる. 0 を枠組みとしてもつ三葉結び目は, 下の図形表示の黒板の枠組みである.



L の枠組みを (L, f) で示すことにする. ただし, $f(L_i)$ は L の i 番目の成分に割り当てられた整数である.

これからみていくように, 3 次元多様体の研究は, 枠付き絡み目の研究と同値であると言ってよい. 厳密に述べると, Lickorish は「すべてのコンパクトな向き付けられた 3 次元多様体は, 枠付き絡み目 (L, f) に沿った手術により得られる」ことを示した [LICK1]. また, Kirby は, 枠付き絡み目の間の移動の集合を与え, 「2 つ

の 3 次元多様体が同相になることと, 対応する枠付き絡み目がこれらの移動により互いに移り合うことが同値である」ことを示した [KIRB]. ここでの目的は, この手術と移動を紹介し, Jones 多項式が 3 次元多様体の不変量を導くのにどのように使われるのかを調べることである.

手術 (Surgery)

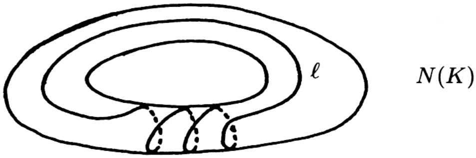
手術の基本的な考え方は次のとおりである. 4 次元多様体 W^4の境界となっている 3 次元多様体 M^3が与えられているとする. 与えられた埋め込み$\alpha : S^1 \longrightarrow M^3$ に対し, この埋め込みを, **ハンドル $D^2 \times D^2$ を W^4に貼り付ける**ために用いることができる. つまり, $D^2 \times D^2$ (D^2は 2 次元円板) の境界は $S^1 \times D^2$と $D^2 \times S^1$の和である. $S^1 \times D^2$を α を用いて M^3に貼り合わせると $\overline{M}^3$を境界とする新しい 4 次元多様体$\overline{W}^4$ができる. このとき, $\overline{M}^3$**は枠付き絡み目**$\alpha(S^1 \times 0) \subset M^3$**に沿った手術によって** M^3**から得られる**という. 枠組みは標準的な経線 $\alpha(S^1 \times 1) \subset M^3$の捻りにより与えられる. つまり, $K = \alpha(S^1 \times 0), K' = \alpha(S^1 \times 1)$, 枠組み数 $n = \mathrm{lk}(K, K')$ である. (この絡み数は, トーラス体 $\alpha(S^1 \times D^2)$ の中で数える.)

$\overline{M}^3$を直接に表してみることにする. M^3から $\overline{M}^3$を得ることは, ハンドルの貼り付けの表し方から簡単にわかる. この表し方は, もとの**緯線 (longitude)** $S^1 \times 1 \subset S^1 \times D^2$の捻りが, 新しく貼り合わせるトーラスの上の**経線 (meridian)** $S^1 \times 1 \subset D^2 \times S^1$と同一視していることを意味する. 言い換えると, M^3**から** $\alpha(S^1 \times D^2)$ **の内部を取り除き, その境界トーラス上の (枠組み数だけ捻った) 緯線と** $D^2 \times S^1$**の経線が合うように,** $M^3 - \mathrm{Int}(\alpha(S^1 \times D^2))$ **に** $D^2 \times S^1$ **のコピーを貼り合わせる.**

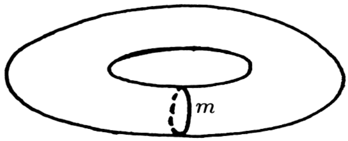
例題 1. $K = \alpha(S^1 \times 0) \subset S^3$ は平凡な結び目で, 枠組み数が 3 とする.



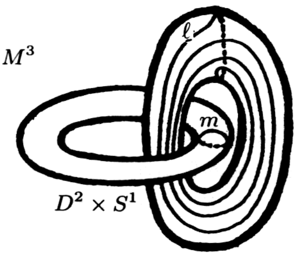
$N(K)$ を$\alpha(S^1 \times D^2)$ とし, $N(K)$ の境界上に緯線ℓ を描く: $\ell = \alpha(S^1 \times 1)$.



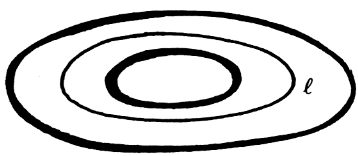
M^3を, Kに沿ってこの枠組みで手術して得られる 3 次元多様体とする. そうすると, M^3は, $S^3 - \mathrm{Int}(N(K))$ に経線 $m = (\partial D^2 \times 1)$ が ℓ と同一視されるように, $D^2 \times S^1$を貼り合わせて得られる.



m は $D^2 \times S^1$内の円板の境界となるので, M^3の 1 次元ホモロジー群が $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ となることは容易に確かめられる. これは, M^3がレンズ空間になる例である.



例題 2. 枠組み数が 0 であることを除いて, 例題 1 と同様であるとする. そうすると, ℓ は単純な経線となり, M^3 が $S^2 \times S^1$と同相であることはすぐにわかる. (経線は $S^3 - \mathrm{Int}(N(K))$ 内の円板の境界となり, m は $D^2 \times S^1$内の円板の境界となる. m と ℓ が同一視され, これらを境界とする 2 枚の円板が合わさって 2 次元球面 $S^2 \subset M^3$をつくる. 経線 $S^1 \times e^{i\theta}$の族から得られた 2 次元球面の族は M^3を構成し, M^3と $S^2 \times S^1$は同相になる.)



Kirby 移動

ここでは, 枠付き絡み目の間の 2 種類の移動で, それらの移動の列により枠付き絡み目 L を枠付き絡み目 L'にできることと, $\partial W_L \cong \partial W_{L'}$ とは同値になるようなものを定義する. (**記号**: 4 次元多様体 W^4の境界を∂W^4で表し, 枠付き絡み目 $L \subset S^3$ の成分に沿ってハンドルを貼ることにより 4 次元球体 D^4から得られる 4 次元多様体を W_L で表す.)

$\mathcal{O}_1$. **枠組みが 1, または -1 の平凡な結び目成分を L に加える, または L から取り除く. この平凡な結び目成分は S^3 内に埋め込まれた S^2 により, L の他の成分とは分離している.**

この操作は, W_Lの中で正または負の向きの複素射影空間 $\mathbf{CP}^2$ のコピーとの連

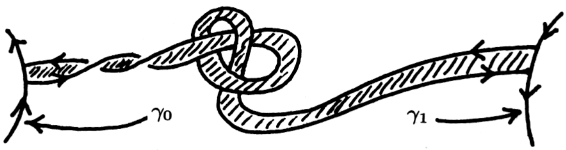
結和をとる(または $\mathbf{CP}^2$ との連結和から $\mathbf{CP}^2$を取り除く) ことに対応している. ($\mathbf{CP}^2 = D^4 \cup E$. ただし, $\partial E = S^3$ で $E \longrightarrow S^2$ は Hopf 写像 $H: S^3 \longrightarrow S^2$ [HOP] に付随した D^2–束 (バンドル; bundle) である. E は S^3 内の平凡な円に沿ってハンドルを付け加えて得られることが示せる. これは, S^2 内の 2 点 $p \neq q$ に対し, $H^{-1}\{p, q\}$ が絡み目  になるという **Hopf** 写像のよく知られた性質の言い換えである.)

$\mathcal{O}_2$. **与えられた L の 2 つの成分 L_i, L_j に対し, 次のように新しい L_i を L_j に付け加える:**

1. **L_i の枠組み f_i を使って, $\mathrm{lk}(L_i, L_i') = f_i$ かつ L と交わらないように L_iを押し出したものを L_i' とする.**
2. **L の L_j をバンド連結和 $\widetilde{L}_j = L_i' \#_b L_j$ に置き換える. ただし, b は L の L_i, L_j 以外の成分と交わらない任意のバンドである.**

バンド連結和 $L_i' \#_b L_j$ は, 以下のように定義される: γ_0, γ_1を S^3 内の 2 つの結び目とする. $b: I \times I \longrightarrow S^3$ を, 各 $i = 0, 1$ に対して $b(I \times I) \cap \gamma_i = b(i \times 1)$ となるような $[0,1] \times [0,1]$ の埋め込みとする. このとき,

$$\gamma_0 \#_b \gamma_1 = \gamma_0 \cup \gamma_1 - b(\partial I \times I) \cup b(I \times \partial I).$$



この 2 番目の移動は, W_L内において j番目のハンドルをバンド b に沿って i 番目のハンドル上を滑らせることに対応している. $\widetilde{L}_j$ の枠組み$\widetilde{f}_j$ を計算するために, 2 次元ホモロジー群 $H_2(W_L; \mathbf{Z})$ の交叉形式を考える. L にそれぞれ向きを付けると, $H_2(W_L; \mathbf{Z})$ のある基底 $\mathcal{B}$ が決まる. $\mathcal{B}$ を $\{[L_1], \cdots, [L_r]\}$ で示す. この基底 $\mathcal{B}$ に対する $H_2(W_L; \mathbf{Z})$ の交叉形式の行列 A_Lは, 対角成分として枠組み f_k, 他の成分として $a_{ij} = \mathrm{lk}(L_i, L_j)\,(i \neq j)$ をもつ. 移動 $\mathcal{O}_2$ は, b に対応して決まる L_i と L_j の向きに従って, $[L_j]$ に $[L_i]$ を加えること, または $[L_j]$ から $[L_i]$ を引くことに対応している. よって,

$$\begin{aligned}\widetilde{f}_j &= (\pm[L_i] + [L_j]) \cdot (\pm[L_i] + [L_j]) \\ &= [L_i] \cdot [L_i] + [L_j] \cdot [L_j] \pm 2[L_i] \cdot [L_j].\end{aligned}$$

よって, 次の関係式が得られる:

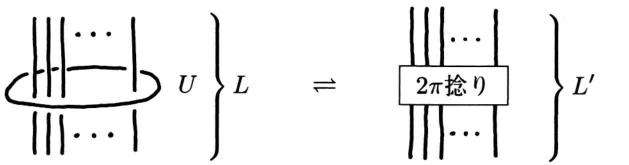
$$\boxed{\widetilde{f}_j = f_i + f_j \pm 2a_{ij}}$$

2 つの枠付き絡み目 L, L'は, 操作 $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$(と全同位) の列により, L'が L から得られるときに **∂–同値**であるといい, $L \underset{\partial}{\sim} L'$ と書くことにする.

定理 16.1 (Kirby-Craggs). 与えられた 2 つの枠付き絡み目 L, L' に対し, $L \underset{\partial}{\sim} L'$ となることと, ∂W_L が $\partial W_{L'}$ に (向きを保ったまま) 微分同相になることは同値である. (この次元においては, 微分同相と PL 同相は同値である.) □

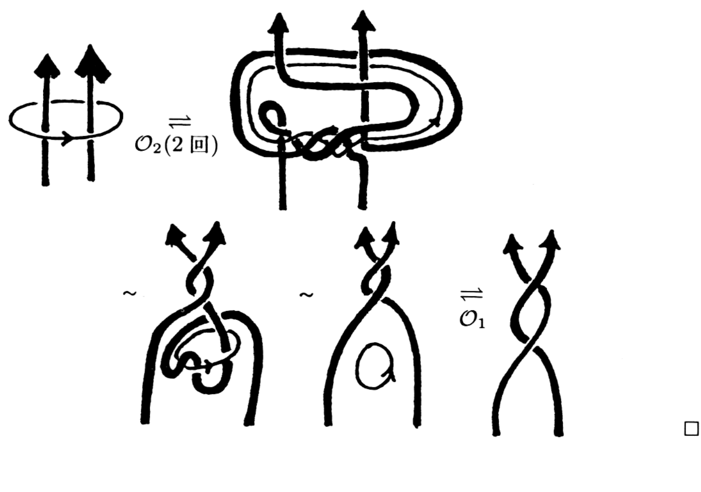
次の命題から, Kirby 移動の基本的な帰結「**±1 の枠組み数をもつ平凡なループに囲まれた何本かのケーブルは, このループがない 1 回捻られたケーブルと∂–同値である**」が得られる.

命題 A. L と L'は, 一部だけそれぞれ下の図のようになっていて, それ以外は同じであるとする. このとき, $L \underset{\partial}{\sim} L'$ である. ここで, Uは L' にはない枠組み -1 をもつ平凡な結び目で, L' の箱は右方向の 1 回捻りを表す. L'_i の枠組みは $f'_i = f_i + \mathrm{lk}(L_i, U)^2$で与えられる.



命題 B. Uの枠組み数が$+1$ であること以外は命題 A と同じ状況であるとすると, 箱の中は左方向の 1 回捻りになり, $f'_i = f_i - \mathrm{lk}(L_i, U)^2$となる.

命題 A の証明のスケッチ.

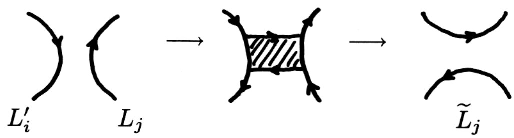


□

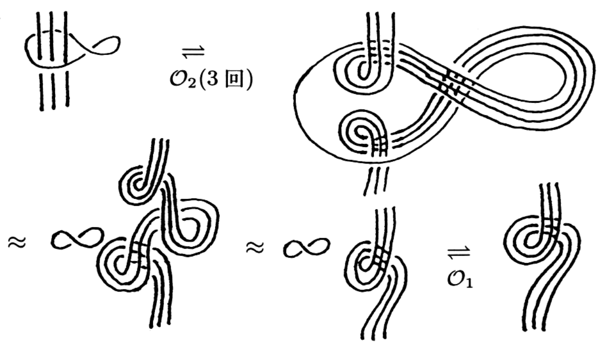
この命題は大変重要なので, **黒板の枠組みと図形表示の正則同位の言葉で**証明のスケッチをもう一度議論してみよう. 黒板の枠組みは, $f_i = w(L_i)$, つまり, i 番目の成分の捻り数である. 移動 $\mathcal{O}_2$のもとでの枠組みの変化を表す式は, (上で注意したように) $\widetilde{f_j} = f_i + f_j \pm 2a_{ij}$ となる. したがって,

$$w(\widetilde{L}_j) = w(L_i) + w(L_j) \pm 2 \cdot \mathrm{lk}(L_i, L_j)$$

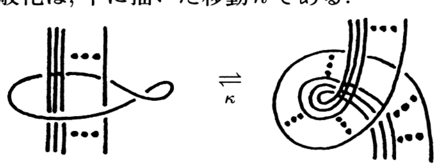
が成り立つことが必要であり, この式は, **バンドが余分な巻き付き数や絡み数に寄与しない平行な線分 (strand) からなるときは, いつでも正しい!** よって, 単に**バンド連結和が次のような再結合であるということ**から, Kirby 移動を黒板の枠組みと図形表示の正則同位の言葉で表現することができる.



L_i を平行に押し出すことで得られるものは, $\widetilde{L}_j$ をつくるために L_j と結ぶ L_i **のコピー** になることに注意する. 再生 (reproduction) と再結合 (recombination) の過程は, Kirby 計算の基になる部分である. (molecular biology の過程との形式的な類似は, 後に研究する価値がある.) さて, 黒板枠組みにおける 3 本の線分の場合の図を使っての証明のスケッチに戻ることにしよう:



n 本の線分への一般化は, 下に描いた移動 κ である:

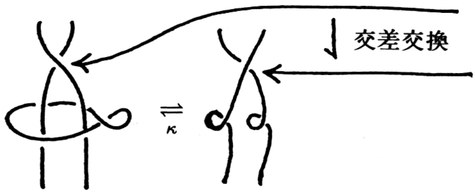


2π 捻りは, 平行な線分のケーブルの平面的なカールによって置き換えられる.

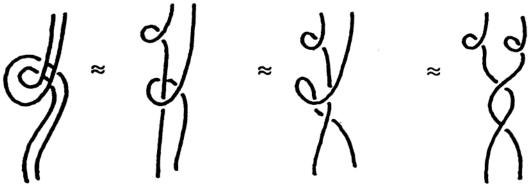
さて, Fenn と Rourke [FR] による美しい定理を紹介しよう. 彼らは, **移動 $\mathcal{O}_1$ は, 命題 A ／ B を移動 κ とともに用いると, Kirby 移動を生成する** ことを示した. これは, 上の移動 κ (とその鏡像に対応する変形) が黒板枠組みに対する $\mathcal{O}_1$( $\rightleftharpoons$ (空)) とともに用いると $\mathcal{O}_2$を生成し, よって完全な Kirby 計算となることを意味する.

$\mathcal{O}_1$と移動 κ のみを用いることで, なぜ移動 $\mathcal{O}_2$を生成できるのかを調べるために, まず最初に κ は交差点の上下を交換することを観察しよう.

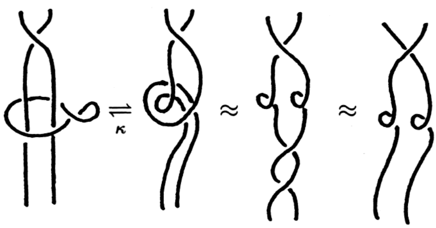
補題 16.2.



証明. まず, 次のことに注意しよう.

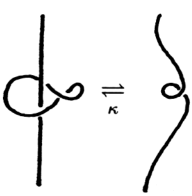
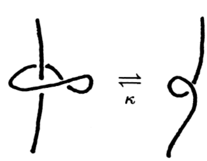


よって,



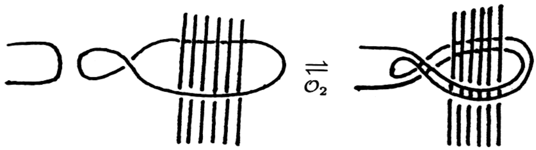
□

この補題から, 絡み目 L のすべての成分を平凡なものとしてよい, ということになる. さらに,

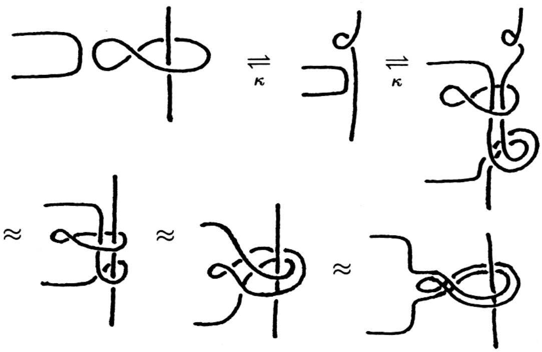
　かつ　

なので, ある 1 つの成分の捻り数を $+1, -1$, または 0 となるまで変形できる.

この状況なら, $\mathcal{O}_2$を得るためには κ と $\mathcal{O}_1$を用いれば十分である.

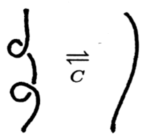


ここで実際に上の移動を κ と $\mathcal{O}_1$ で実現してみよう. (ただし, ケーブルを 1 本の線分で置き換えている. 実際のケーブルの場合も同様に描くことができる.)



□

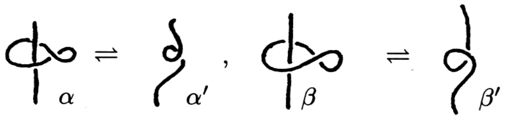
これで Kirby 計算の表示的な説明は終わる. しかし, 最後にもう一つ, カール移動を付け加えなければならない:



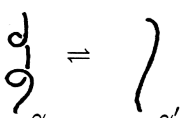
この移動を付け加えることで, 要求されたように, 2 つの自明な曲線が同値になることと, それらが同じ捻り数をもつことが同値になる. そして我々の計算は, 次の移動を組み合わせることで得られる:

$\mathcal{O}_0$. 正則同位

$\mathcal{O}_1$.  ⇌ (空) ⇌ 

κ. 

(αとβはケーブル)

$\mathcal{C}$. 

(γとγ′はケーブル)

移動 κ の β 版が $\mathcal{O}_0, \mathcal{O}_1, \mathcal{C}$, そして移動 κ のα 版によって生成されることを確かめるのは, おもしろい練習問題である. これは, いま調べている不変量に対する最も小さな移動の集合を与える.

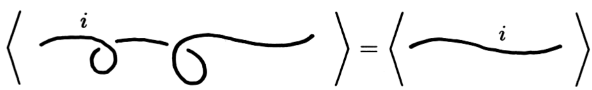
3 次元多様体の不変量の構成

(正則同位の不変量である) ブラケット多項式を用いて, 移動κと移動$\mathcal{C}$ のもとでも不変であるような, 正則同位の不変量を作り出そうと思う (後で $\mathcal{O}_1$ ついても不変となるように適当な正規化を行う).

まず, ケーブルに対するブラケットの振舞いを調べなければならないので, 最初に移動$\mathcal{C}$ に注意するのがよいであろう.

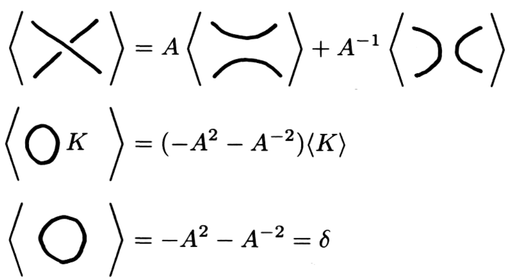
命題 16.3. 

 で i 本の平行なケーブルを表すとする. $\langle K \rangle$ を第 3 節のブラケット多項式とすると,

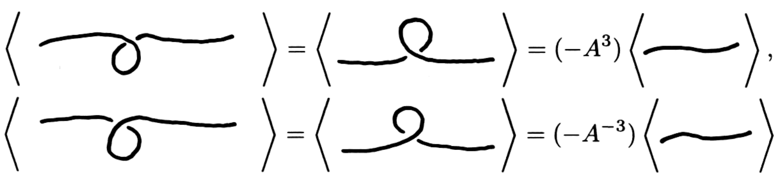


したがって, ブラケット多項式はそれ自身, 移動$\mathcal{C}$ のもとで不変である.

注意. ブラケット多項式は次の式

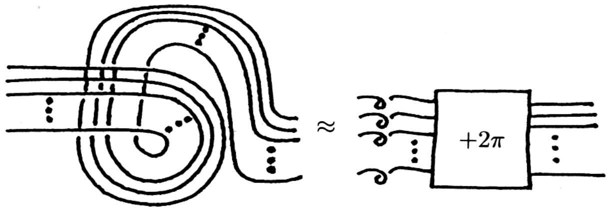


によって決定され, 向きの付いていない絡み目の図形表示の正則同位のもとでの不変量であることを思い出そう. 1 本の線分については, これらの定義式により直接

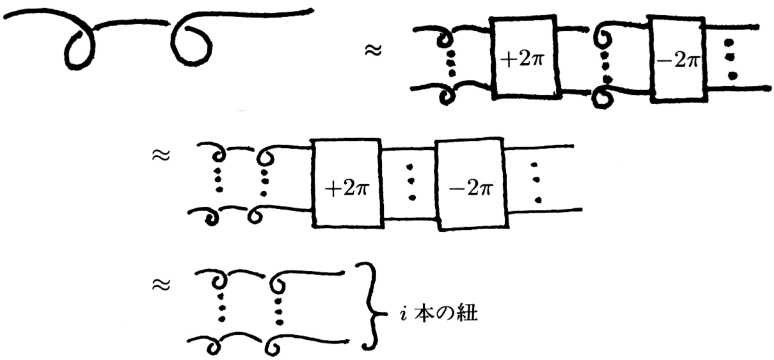


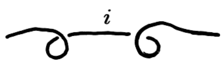
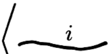
となることが導かれる.

証明. まず最初に, 次の 2 つの図形表示は, 正則同位のもとで同値であることを思い出そう.

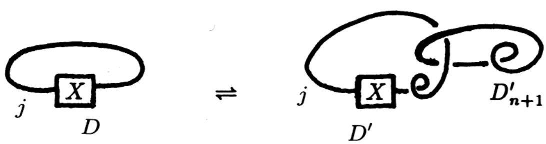


したがって, 次の正則同位のもとでの同値変形を得る.



1 本の線分については, $\Big\langle$  $\Big\rangle = \Big\langle$  $\Big\rangle$ であり, $\langle K\rangle$ は正則同位の不変量なので, 直ちに $\Big\langle$  $\Big\rangle = \Big\langle$  $\Big\rangle$ を得る. □

命題 16.3 の結果として, 移動 C を忘れて, 次図に示すような**基本的な Kirby 移動** κ のもとで不変になるような, ブラケットの値の組合せを作ることに集中することができる:

$\boldsymbol{\kappa}$:


(これは前に出てきた移動 κ の単なる書き換えである. j は j 本の線分からなるケーブルを表す. もし D が n 個の成分をもつなら, D' は $(n+1)$ 個の成分をもち, D'_{n+1} が新しい成分である.)

このままでは, ブラケットは移動 κ のもとで不変ではないが, 次のようなケーブルに対するブラケットの値を考えることにしよう.

$\widehat{T}_{i+j} =$  $\approx$  .

$T_{i+j} = \langle \widehat{T}_{i+j} \rangle$ とすると,

$T_1 = \Big\langle$  $\Big\rangle = -A^3$

$T_2 = \Big\langle$  $\Big\rangle = \Big\langle$  $\Big\rangle$

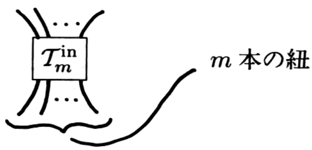
$= (-A^3)^2 \Big\langle$  $\Big\rangle$

$$= +A^6(-A^4 - A^{-4})$$

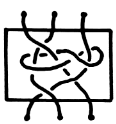
$$\therefore\ T_2 = -A^{10} - A^2.$$

もちろん, $T_0 = \langle$ 空 $\rangle = 1$ である.

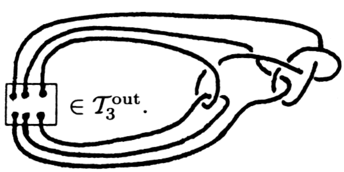
ここで Kirby 移動 κ のもとでの不変量を得るための基本となる方法を述べることにしよう. まず最初に, $\mathcal{T}_m^{\mathrm{in}}$ と $\mathcal{T}_m^{\mathrm{out}}$ とよばれる 2 つのタングルを考える. $\mathcal{T}_m^{\mathrm{in}}$ は m 本の入力と m 本の出力をもつ, 平面上で与えられた箱の**内部に**制限されたタングルである:



よって,

 $\in \mathcal{T}_3^{\mathrm{in}}$.

同様に, $\mathcal{T}_m^{\mathrm{out}}$ は箱の外部に制限されたタングルである. 例えば,

 $\in \mathcal{T}_3^{\mathrm{out}}$.

すると,

$$\langle x, y \rangle = \langle xy \rangle$$

によって定義されるペアリング

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathcal{T}_m^{\rm in} \times \mathcal{T}_m^{\rm out} \longrightarrow \mathbf{Z}[A, A^{-1}]$$

を得る．ここで，$\langle xy\rangle$ は正則同位の不変量であるブラケット多項式を表し，積 xyは $x \in \mathcal{T}_m^{\rm in}$ の端点と $y \in \mathcal{T}_m^{\rm out}$ の対応する端点をつないで得られる絡み目を表す．

このとき，(係数を $\mathbf{Z}[A, A^{-1}]$ にもつ) $\mathcal{T}_m^{\rm in}$と $\mathcal{T}_m^{\rm out}$の元の形式的線形結合を考えると便利である．$a, b \in \mathbf{Z}[A, A^{-1}]$ で，$X, W \in \mathcal{T}_m^{\rm in}$，かつ $Y, Z \in \mathcal{T}_m^{\rm out}$ とするとき，(定義により) 次が成り立つ:

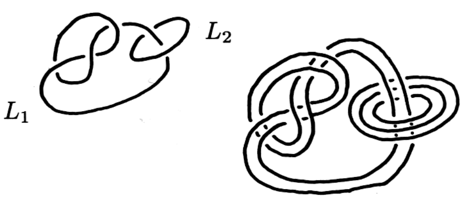
$$\langle X, aY + bZ\rangle = a\langle X, Y\rangle + b\langle X, Z\rangle,$$
$$\langle aX + bW, Z\rangle = a\langle X, Z\rangle + b\langle W, Z\rangle.$$

これにより，$\langle -, -\rangle$ は，線形結合からなるこれらの加群上の双線形写像になる．次の議論において，$\mathcal{T}_m^{\rm in}$ **と** $\mathcal{T}_m^{\rm out}$ **は，タングルからタングルの 1 次結合へ拡張したものとする．**

この言葉を使って，$\langle\!\langle K\rangle\!\rangle$ と書かれる次のような正則同位の不変量が，どんな場合に Kirby 移動 κ のもとでも不変になるかを調べる．

整数 $r \geq 3$ に対し，$\mathcal{I}_r = \{1, 2, \cdots, r-2\}$ とする (なぜ $r-2$ までなのかは後でわかるであろう)．$\mathcal{C}(n, r)$ を，関数 $c : \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow \mathcal{I}_r$ すべてからなる集合とする．ただし，n は 1 以上の整数とする．$\{1, 2, \cdots, n\}$ を絡み目 L の成分の名前とすると，$c(1), c(2), \cdots, c(n)$ は L の成分に集合 $\mathcal{I}_r$ の元を用いたラベルを割り当てたことになる．

成分 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ からなる与えられた n 成分絡み目の図形表示 L と，与えられた $c \in \mathcal{C}(n, r)$ に対し，L_i **を** L_i **と平面上で平行な** c_i **本のコピーに置き換えることによって，**L **から得られる図形表示を** $c * L$ **で表すことにする．** 例えば，次のようになる:



$c : \{1, 2\} \longrightarrow \{0, 1, 2, 3\} = \mathcal{I}_5$
$c(1) = 2,\ c(2) = 3$

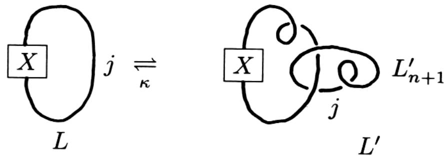
$c * L$

$\{\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_{r-2}\}$ をある量の集合とする．(結び目多項式に複素数を代入することになっているので，ある量とは複素数 $\mathbf{C}$ の元と理解する．) そして，$\langle\!\langle L\rangle\!\rangle$ を次の式で定義する:

$$\langle\!\langle L\rangle\!\rangle = \langle\!\langle L\rangle\!\rangle(A, r, \lambda_0, \cdots, \lambda_{r-2})$$
$$\langle\!\langle L\rangle\!\rangle = \sum_{c \in \mathcal{C}(n,r)} \lambda_{c(1)}\lambda_{c(2)} \cdots \lambda_{c(n)} \langle c * L\rangle$$

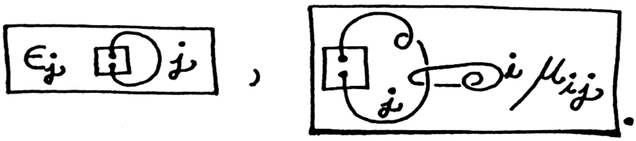
すると, $\langle\langle L\rangle\rangle$ は, $\mathcal{I}_r$を用いることにより, L から得られるすべての黒板のケーブルのブラケット多項式にある複素数を代入して得られる値 $\langle c * L\rangle$ の重みのついた平均である. 本節で説明したような黒板の枠組みを用いることにより, $\langle\langle L\rangle\rangle$ を枠付き絡み目の正則同位の不変量とみなすことができる.

Kirby 移動をタングルの積で表すと, 次のようになる:



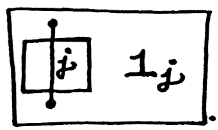
(L は n 個の成分をもつ.)

よって, タングルの言葉で $L = X\varepsilon_j, L' = X\mu_{ij}$ と書くことができる. ただし, タングル ε_j とμ_{ij} は下図で定義されるものとする:



したがって, $\varepsilon_j \in \mathcal{T}_j^{\text{out}}$, $\mu_{ij} \in \mathcal{T}_j^{\text{out}}$ である.

ε_j に対応する $\mathcal{T}_j^{\text{in}}$ の元を $\mathbf{1}_j$ とよぶ:



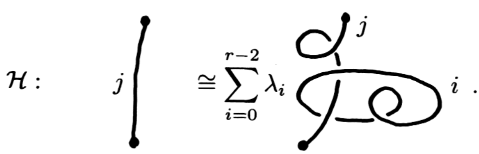
ここで, $\langle \mathbf{1}_j, \varepsilon_j\rangle = \langle \mathbf{1}_j\varepsilon_j\rangle = \delta^j$となることに注意する.

これで, Kirby 移動のもとでの $\langle\langle L\rangle\rangle$ の振舞いを調べることができる.

仮定 $\mathcal{H}$. すべての jとすべての $x \in \mathcal{T}_j^{\text{in}}$ に対し, 次の式が成り立つことを仮定する:

$$\langle x, \varepsilon_j\rangle = \left\langle x, \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i \mu_{ij}\right\rangle.$$

仮定 $\mathcal{H}$は記号を使って次のように書ける.



命題 16.4. 仮定 $\mathcal{H}$のもとで, 次が成り立つ:

(i) すべての j に対し, $\delta^j = \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i T_{i+j}$. ただし, $T_{i+j} = \left\langle \right.$  $\left. \right\rangle$ ($i+j$).

(ii) $\langle\!\langle L \rangle\!\rangle$ は Kirby 移動 κ のもとで不変であり,

$\langle\!\langle L \amalg$  $\rangle\!\rangle = \tau \langle\!\langle L \rangle\!\rangle$.

(τ は $\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \overline{T}_i$を表す. ただし, $\overline{T}_i = \left\langle \right.$  $i \left. \right\rangle$. $\amalg$ は直和を表す.)

(iii) $\tau^{(\sigma+\nu-n)/2}\langle\!\langle L \rangle\!\rangle$ は, L に沿った手術により得られる 3 次元多様体の不変量である. ここで, σとν は, それぞれ n 成分絡み目 L に付随した絡み行列 (linking matrix) の符号数と退化次数 (nullity) である.

証明. 上で説明したように, $L' = x\mu_{1y}, L = x\varepsilon_j$ とする. また, 与えられた $c : \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow \mathcal{I}_r$ に対し, $c * x$ を, タングル x の i 番目の成分を $c(i)$ 本の平行なものに置き換えて得られるタングルとする. すると, $x \in T_j^{\mathrm{in}}$ のとき, $c * x \in T_{j'}^{\mathrm{in}}$ となる. ただし, j' は, タングル上の入力, または出力を通る成分 Kについての $c(K)$ の和である. c の従属性を明記することが必要ならば, $j' = j(c)$ と書く. $c \in \mathcal{C}(n, r)$ に対し, 積 $\lambda_{c(1)}\lambda_{c(2)} \cdots \lambda_{c(n)}$ を省略して$\lambda_{\vec{c}}$ と書く.

$$
\begin{aligned}
\langle\!\langle L' \rangle\!\rangle &= \langle\!\langle x\mu_{1j} \rangle\!\rangle \\
&= \sum_{c \in \mathcal{C}(n+1, r)} \lambda_{c(1)} \cdots \lambda_{c(n)} \lambda_{c(n+1)} \langle c * [x\mu_{1j}] \rangle \\
&= \sum_{c \in \mathcal{C}(n, r)} \lambda_{\vec{c}} \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i \langle (c * x)(\mu_{ij}(c)) \rangle \\
&= \sum_{c \in \mathcal{C}(n, r)} \lambda_{\vec{c}} \left\langle c * x, \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i \mu_{ij}(c) \right\rangle \\
&= \sum_{c \in \mathcal{C}(n, r)} \lambda_{\vec{c}} \langle c * x, \varepsilon_j(c) \rangle \qquad (\text{仮定 } \mathcal{H}) \\
&= \sum_{c \in \mathcal{C}(n, r)} \lambda_{\vec{c}} \langle c * (x\varepsilon_j) \rangle \\
&= \sum_{c \in \mathcal{C}(n, r)} \lambda_{\vec{c}} \langle c * L \rangle \\
&= \langle\!\langle L \rangle\!\rangle.
\end{aligned}
$$

このことは, (ii) の前半が成り立つことを示している. 後半を確かめるために,

$$L' = L \amalg$$ 

とすると, 次のようになる:

$$\langle\!\langle L' \rangle\!\rangle = \sum_{c \in \mathcal{C}(n,r)} \lambda_{\vec{c}} \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i \langle c * L \amalg$$  $$i \rangle$$

$$= \sum_{c \in \mathcal{C}(n,r)} \lambda_{\vec{c}} \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i \langle c * L \rangle \langle$$  $$i \rangle$$

$$= \left[\sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i \langle \right.$$  $$\left. i \rangle \right] \sum_{c \in \mathcal{C}(n,r)} \lambda_{\vec{c}} \langle c * L \rangle.$$

$$\therefore \quad \langle\!\langle L' \rangle\!\rangle = \tau \langle\!\langle L \rangle\!\rangle$$

さて, (i) の証明をしよう. $T_{i+j} = \langle \mathbf{1}_j \mu_{ij} \rangle$ であった. したがって,

$$\delta^j = \langle \mathbf{1}_j \varepsilon_j \rangle = \langle \mathbf{1}_j, \varepsilon_j \rangle$$

$$= \left\langle \mathbf{1}_j, \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i \mu_{ij} \right\rangle \quad (\text{仮定 } \mathcal{H} \text{ より})$$

$$\therefore \quad \delta^j = \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i T_{i+j}.$$

最後に (iii) を示す. まず, L の $n \times n$ 絡み行列は符号数 σ と退化次数 ν をもち, したがって, $\frac{1}{2}(n - \sigma - \nu)$ はその行列を対角化したときの負の対角成分の数になることに注意する. この数は, 移動 κ のもとで変らず,  を 1 つ加えると 1 増える. したがって,(iii) は直接 (ii) から出てくる. これで命題の証明を終る. □

さて, 上の命題の (i) を調べよう. 方程式の集合

$$\delta^j = \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i T_{i+j} \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots)$$

は, 明らかに未知数の数よりも方程式の数が多い. それにもかかわらず, ブラケットでみたように, $A = e\pi^{i/2r}$のとき解をもち, その結果 λ は仮定 $\mathcal{H}$を満たし, 要請された 3 次元多様体の不変量を与える. このことの背景にある一般論に進む前に, $r = 3$ (と 4) の場合の例で厳密に確かめてみよう. しかし, ここで扱う「タングルの加群は, ブラケットの生成式に対応した関係式

$$\Big\langle$$  $$\Big\rangle = A \Big\langle$$  $$\Big\rangle + A^{-1} \Big\langle$$  $$\Big\rangle,$$

$$\langle L\bigcirc\rangle = \delta\langle L\rangle$$

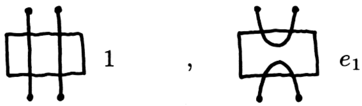
によって分解される」ことに注意することが重要である．これは，タングル加群 $T_m^{\rm in}$ と $T_m^{\rm out}$ を，次の式により生成されるタングル表示の同値関係による商で置き換えることができるということを意味している:

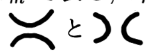


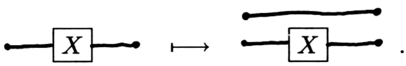
(ii) $\bigcirc D = \delta D.$

このことを用い，**これらの商加群を $V_m^{\rm in}$, $V_m^{\rm out}$ と表すことにする．**

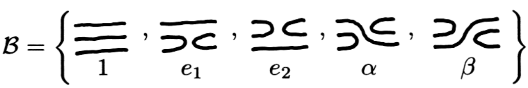
この約束のもとで，さらに A は $\mathbf{C}$ に値を与えられていると仮定すると，$V_m^{\rm in}$ と $V_m^{\rm out}$ が $\mathbf{C}$ 上有限生成であることがわかる． 例えば，$V_2^{\rm in}$ は生成元



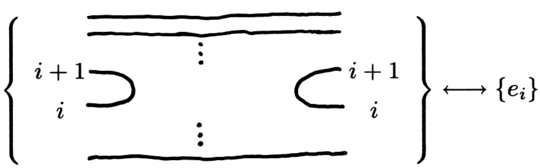
をもつ．$V_m^{\rm in}$ と $V_m^{\rm out}$ は，抽象的に同型な加群である．対応する抽象的な加群を V_m で表し，V_m を図に描くときは水平に描くことにする．つまり，V_2 は生成元  (1 と e_1) をもつ．写像 $V_m \hookrightarrow V_{m+1}$ を，次図のように，1 本の線を一番上に付け加えることによって定義する:



V_3 は



により生成される．つまり，V_3のすべての元は，これらの元の線形結合である．タングルの積のもとで，V_m は $\mathbf{C}$ 上の代数になる．これを **Temperley-Lieb 代数** という．これは最初，これとは異なる形で，Potts 模型の統計力学に現れた ([BA1] を見よ)．この図形表示による言い換えは筆者によるものであり ([LK4],[LK8],[LK10])，第 7 節で説明したような Jones の V 多項式 [JO2] の構成に関係がある．積に関しては，V_mは $\{1, e_1, e_2, \cdots, e_{m-1}\}$ により生成される．ただし，e_iはタングルの両側のそれぞれの端点で i 番目と $(i+1)$ 番目の点を結んで得られる:



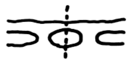
次の関係が成り立つことは, 簡単にわかる:

$$\left\{\begin{array}{lcll} e_i^2 & = & \delta e_i, & i=1,\cdots,m-1 \\ e_ie_{i+1}e_i & = & e_i, & i=1,\cdots,m-2 \\ e_ie_{i-1}e_i & = & e_i, & i=0,1,\cdots,m-1 \\ e_ie_j & = & e_je_i, & |i-j|>1 \end{array}\right\} \qquad (*)$$

また, V_m として, これらの関係式をもつ $\mathbf{C}$ 上の代数をとることができる (δ は議論の目的により選ばれた複素数である).

注意. Jones 代数においては, $e_ie_{i\pm1}e_i=\delta^{-1}e_i$ であるが, $e_i^2=e_i$ である. これは, ここで与えられた e_iを$\delta^{-1}e_i$ に置き換えれば得られる.

V_3において,

$e_1^2=$  $=$  $=\delta e_1,$

$e_1e_2e_1=$  $\approx$  $=e_1$

である. さらに, V_3 においては,

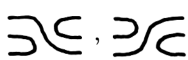
$e_1e_2=$  $=\alpha,\qquad e_2e_1=$  $=\beta$

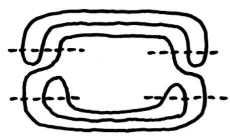
となることにも注意する.

これまで, $\langle x,y\rangle=\langle xy\rangle$ により定義されたペアリング $\langle\ ,\ \rangle:\mathcal{T}_m^{\rm in}\times\mathcal{T}_m^{\rm out}\longrightarrow\mathbf{C}$ を考えてきた. Temperley-Lieb 代数に関してこのペアリングは次のように書ける:

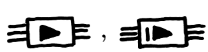
$$\langle\ ,\ \rangle : V_m\times V_m\longrightarrow \mathbf{C},$$
$$\langle x,y\rangle=\langle x\hat{y}\rangle$$

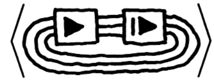
ただし, x は対応する $\mathcal{T}_m^{\rm in}$ の元と同一視され, $\hat{y}$ は対応する $\mathcal{T}_m^{\rm out}$ の元と同一視されていると考える. よって,

$\langle\alpha,\beta\rangle=\Big\langle$  $\Big\rangle$

$=\Big\langle$  $\Big\rangle=\delta^3.$

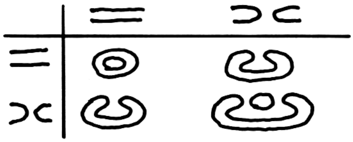
一般的には, 次のように表される:

$\langle$  $\rangle=\Big\langle$  $\Big\rangle$

$=$  .

よって, $x\hat{y}$ を平凡なタングルで閉じることにより, タングルの積 xy から得られる絡み目と同一視することができる.

例題. ペアリング $V_2 \times V_2 \longrightarrow \mathbf{C}$ の行列は次により決定される:



$\longleftrightarrow$

δ^2	δ
δ	δ^2

この行列は, ($\delta \neq 0$ に対しては) $\delta^4 - \delta^2 = 0 \Leftrightarrow \delta^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (-A^2 - A^{-1})^2 = 1 \Leftrightarrow A^4 + A^{-4} + 2 = 1$ のとき**非正則**であることに注意する. よって, $r = 3$ に対し, $A = e^{i\pi/2r}$のとき, $\langle\ ,\ \rangle$ は非正則である. さらに $r = 3$ のとき, 方程式

$$\delta_j = \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i T_{i+j}$$

を, まずは $j = 0, \cdots, r-2$ のときに, それから任意の j について考える. $j = 0, 1$ のときは, 次のようになる:

$$1 = \lambda_0 T_0 + \lambda_1 T_1, \qquad \delta = \lambda_0 T_1 + \lambda_1 T_2.$$

そして, 次がわかる:

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = -A^3, \qquad T_2 = -A^{10} - A^2.$$

よって,

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{T_2 - T_1^2} \begin{bmatrix} T_2 & -T_1 \\ -T_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \delta \end{bmatrix}.$$

ここで, もし $A = e^{i\pi/6}$ならば,

$$\begin{aligned} T_2 - T_1^2 &= -A^{10} - A^2 + A^6 \\ &= -A^4 A^6 - A^2 - 1 \\ &= A^4 - A^2 - 1 \\ &= e^{2\pi i/3} - e^{\pi i/3} - 1 \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

よって, λ_0とλ_1の値を得る. 無限個の式からなる連立方程式系 $\delta^j = \lambda_0 T_j + \lambda_1 T_{j+1}$ ($j = 0, 1, 2, \cdots$) がこれらの解をもつことは明らかでないが, 実際そうである! これからわかるように, ペアリング $\langle\ ,\ \rangle$ の $e^{\pi i/2r}$ での非正則性は重要である.

注意. Temperley-Lieb 代数 V_mの $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間としての次元は, カタラン (Catalan) 数 $d(m) = (\frac{1}{m+1})\binom{2m}{m}$ である. そして, 一般の δ に対し, $d(m)$ は V_m の $\mathbf{C}$ 上の次元である. これらの生成元は図形的に, それぞれ m 個の点からなる 2 つの平行な点の列を結んだものとして表せる. ただし, すべての結んでいる線は点の列の間にあり, 同じ列の点を結ぶことを許され, かつ線分どうしは互いに交わらないとする. つまり, $m = 3$ のときは, 次が V_3 のよく知られた基底である:



便宜上,V_mの非自明な生成元を $\{e_1, e_2, \cdots, e_{m-1}, e_m, \cdots, e_{d(m)}\}$ で表す. ただし, $e_m, \cdots, e_{d(m)}$は, 積に関する標準的な生成元 $e_1, \cdots, e_{m-1}$ 以外の生成元である. この表し方は, 以下の議論で用いられる.

定理 16.5. $A = e^{\pi i/2r}$ $(r = 3, 4, 5, \cdots)$ とする. V_mを, $A = e^{\pi i/2r}$としたときの $\delta = -A^2 - A^{-2}$に対する Temperley-Lieb 代数とする. (したがって, $\delta = -2\cos(\pi/r)$). このとき, **連立方程式系** $\delta^j = \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i T_{i+j}$ $(j = 0, 1, 2, \cdots)$ **は唯一の解をもつ.** □

実際,

(i) 行列 $M = (M_{ij}), M_{ij} = T_{i+j-2}$ $(1 \leq i, j \leq r)$ は, $A = e^{\pi i/2r}$のとき, 正則 である.

そして,

(ii) ペアリング $\langle\ ,\ \rangle : V_m \times V_m \longrightarrow \mathbf{C}$ は, $A = e^{\pi i/2r}$ かつ $m \geq r - 1$ のとき, 退化である. 特に, $\langle -, \mathbf{1}_m \rangle$ は非自明な元 e_i $(i = 1, \cdots, d(m))$ をもつペアリングの線形結合になる.

条件 (i),(ii) から, 定理の最初の部分を導く

この定理と命題 16.4 から, 3 次元多様体の $r = 3, 4, 5, \cdots$に対する無限個の不変量の集合が得られる. この定理を証明する前に, 条件 (i),(ii) から$\lambda_0, \cdots, \lambda_{r-2}$ が無限個の式からなる連立方程式系

$$\delta^j = \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i T_{i+j}$$

の解になることを示そう. この事実は、次の 2 つの補題から出てくる. このことから, 読者は (もし望むならば) 小さな r $(r = 3, 4, 5, 6)$ に対し, 条件 (i),(ii) を直接に確かめることができる.

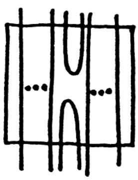
条件 (i) を仮定すると, 方程式系を

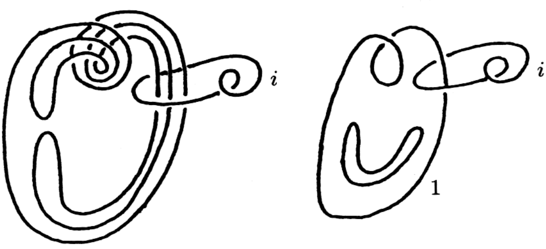
$$\delta^j = \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i T_{i+j} \qquad (j = 0, 1, \cdots, r-2)$$

に制限したとき, ただ 1 組の解 $\lambda_0, \cdots, \lambda_{r-2}$ が得られる. 任意の j に対して, $\phi_j = \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i \mu_{ij} \in \mathcal{T}_j^{\mathrm{out}}$ とすると, $T_{i+j} = \langle \mathbf{1}_j \mu_{ij} \rangle = \langle \mathbf{1}_j, \mu_{ij} \rangle$ となり, $j = 0, 1, \cdots, r-2$ に対し, $\delta^j = \langle \mathbf{1}_j, \phi_j \rangle$ となる. ここで, すべての j について, この最後の式が成り立つことを示そう.

補題 16.6. 任意の $x \in V_j^{\mathrm{in}}$ $(j = 0, 1, \cdots, r-2)$ に対し, $\langle x, \phi_j \rangle = \langle x, \varepsilon_j \rangle$.

証明. $\langle \mathbf{1}_j, \varepsilon_j \rangle = \delta^j$なので, 条件 (i) により $x = \mathbf{1}_j$に対して補題は正しい. e_k を V_j の他の任意の生成元とする (V_j^{in} は Temperley-Lieb の関係式を法として T_j^{in} と同じである). すなわち,

$e_k =$  $\Longrightarrow \langle e_k, \mu_{ij} \rangle = \langle \mathbf{1}_l, \mu_{il} \rangle \delta^s$ $(l < j)$



$e_2 \mu_{i3} \approx \delta \mathbf{1}_l \mu_{i1}.$

この簡単な円環上での同位により, Temperley-Lieb の非自明な任意の生成元に対し, $\langle e_k, \mu_{ij} \rangle = \delta^l \delta^s = \delta^j$ が成り立つ. 補題はこの考察から直ちに出てくる. □

補題 16.7. 定理 16.5 で述べた条件 (i),(ii) を仮定すると, 任意の $x \in V_j^{\mathrm{in}}$ と任意の $j = 0, 1, 2, \cdots$ に対して, $\langle x, \varepsilon_j \rangle = \langle x, \phi_j \rangle$ が成り立つ.

証明. 証明は, j に関する帰納法による. jより小さいすべての整数について補題 16.7 は正しいとする. 帰納法の仮定は少なくとも $r-2$ までは満たされているので, 補題 16.6 により $j > r-2$ と仮定する. 条件 (ii) より, V_j^{out} において,

$$\langle \mathbf{1}_j, - \rangle = \sum_{k=1}^{d(j)} \langle \alpha_k e_k, - \rangle$$

となる係数α_kが存在するとしてよい. よって,

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{1}_j, \phi_j \rangle &= \sum_{k=1}^{d(j)} \alpha_k \langle e_k, \phi_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{d(j)} \alpha_k \delta^{l(k)} \langle \mathbf{1}_{j(k)}, \phi_{j(k)} \rangle \qquad (\text{円環上の同位}) \\ &= \sum_{k=1}^{d(j)} \alpha_k \delta^{l(k)} \langle \mathbf{1}_{j(k)}, \varepsilon_{j(k)} \rangle \qquad (\text{帰納法の仮定}) \\ &= \sum_{k=1}^{d(j)} \alpha_k \delta^{l(k)} \delta^{j(k)} \\ &= \sum_{k=1}^{d(j)} \alpha_k \langle e_k, \varepsilon_j \rangle.\end{aligned}$$

$$\therefore \ \langle \mathbf{1}_j, \phi_j \rangle = \langle \mathbf{1}_j, \varepsilon_j \rangle$$

V_j^{in} の他の生成元については, 円環上の同位を用いて, 帰納法によりこの議論は完結する. したがって, 任意の j に対して, $\langle x, \varepsilon_j \rangle = \langle x, \phi_j \rangle$. □

条件 (i),(ii) から方程式系 $\delta^j = \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i T_{i+j}$ の解 $\lambda_0, \cdots, \lambda_{r-2}$ の存在が示されたので, $A = e^{i\pi/2r}$のときの 3 次元多様体の不変量の存在が示された. あとは, 定理 16.5 の条件 (i),(ii) を示せばよい. これには Temperley-Lieb 代数への遠足が必要である. Temperley-Lieb 代数を解析すると, 次のことがわかる:

定理 16.8. V_m を, 本節で説明したような積に関する生成元 $\mathbf{1}_m, e_1, e_2, \cdots, e_{m-1}$ をもつ m 本の線分の Temperley-Lieb 代数とする. δ をこの代数のループの値 (便宜上複素数と仮定する) とすると, 以下の性質をもつ $f_n \in V_m$ $(0 \leq n \leq m-1)$ が存在する:

(i) $f_0 = \mathbf{1}_m$

(ii) $n \geq 1$ のとき, $f_n = f_{n-1} - \mu_n f_{n-1} e_n f_{n-1}$

(iii) $i \leq n$ のとき, $e_i f_n = 0$

(iv) $n \leq m-2$ のとき, $(e_{n+1} f_n)^2 = \mu_{n+1}^{-1} e_{n+1} f_n$

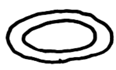
(v) $\mathrm{tr}(f_n) = \langle f_n \varepsilon_n \rangle = \delta^{m-n-1}\Delta_{n+1}$.

ここで, μ_nは $\mu_1 = \delta^{-1}, \mu_n = (\delta - \mu_{n-1})^{-1}$により帰納的に定義され, $\Delta_n = \prod_{k=1}^{n}(\delta - 2\cos(k\pi/(n+1)))$ である. □

定理 16.8 の詳細な議論は, 本節の最後にまわすことにするが, f_1 だけ書き下してみよう: 定理 16.8(ii) により, $f_1 = \mathbf{1}_m - \delta^{-1}e_1$ である. よって, V_2 において, $f_1 =$  $-\delta^{-1}$  となり,

$$
\begin{aligned}
f_1^2 &= (1-\delta^{-1}e_1)(1-\delta^{-1}e_1) \\
&= 1 - 2\delta^{-1}e_1 + \delta^{-2}e_1^2 \\
&= 1 - 2\delta^{-1}e_1 + \delta^{-2}e_1 \\
&= 1 - \delta^{-1}e_1 \\
\therefore \ f_1^2 &= f_1.
\end{aligned}
$$

また, $e_1 f_1 = e_1 - \delta^{-1}e_1^2 = 0$ となり,

$\mathrm{tr}(f_1) = \Big\langle$  $\Big\rangle - \delta^{-1} \Big\langle$  $\Big\rangle = \delta^2 - 1$

$$= \delta^{2-1-1}(\delta^2 - 1) \qquad (m = 2, n = 1).$$

さらに, 定理 16.8 により, 次の等式が成り立つことに注意する:

$$
\begin{aligned}
\Delta_2 &= (\delta - 2\cos(\pi/3))(\delta - 2\cos(2\pi/3)) = (\delta - 2(1/2))(\delta - 2(-1/2)) \\
&= (\delta - 1)(\delta + 1) = \delta^2 - 1.
\end{aligned}
$$

トレースについての注意. 定理 16.8 の中で, トレース関数 tr: $V_m \longrightarrow \mathbf{C}$ を用いた. これは, $\mathrm{tr}(x) = \langle x\varepsilon_m \rangle$ により定義されるものである. Temperley-Lieb 代数の元のトレースを, 対応するタングルの端点を自明な元で結ぶことによって閉じ, そうして得られた絡み目のブラケットを計算することで定義する.

次の結果は, 定理 16.8 から直接出てくる系である. 特に, それは $A = e^{i\pi/2r}$, $r \geq 3$, $m \geq r-1$ のときに, ペアリング $V_m \times V_m \longrightarrow \mathbf{C}$ が退化となることを示している. 言い換えると. 定理 16.8 は定理 16.5 の条件 (ii) を意味する.

系 16.9. $r \geq 3$ に対し, $A = e^{\pi i/r}$ とすると, 次が成り立つ:

(i) $m \leq r-2$ のとき, $\langle -, p(m) \rangle = \mathbf{1}'_m$ となるような元 $p(m) \in V_m$ が存在する. [ここで, $\mathbf{1}'_m \in V_m^*$ は $\mathbf{1}_m \in V_m$ の双対な元である. つまり, $\mathbf{1}'_m(x)$ **は** x **を標準的な基底で表したときの** $\mathbf{1}_m$ **の係数に等しい.**]

(ii) $m \geq r-1$ のとき, 双線形形式 $\langle -,- \rangle : V_m \times V_m \longrightarrow \mathbf{C}$ は退化であり, $\{e_1, e_2, \cdots, e_{m-1}\}$ により生成される部分代数に含まれる元 $q(m) \in V_m$ が存在して, $\langle -, q(m) \rangle = \langle -, \mathbf{1}_m \rangle$ を満たす.

証明. 定理 16.8 により, $f_n \in V_m$に対して, $\mathrm{tr}(f_n) = \delta^{m-n-1}\Delta_{n+1}$ であり, $\Delta_n = \prod_{k=1}^{n}(\delta - 2\cos(k\pi/(n+1)))$ であることを思い出そう. $A^2 = e^{i\theta}$ のとき, $\delta = -A^2 - A^{-2} = -2\cos(\theta)$ である. よって, $\Delta_n = \prod_{k=1}^{n} -2(\cos(\theta)+\cos(k\pi/(n+1)))$ である. 系 16.9 の仮定は, $r \geq 3$ のとき, $\theta = \pi/r$ となるということである. よって, $\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_{r-2} \neq 0$ であるが $\Delta_{r-1} = 0$ となる.

$1 \leq m \leq r-2$ のとき, $\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_{r-2} \neq 0$ なので, $f_{m-1} \in V_m$は定義される. 定理 16.8 より, $i = 1, 2, \cdots, m-1$ のとき, $e_i f_{m-1} = 0$ である. e_iの積は, $\mathbf{C}$ 上ベクトル空間としての ($\mathbf{1}_m$以外の) 基底を生成するので, $p(m) = \Delta_m^{-1} f_{m-1}$を定義することができる. このことは, $p(m)$ は $\mathbf{1}_m$の係数を除いてはすべて 0 に射影し, また,

$$
\begin{aligned}
\langle \mathbf{1}_m, p(m) \rangle &= \langle \mathbf{1}_m, \Delta_m^{-1} f_{m-1} \rangle \\
&= \Delta_m^{-1}\mathrm{tr}(\mathbf{1}_m f_{m-1}) \\
&= \Delta_m^{-1}\mathrm{tr}(f_{m-1}) \\
&= \Delta_m^{-1}\Delta_m \qquad (\text{定理 } 16.8) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ. これで (i) の証明を終る.

さて, $m \geq r-1$ と仮定しよう. すると, $\Delta_1\Delta_2\cdots\Delta_{r-2} \neq 0$ となるから, $f_{r-2} \in V_{r-1}$ は定義される. f_{r-2}は, $e_1, \cdots, e_{r-2}$ によって生成される V_{r-1} の任意の基底の元を 0 に射影し, **かつ** $\langle \mathbf{1}_{r-1}, f_{r-2} \rangle = \mathrm{tr}(f_{r-2}) = \Delta_{r-1} = 0$ である. よって, $\langle -, f_{r-2} \rangle : V_{r-1} \longrightarrow \mathbf{C}$ は零写像である. $m \geq r-1$ に対しては, (V_mの元の図形表示を水平に描くという約束のもとで) 与えられた V_{r-1} の元の上に, $m-r+1$ 本の平行な線を加えることにより得られる標準的な包含写像 $V_{r-1} \hookrightarrow V_m$がある. すると, $m \geq r-1$ のとき, $\langle -, f_{r-2} \rangle : V_m \longrightarrow \mathbf{C}$ が零写像であることは簡単にわかる. よって, ($f_{r-2} \neq 0$ なので) 双線形形式は退化である. そこで, $q(m) = \mathbf{1}_m - f_{r-2}$ とすれば, 定理 16.9(ii) の証明が終る. □

$r = 4$ の場合の系 16.9 の例をあげておく. $f_1 = 1 - \delta^{-1}e_1, e_1 f_1 = 0$ であり, $\mu_2 = (\delta - \mu_1)^{-1}$ である.

$$
\begin{aligned}
f_2 &= f_1 - \mu_2 f_1 e_2 f_1 \\
&= (1 - \delta^{-1}e_1)(1 - \mu_2 e_2(1 - \delta^{-1}e_1)) \\
&= (1 - \delta^{-1}e_1)(1 - \mu_2 e_2 + \mu_2\delta^{-1}e_2 e_1)
\end{aligned}
$$

$$= 1 - \mu_2 e_2 + \mu_2\delta^{-1}e_2e_1 - \delta^{-1}e_1 + \delta^{-1}\mu_2 e_1e_2 - \mu_2\delta^{-2}e_1e_2e_1$$
$$= 1 - (\delta^{-1} + \mu_2\delta^{-2})e_1 - \mu_2 e_2 + \mu_2\delta^{-1}e_2e_1 + \delta^{-1}\mu_2 e_1e_2.$$
$$\therefore\ f_2 = 1 - \delta(\delta^2-1)^{-1}e_1 - \delta(\delta^2-1)^{-1}e_2 + (\delta^2-1)^{-1}e_1e_2 + (\delta^2-1)^{-1}e_2e_1.$$

V_3 は基底 $\{1, e_1, e_2, e_1e_2, e_2e_1\}$ をもつ. $\delta = -2\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}$ なので, $f_2 \neq 0$ である. ところで, 元 $q(3)$ は次の形をしている:

$$q(3) = \left(\frac{1}{\delta^2 - 1}\right)[\delta e_1 + \delta e_2 - e_1e_2 - e_2e_1],$$

$$q(3) = \sqrt{2}e_1 + \sqrt{2}e_2 - e_1e_2 - e_2e_1.$$

定理 16.8 と 系 16.9 の美しさは, これらの射影の特殊な構成と双線形形式の退化性を示しているところにある.

系 16.9 は, 定理 16.5 の条件 (ii) (双線形形式の退化性) を導くので, 3 次元多様体の不変量の存在を確立するためには, 方程式

$$\delta^j = \sum_{i=0}^{r-2} \lambda_i T_{i+j} \qquad (j = 0, 1, 2, \cdots, r-2)$$

の解 $\lambda_0, \cdots, \lambda_{r-2}$ の一意性を示せばよい (もちろん代数の定理 16.8 を証明する必要はある). つまり, 次の定理を示さなければならない.

定理 16.10. $A = e^{\pi i/2r}$ $(r \geq 3)$ のとき, 行列 $\{T_{i+j} : 0 \leq i, j \leq r-2\}$ は正則である.

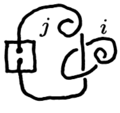
証明. $\{T_{i+j}\}$ が非正則であると仮定する. これは, $j = 0, 1, \cdots, r-2$ について, $\mu_i \in \mathbf{C}$ が存在し,

$$\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i T_{i+j} = 0 \quad (j = 0, 1, \cdots, r-2)$$

となることを意味する (ただし, μ_iの中には 0 でないものがある). すると,

$$\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i \left\langle\right.$$  $$\left.\right\rangle = 0.$$

ここで, 次の形をしたタングル上の写像を考えよう:

$$\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i \left\langle\right.$$  $$\left.\right\rangle.$$

補題 16.6 で使った "円環トリック" とまったく同じことを用いて, この写像がタングル上恒等的に 0 となることを示すことができる. よって,

$$\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i \Big\langle$$  $$\Big\rangle = 0$$

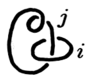
となり,

$$\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i \Big\langle$$  $$\Big\rangle = 0.$$

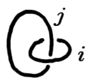
である. このことは, 行列

$$\Big\{\Big\langle$$  $$\Big\rangle : 0 \le i, j \le r-2\Big\}$$

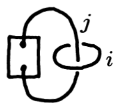
が非正則であることを示している. したがって,

$$\sum_{i=0}^{r-2} \nu_i \Big\langle$$  $$\Big\rangle = 0$$

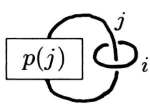
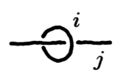
を満たす定数 $\nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_{r-2}$ (0 でないものが含まれる) が存在する. さて,

$$\sum_{i=0}^{r-2} \nu_i \Big\langle$$  $$\Big\rangle = 0$$

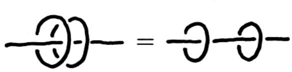
を示すために, もう一度円環トリックを使い, 最終的にすべての $j = 0, 1, \cdots, r-2$ に対し, タングル上の写像として

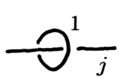
$$\sum_{i=0}^{r-2} \nu_i \Big\langle$$  $$\Big\rangle = 0$$

となる. 特に, この写像に系 16.9 の元 $p(j)$ を入れると,

$\Big\langle$  $\Big\rangle$ は, $x_j^i =$  $\in V_j$

の基底を用いて表したときの $\mathbf{1}_j$の係数 $\mathbf{1}'_j(x_j^i)$ に等しい.

ここで,  なので, x_j^i は,

$x_j =$  $\in V_j$

という元の i 個の積 $(x_j)^i$となることに注意する. 最後に $\mathbf{1}'_j(x_j)$ を計算してみよう ($\mathbf{1}'(x_j^i) = [\mathbf{1}'_j(x_j)]^i$ に注意しよう). $A^2 = e^{i\theta}$ ならば, すべての j で

$\mathbf{1}'_j(x_j) = -2\cos(j+1)\theta$ となることを帰納法により確かめることは簡単である (ブラケットの練習!). よって, いま $e^{i\theta}$ を 1 の原始 $2r$乗根としているので, $\{\cos(j+1)\theta : j = 0, 1, \cdots, r-2\}$ はすべて異なる. ところで, 行列

$$\{((-2\cos(j+1)\theta)^i) : 0 \leq i, j \leq r-2\}$$

は Vandermonde の行列なので, 行列式は 0 でない. これは, もとの行列が非正則であるという仮定に反する. □

Temperley-Lieb 代数

定理 16.8 の証明がまだ残っている. これは, Temperley-Lieb 代数の関係式を用いた帰納法の実に初等的な練習問題である. 詳細をすべて示すことはせずに, なぜ関係式 $\mu_{n+1} = (\delta - \mu_n)^{-1}$ が必要なのか, また, どこから多項式 Δ_n が出てくるのかということを知るために, 帰納法のステップを解析しよう.

$$f_0 = 1, \qquad f_n = f_{n-1} - \mu_n f_{n-1} e_n f_{n-1}$$

である. 帰納的に, $f_n^2 = f_n$であり, さらに,

$n \leq m-2$ のとき, $f_n \in V_m$に対しては, $(e_{n+1}f_n)^2 = \mu_{n+1}^{-1} e_{n+1} f_n$,
$i \leq n$ のとき, $e_i f_n = 0$

となることを仮定する. すると,

$$\begin{aligned}
f_{n+1}^2 &= (f_n - \mu_{n+1} f_n e_{n+1} f_n)^2 \\
&= f_n^2 + \mu_{n+1}^2 f_n e_{n+1} f_n^2 e_{n+1} f_n - \mu_{n+1} f_n^2 e_{n+1} f_n - \mu_{n+1} f_n e_{n+1} f_n^2 \\
&= f_n + \mu_{n+1}^2 f_n (e_{n+1} f_n)^2 - 2\mu_{n+1} f_n e_{n+1} f_n \\
&= f_n + \mu_{n+1} f_n e_{n+1} f_n - 2\mu_{n+1} f_n e_{n+1} f_n \\
&= f_{n+1}.
\end{aligned}$$

この問題のポイントは, $(e_{n+2}f_{n+1})^2$ に対する帰納法の中にある. 次を得る:

$$\begin{aligned}
(e_{n+2} f_{n+1})^2 &= (e_{n+2}(f_n - \mu_{n+1} f_n e_{n+1} f_n))^2 \\
&= (e_{n+2} f_n - \mu_{n+1} e_{n+2} f_n e_{n+1} f_n)^2 \\
&= e_{n+2} f_n e_{n+2} f_n + \mu_{n+1}^2 e_{n+2} f_n e_{n+1} f_n e_{n+2} f_n e_{n+1} f_n \\
&\quad -\mu_{n+1} e_{n+2} f_n e_{n+2} f_n e_{n+1} f_n - \mu_{n+1} e_{n+2} f_n e_{n+1} f_n e_{n+2} f_n \\
&= e_{n+2}^2 f_n^2 + \mu_{n+1}^2 f_n e_{n+2} e_{n+1} e_{n+2} f_n^2 e_{n+1} f_n \\
&\quad -\mu_{n+1} e_{n+2}^2 f_n^2 e_{n+1} f_n - \mu_{n+1} f_n e_{n+2} e_{n+1} e_{n+2} f_n^2
\end{aligned}$$

(T-L 代数内の添字の差が 2 以上の元どうしは可換である)

$$
\begin{aligned}
&= \delta e_{n+2} f_n + \mu_{n+1}^2 f_n e_{n+2} f_n e_{n+1} f_n \\
&\quad - \mu_{n+1} \delta e_{n+2} f_n e_{n+1} f_n - \mu_{n+1} f_n e_{n+2} f_n \\
&= (\delta - \mu_{n+1}) e_{n+2} f_n + (\mu_{n+1}^2 - \mu_{n+1}\delta) e_{n+2} f_n e_{n+1} f_n \\
&= e_{n+2}(\delta - \mu_{n+1})(f_n - \mu_{n+1} f_n e_{n+1} f_n) \\
&= (\delta - \mu_{n+1}) e_{n+2} f_{n+1}
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\mu_{n+2}^{-1} = (\delta - \mu_{n+1}), \quad \text{または}
$$

$$
\mu_1 = 1/\delta,
$$

$$
\mu_{n+1} = 1/(\delta - \mu_n)
$$

が必要となる. したがって,

$$
\mu_1 = 1/\delta, \qquad \mu_2 = \delta/(\delta^2 - 1), \qquad \mu_3 = (\delta^2 - 1)/(\delta^3 - \delta - 1)
$$

となり, 一般的に,

$$
\mu_{n+1} = \Delta_n / \Delta_{n+1}.
$$

ただし,

$$
\Delta_0 = 1, \qquad \Delta_1 = \delta, \qquad \Delta_{n+2} = \delta \Delta_{n+1} - \Delta_n.
$$

この定義から,

$$
\Delta_n = \prod_{k=1}^{n} (\delta - 2\cos(k\pi/(n+1)))
$$

となることを確かめるのは簡単である. (ヒント: $\delta = x + x^{-1}$とせよ. すると,

$$
\begin{aligned}
\Delta_n \quad &= (x + x^{-1})\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \\
\Rightarrow \quad & \Delta_n - x\Delta_{n+1} = x^{-1}(\Delta_{n-1} - x\Delta_{n-2}) \\
\Rightarrow \quad & \Delta_n - x\Delta_{n-1} = x^{-n} \\
& \Delta_n - x^{-1}\Delta_{n-1} = x^n \\
\Rightarrow \quad & (x - x^{-1})\Delta_n = x^{n+1} - x^{-(n+1)}
\end{aligned}
$$

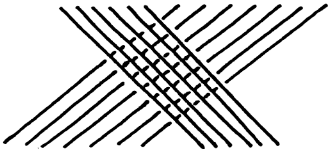
である.) あとは, 等式

$$
\mathrm{tr}(f_n) = \delta^{m-n-1} \Delta_{n+1}
$$

を示せば完了するが, この計算は練習問題として残しておく.

これで定理 16.8 の証明が終り, 3 次元多様体の不変量の構成も完了した. □

議論. 私は, この議論の基になっている Lickorish の論文 [LICK3] を調べることを読者に勧める. Reshetikhin と Turaev の論文 ([RES], [RT1], [RT2]) は, 量子群を含むもっと一般的な視点をもっているという点で, とても有効である. 小さな r に対する特殊な計算や, 量子群の適当な議論をしているという意味で, Kirby と Melvin の論文 [KM] も見るといい. 統計力学の視点から, それぞれケーブルによる交差点



は, 結び目の図形表示の残りの部分と関係のある Potts 模型 (第 II 部, 第 8 節を見よ) のある (ひねられた) 変形である. これは, $r \to \infty$ としたとき, 不変量の性質が Potts 模型の連続極限の性質と関係があることを示している. 特に, Potts 模型と Virasoro 代数との間の予想されている関係 [AW4] が, これらの不変量の振舞いに反映されているのかも知れない.

17節　積分の発見的学習法と Witten 不変量

これまで, 分配関数や「真空」期待値の組合せ的または代数的な類似として, さまざまな絡み目の不変量を構成してきた. それらのモデルは, 次の式を仮定することから始まっている:

$$\langle K \rangle = \sum_{\sigma} \langle K|\sigma \rangle \lambda^{||\sigma||}$$

ただし, $\langle K|\sigma \rangle$ は頂点の重みの積で, σ は絡み目の図形表示により決まるステイトや配置からなる有限集合全体を動く. この式では, 和 $\sum_{\sigma} \lambda^{||\sigma||}$ は単なる分配関数のようなもので, $\langle K \rangle$ は絡み目表示 K のひとつの期待値のようなものである. 絡み目の図形表示は, その射影から得られるステイトの集合から復元することができる.

このような有限和が果たして積分形になるのかということは, 誰しも疑問に思うことである. その原因が (Chern-Simons のラグランジアン (Lagrangian) を用いた) Witten の理論にあることを, まもなく正確に知ることになる. 本節の目的は, Witten の理論を発見的に導入することである. そのために, 最初に Witten による定義式を与え, それをわかりやすく活用してみる. まずはレベル 0 から始め, レベル 1 に移行する.

Witten の定義式

Witten は, 絡み目 $K \subset M^3$ (M^3 はコンパクトで向き付けられた 3 次元多様体) に対する絡み目不変量を, 次の汎関数積分を用いて定義した:

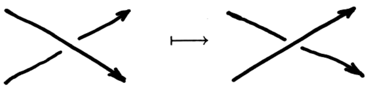
$$Z_K = \int dA e^{\mathcal{L}} \tau_K.$$

ここで, A は M^3 のゲージ場の集合全体を動く. ゲージ場 (ゲージポテンシャル, またはゲージ接続ともよばれている) は, Lie 代数に値をとる 3 次元多様体上の場である. $\mathcal{L}$ は微分形式 (Chern-Simons 形式) のトレースを M^3 上で積分したものであり, この微分形式は, $A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A$ という形をしている. τ_K は K の成分に割り当てられたトレースの積を表す. K が 1 つの成分からなるときは,

$$\tau_K = \mathrm{Trace}\left[\mathbf{P}\exp\left(\oint_K A\right)\right]$$

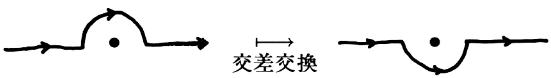
で与えられる．これは，閉回路 K の周りの場 A の積分の，経路積指数関数のトレースである．さて，これらに関する技術的なことに深入りする前に，少しさわりをみてみよう．小さなループ K に対し，関数 τ_K はゲージ場 A の曲率を計量する（このことについてはレベル 1 で議論する）．Chern-Simons のラグランジアン $\mathcal{L}$ もまた，曲率に関する情報をもっていて，この情報は，ゲージ場が点 $x \in M^3$ の近傍で変化するときの $\mathcal{L}$ の振舞いを表している（レベル 1 で，曲率テンソルがゲージ場に関する Chern-Simons のラグランジアンの変化と関係することを確かめる）．これら 2 つの曲率の計量方法は，積分 Z_K において，絡み目不変量を構成する際に，互いに関係している．

結び目理論における次の 2 つの結果から，これらを直感的に調べてみよう．1 番目は，“カール”  上での Z_K の振舞いである．2 番目は，交差点の切り替え



の際の Z_K の振舞いである．カールは小さなループを含んでいるので，τ と τ の差は，曲率に関係したある量であると考えられる．これらの量は，積分するときに出てくる定数の平均と考えられる．

一方， と  の差は，線の周りの小さなループとみなせる．つまり，この線の 1 本がこの紙面に垂直であるとすると（点 ● で表す），交差点の切り替えは次のように描ける：



すると，それらの差は，この紙面に垂直な線の周りの小さなループとなる：



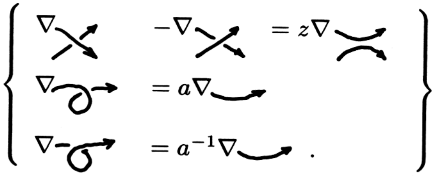
このように，曲率は，枠組みの振舞いと交差点の切り替えの両方に関係があると思われる．（Witten 積分に対するこのような見方は，Lee Smolin [LS1]，筆者 [LK29]，P.Cotta Ramusino, Maurizio Martellini, E.Guadagnini, M.Mintchev [COTT] による．）

レベル 0

このレベルは，いままで述べてきた曲率に関連した考え方をさらに進めていくことから始める．ここでは，その考え方を保つ最も簡単な定式化を確かめる．これから見るように，この定式化は大変エレガントになされる．しかし，これは中身が

ない場合なのである(“美しく書かれているが, 中身はない”). しかし, 純粋な形式——それは想像力を高め, またこの形式に適合した(まだ知られていない)内容をもつかも知れない——への利点がある.

さて, Homfly 多項式の正則同位版に対する形式的な模型を構成してみよう. つまり, 次の性質をもつ結び目・絡み目の関数を得るために, どうすればいいのかを考える:



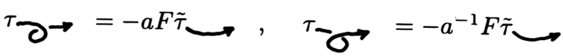
そこでとりあえず,

$$\nabla_K = \int dA e^{\mathcal{L}} \tau_K$$

と書いてみて, 次を仮定する:

(1) $\dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta A} = F$

(2) 

(3) 

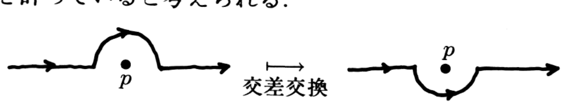
(4) $\delta\tilde{\tau}/\delta A = \tau.$

F は曲率(の考え方)を表す; つまり, (1), (2), (3) は, それぞれ, 曲率とラグランジアン $\mathcal{L}$, 交差点の入れ替えによる曲率の変化, カールによる曲率への影響を表している. レベル 0 においては, A を変数として微分するという, 簡単な計算を用いる.

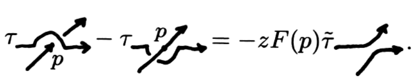
にもかかわらず, 有限の大きさの曲線は, その中心で, 場の曲率を正確には表さないという事実を考慮しなければならない. よって, 局所的なスケイン関係式 (2) は,



となる汎関数 $\tilde{\tau}$ を含んでいる. 厳密にいうと, F は, 交差点を切り替えている点 p における曲率を計っていると考えられる:



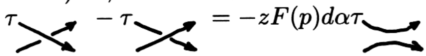
よって,



これについては,"巻き上げ (rolled up)" という, 小さなループ ℓ を関数 $\tilde{\tau}$ に付け加え, 中心 p での曲率に加えるという考え方もできる:



実際, 仮定 (4) ($\delta\tilde{\tau}/\delta A = \tau$) が,



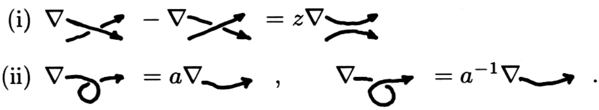
(ただし, $d\alpha$ はループ ℓ に囲まれた領域の関数) に対し, どのような意味をもつのかということがだいたいわかる. よって, 近似の最初の目的に対しては,

$$\tau\delta A = d\alpha\delta\tau$$

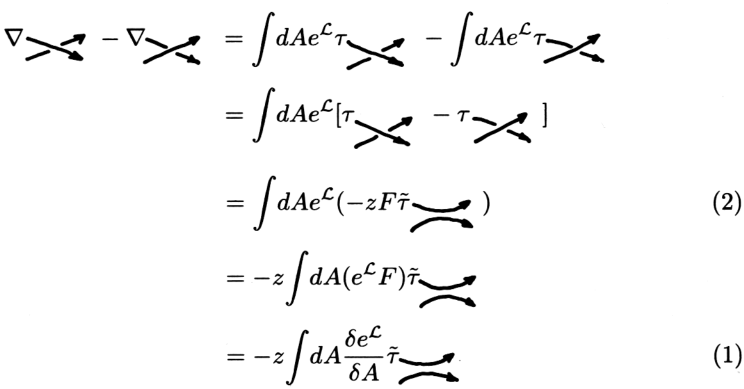
を仮定している. ただし, δA は線の近傍におけるゲージ場の変化を表し, $d\alpha$ は線に垂直な小さな領域を表す. よって, 仮定 $\delta\tilde{\tau}/\delta A = \tau$ は, **場の変化と線の周りの幾何的な対応に関する仮定**である.

これらの仮定のもと, さらに部分積分 $\int f'g = [fg] - \int fg'$ によって出てくる境界の項 $[fg]$ が消えると仮定すれば, 大局的スケイン関係式とカールの式が証明できる:

命題 17.1. 仮定 (1),(2),(3),(4) のもとで, 形式的な積分 $\nabla_K = \int dAe^{\mathcal{L}}\tau_K$ は次の性質を満たす:



証明. (i) を示すために, 差をとり, 部分積分をする.



$= z\int dAe^{\mathcal{L}}\dfrac{\delta\tilde{\tau}}{\delta A}$  (部分積分)

$= z\int dAe^{\mathcal{L}}\tau$  (4)

$= z\nabla$ 

(ii) も同様に示せる. 以下, ∇  の場合を示す.

∇  $= \int dAe^{\mathcal{L}}\tau$ 

$= \int dAe^{\mathcal{L}}(-aF\tilde{\tau}$  $)$ (3)

$= -a\int dA(e^{\mathcal{L}}F)\tilde{\tau}$ 

$= -a\int dA\left(\dfrac{\delta e^{\mathcal{L}}}{\delta A}\right)\tilde{\tau}$  (1)

$= a\int dAe^{\mathcal{L}}\dfrac{\delta\tilde{\tau}}{\delta A}$  (部分積分)

$= a\int dAe^{\mathcal{L}}\tau$  (4)

$= a\nabla$  .

以上で証明を終る. □

議論. この発見過程において, 場の振舞いと幾何との間の関係のもっともらしい条件は, そのような場にわたる局所的な (曲率の) 振舞いの平均の積分を導き, また, 大局的スケイン関係式と枠組みに関する等式を与えることがわかった. スケイン関係式や枠組みに関する等式の物理的な意味を深く考えることで, これらの考え方をもっと詳しく調べることは興味深いであろう. 実際, この初等的な話の大部分は, ゲージ場の 3 次元での定式化の議論をする間中繰り返される. このことは, レベル 1 でみることにする.

注意. $\nabla_K = \int dAe^{\mathcal{L}}\tau_K$ の振舞いを調べていくなかで, ∇_K が, 全同位の不変量**でない**ことがわかった. この値は, 枠組みのとり方により, ここでは絡み目表示の黒板枠組みにより表される.

注意. ゲージ理論の道具をフルに活用することが, この発見のための公理を保つ

最善の方法である．にもかかわらず，これは，条件 (1)–(4) に対する他の解の可能性を残している．

いずれにせよ，レベル 0 で発見を試みるのはおもしろい．例えば，次の展開を考える:

$$\tau_K = e^{\oint_K A} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\iint \cdots \int_{K^n} A^n \right] \Big/ n!.$$

すると，

$$\nabla_K = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dA e^{\mathcal{L}} \iint \cdots \int_{K^n} A^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \iint \cdots \int_{K^n} \left[\int dA e^{\mathcal{L}} A^n \right].$$

よって，

$$\nabla_K = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \iint \cdots \int_{K^n} \langle A(x_1) \cdots A(x_n) \rangle.$$

ただし，$\langle A(x_1) \cdots A(x_n) \rangle$ は，K 上の n 点に対する場の積の相互関係の値を示している．つまり，この展開において，絡み目不変量は，絡み目 Kの "自己相互作用" の計算のような，Feynman 表示の無限和になる ([BN],[GMM] を参照).

レベル 1

レベル 0 では計算が簡単であったが，レベル 1 ではもう少し複雑で，ゲージ理論について復習する必要がある．まずは $SU(2)$ の復習から始める．

$SU(2)$ は，複素数上で行列式が 1 である行列のユニタリ群である．よって，$U \in SU(2)$ は $U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ で，$ad - bc = 1,\ \overline{d} = a,\ \overline{c} = -b$ となっている．ここで，$\overline{}$ は複素共役を表す．

U^* を，U の随伴行列 (転置して各係数の共役をとったもの) とすると，

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}, \qquad a\overline{a} + b\overline{b} = 1$$

について，

$$UU^* = \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & -b \\ \overline{b} & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

となることに注意する．$U = e^{i\eta}$ (η は 2×2 行列) と書くことにすると，$UU^* = 1$

かつ $\det U = 1$ という条件は, $\eta = \eta^*$ かつ $\mathrm{tr}(\eta) = 0$ と書き直せる (ただし, tr は行列に対する普通のトレース). トレースが 0 の行列は, 次のような形をしている:

$$\eta = \begin{bmatrix} x & y \\ x & -x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$\eta = \eta^*$ という条件を満たす行列 η は, 次の Pauli の行列を考えることにより与えられる:

$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tau_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

つまり, これらの行列の線形結合が行列 η を与えている.

普通, η を $\eta = -\theta(\widehat{n} \cdot \tau)/2$ とかく. ここで, $\widehat{n} = (n_1, n_2, n_3)$ は実単位ベクトルで, $\widehat{n} \cdot \tau = n_1\tau_1 + n_2\tau_2 + n_3\tau_3$ である. すると,

$$e^{i\eta} = e^{-i\theta(\widehat{n}\cdot\tau)/2} = \lim_{N\to\infty} \left(1 - \frac{i}{2}\frac{\theta}{N}\widehat{n} \cdot \tau\right)^N$$

で, $1 - \frac{i}{2}(d\theta)\widehat{n} \cdot \tau$ は, 無限小のユニタリ変換と考えられる. Pauli の行列 $\tau_a/2$ $(a = 1, 2, 3)$ は, $SU(2)$ の "無限小の生成元" とよばれる. これらは, 交換関係 $[\frac{1}{2}\tau_a, \frac{1}{2}\tau_b] = i\varepsilon_{abc}\frac{1}{2}\tau_c$ (ただし, ε_{abc} は 3 つの添字の交代記号を表す) を満たしていることに注意する.

一般に, 次元 r の Lie 群に対し, 随伴 Lie 代数 (無限小の生成元) があって, その基底は $t_1, t_2, \cdots, t_r$ で, 関係式は

$$[t_a, t_b] = if_{abc}t_c$$

である (ただし, 右辺はすべての添字 c を動くときの和である). 構造定数 f_{abc} は, それ自身, 随伴表現とよばれる Lie 代数の行列表現を与える. これは, G の Lie 代数の元 A, B に対して, $ad(A)(B) = [A, B]$ によって定義される. よって, $T_a = ad(t_a)$ とすると,

$$T_a(t_b) = [t_a, t_b] = if_{abc}t_c$$

となる. それゆえ, 基底 $\{t_1, t_2, \cdots, t_r\}$ に関して, $(T_a)_{bc} = if_{abc}$ である.

$SU(2)$ の場合, 随伴表現は次の行列を与える:

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

これらの行列は, $\boldsymbol{R}^3$ の 3 本の直交軸に関する無限小の回転を表す. またこれらの生成元は, $\mathrm{Trace}(T_aT_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ (ただし, δ_{ab} は Kronecker のデルタ) となるように

正規化されている.

$SU(2)$ に関するこれらの注意のもとで, ゲージ理論に話を戻そう. まず最初に, 磁場 $\vec{B}$ に対する Maxwell 方程式 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ を復習する. 磁場は発散しないので, 別の場 $\vec{A}$ のカールとして書ける. よって, $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ (ここで, $\vec{A}$ はベクトルポテンシャルとよばれる). 任意の $\vec{A}$ に対し, $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$ なので, $\vec{B}$ は発散しない. 傾きのカールは 0 なので, 場 $\vec{B}$ の値を変えずに $\vec{A}$ をスカラー場の任意の傾きに変えることができる. よって, $\vec{A'} = \vec{A} + \nabla\Lambda$ ならば, $\nabla \times (\vec{A'}) = \nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ である. 同様に, 電場に対するカール方程式は, $\nabla \times (\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t) = 0$ より, $\nabla \times \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ である. このことから, 電場とベクトルポテンシャルの時間による微分の線形結合は, $\vec{E} + \partial\vec{A}/\partial t = \nabla V$ としなければならない. ここで V はスカラーポテンシャルとよばれる. もし $\vec{A'} = \vec{A} + \nabla\Lambda$ ならば, 電場を保存するために $V' = V - \partial\Lambda/\partial t$ とおかなければならない.

テンソルの形では, 4 次元のベクトルポテンシャル $A^\mu = (V; \vec{A})$ からでてくる電磁テンソル

$$F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$$

を用いることができる. このテンソルは, **ゲージ変換** $A^\mu \mapsto A^\mu - \partial^\mu \Lambda$ により不変である (ただし, Λ はこれらの座標軸に関する任意の微分可能な関数).

このゲージ不変量は, 電磁気と量子群の定式化を結んでいる. 量子力学におけるステイトが, 複素数に値をとる波動関数 $\psi(x)$ により表されることや, 量子群の観察から, $\langle E \rangle = \int \psi^* E \psi$ という形の積分を含むことを思い出そう. そのような平均は, 大局的な位相のずれ $\psi(x) \mapsto e^{i\theta}\psi(x)$ のもとで不変である. よって, $\psi'(x) = e^{i\theta(x)}\psi(x)$ とおいたときに, 量子群においてどんなことが起こるのかを考えるのは自然である. 直ちに, $\psi'(x)$ の微分

$$\partial_\mu \psi'(x) = e^{i\theta(x)}[\partial_\mu \psi(x) + i(\partial_\mu \theta(x))\psi(x)]$$

が位相のずれ以上のことを含むのがわかる.

微分 ∂_μ を, ゲージ共変微分

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$$

に置き換え (e をチャージ, A_μ を $\psi(x)$ に付随した電磁場に対する 4 次元ベクトルポテンシャルと考えよ), $\psi \mapsto \psi' = e^{i\theta(x)}\psi$ のとき, $A_\mu \mapsto A'_\mu = A_\mu - (1/e)\partial_\mu\theta(x)$ のように変換されるとすると, $\mathcal{D}_\mu\psi'(x) = e^{i\theta(x)}\mathcal{D}_\mu\psi(x)$ となる. このように, ゲージ不変量は, 量子群と電磁場の相互関係を自然に導く. これは, もともと Herman Weyl [WEYL] による考え方である.

Aharonov-Borm 効果

波動関数 $\psi^0(x,t)$ がベクトルポテンシャルを考慮しない場合の Schrödinger 方程式の解となっているとき，ベクトルポテンシャルを考慮した場合の解は，$\psi(x,t) = \psi^0(x,t)e^{iS/\hbar}$ ($S = e\displaystyle\int dx \cdot \vec{A}$, [Q] の 43 ページを見よ) となっている．このとき, 新しい解は, 元の解に比べて位相の分だけ異なっているので, ポテンシャルには特に影響はない．

電子の光線が障害により分離していて, ソレノイドの反対側の 2 つの道に進んでいるとしよう．ソレノイドを通過した後, 光線は再び組み合わされ, その結果できた干渉のパターンは, それぞれの道に対する波動関数の和になる．ソレノイドにおける電流 (current) である磁場 $\vec{B}$ は, 本質的にソレノイドに制限されている．$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$ なので, Stoke の定理により, ソレノイドを含む閉じたループの周りの A の線積分は零ではない (本質的には定数—— $\vec{B}$ の流れの量——である)．波動関数の 2 つの成分による干渉は, 閉じたループのまわりの積分からなる位相の差 $(e/\hbar)\displaystyle\oint dx \cdot \vec{A}(x)$ により決定される．つまり, ベクトルポテンシャルは, 量子力学の意味で大変重要なのである! さらに, 重要な位相因子は Wilson ループ

$$\exp\left[(-ie/\hbar)\oint dx^\mu A_\mu\right]$$

である．

これで, ゲージ理論とトポロジーの舞台が用意できた．

平行移動と Wilson ループ

前の議論で, 積分 $R(C;A) = \exp\left[i\displaystyle\int_{p_1}^{p_2} A \cdot dx\right]$ (ここで A はベクトル場) の物理的な意味での重要性を強調した．A がゲージ変換

$$A \mapsto A' = A - \nabla\Lambda$$

により A' に変換されると，

$$R(C;A') = e^{-i\Lambda(p_2)}R(C;A)e^{i\Lambda(p_1)}$$

となる．この積分は, 点 p_1 と点 p_2 の間の波動関数 ψ に対する平行移動を与える．特に，

$$p_1 = x, \quad p_2 = x + dx$$

と置き換えると，

$$R(C;A) = 1 + iA \cdot dx$$

と書ける．波動関数 $\psi(x)$ の点 $x + dx$ への移動は, $\psi^t(x) = (1 + iA \cdot dx)\psi(x)$ と

なる. よって, 共変導関数 $\mathbf{D}\psi$ を,

$$\mathbf{D}\psi = \frac{\psi(x+dx) - \psi^t(x)}{dx}$$

により定義する. すると,

$$\mathbf{D}\psi = \frac{\psi(x+dx) - \psi(x) + \psi(x) - \psi^t(x)}{dx}$$

と書け,

$$\mathbf{D}\psi = (\nabla - iA)\psi$$

となる. (これは, Aharonov-Bohm 効果の議論の前の計算と一致している.)

波動関数 $\psi(x)$ がゲージ変換のもとで,

$$\psi(x) \mapsto \psi'(x) = e^{-i\Lambda(x)}\psi(x)$$

と変換されるとき,

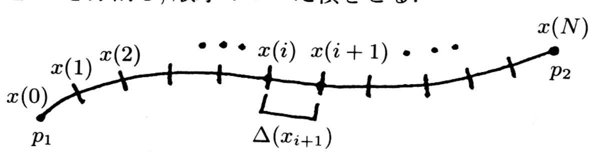
$$\begin{aligned}
\mathbf{D}'\psi'(x) &= (\nabla - iA')e^{-i\Lambda(x)}\psi(x) \\
&= (\nabla - iA + i\nabla\Lambda)e^{-i\Lambda(x)}\psi(x) \\
&= e^{-i\Lambda(x)}(-i\nabla\Lambda + \nabla - iA + i\nabla\Lambda)\psi(x) \\
&= e^{i\Lambda}(\nabla - iA)\psi \\
\mathbf{D}'\psi' &= e^{-i\Lambda}\mathbf{D}\psi
\end{aligned}$$

となる. このことに注意して, 任意のゲージ群の場合に一般化してみよう. (電磁場の場合は位相 $e^{i\theta}$ に対応するゲージ群 $U(1)$ にあたる.)

さて, エルミート行列 $[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$ によって表される Lie 代数の話に戻ろう. 群の元は, Λ^a を実数として, $U = e^{-i\Lambda^a}T_a$ (a に関する和) という形をしている.

このような状況で, ゲージ場はベクトルポテンシャルの一般化である. このゲージ場は, (波動関数 $\psi(x)$ の $\psi_a(x)$ への分解に対応する) 内部的な添字 a により, Lie 代数に値をもつ: $A_\mu(x) = T_a A_\mu^a(x)$. よって, $A(x) = (A_1(x), A_2(x), A_3(x))$ は, 3 次元空間上 Lie 代数に値をもつ場を与える. 無限小の移動は, $R(x+dx, x; A) = 1 - idx^\mu A_\mu(x)$ により与えられる.

この移動を, Lie 代数の元の非可換性に注意しながら, 有限の軌道に広げよう. p_1 から p_2 への道 C を分割し, 順序のついた積をとる:



$$\prod_{\ell=1}^{N}(1 - i\Delta x_\mu(\ell)A^\mu(x(\ell))).$$

この順序のついた積の$\Delta x(\ell) \to 0$ としたときの極限 (存在するとすれば) は, 定義により, **経路積指数関数** (path-ordered exponential)

$$R(C;A) = \mathbf{P}\exp\left(-i\int_\alpha^\beta A(x)\cdot dx\right)$$

となる. そこで,

$$R(C;A') = U(\beta)R(C;A)U^{-1}(\alpha)$$

となるように, ゲージ変換 $A \mapsto A'$ を考えたい (可換な場合にも, これで対応できる).

A に対する変換則を決定するため, 無限小の場合を考えると,

$$\begin{aligned}
1 - idx^\mu A'_\mu &= U(x+dx)(1 - idx^\mu A_\mu)U^{-1}(x)\\
&= U(x+dx)U^{-1}(x) - idx^\mu[U(x+dx)A_\mu U^{-1}(x)]\\
&= (U(x) + U'(x)dx)U^{-1}(x) - idx^\mu[(U(x)+U'(x)dx)A_\mu U^{-1}(x)]\\
&= 1 + [(\partial_\mu U)dx^\mu]U^{-1} - idx^\mu[(U + \partial_\mu U dx^\mu)A_\mu U^{-1}]\\
&\doteqdot 1 + ((\partial_\mu U)U^{-1})dx^\mu - idx^\mu[UA_\mu U^{-1}]\\
&= 1 + ((\partial_\mu U)U^{-1} - iUA_\mu U^{-1})dx^\mu\\
&= 1 - idx^\mu[i(\partial_\mu U)U^{-1} + UA_\mu U^{-1}]
\end{aligned}$$

が得られるので, 次が成り立つ:

$$\boxed{A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + i(\partial_\mu U)U^{-1}}$$

この等式は, 非可換の場合のゲージ変換の適当な一般化を定義する.

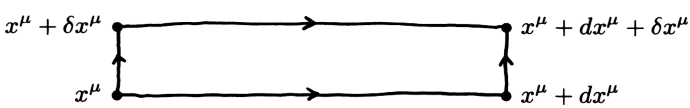
共変導関数の置き換えと, Wilson ループによる平行移動を用いて, 小さなループの周りの平行移動によるゲージ理論的な曲率の類似を考えよう. つまり, 与えられたゲージポテンシャル

$$A_\mu = A_\mu(x) = A_\mu^a(x)T_a$$

に対し, **曲率テンソル** $F_{\mu\nu}$ を次の式で定義する:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu].$$

ただし, $[A_\mu, A_\nu] = A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu$ である. 極小のサーキット □:



を考えよう．

$$\begin{aligned} R_{\square} &= R(\square; A) \\ &= \mathbf{P}\exp(i \oint A dx) \end{aligned}$$

を，このサーキットに対する Wilson ループとする．

補題 17.2. 上のような $\square$ に対し，次が成立する:

$$R(\square; A) = \exp\{iF_{\mu\nu}dx^{\mu}\delta x^{\nu}\}.$$

証明.

$$\begin{aligned} R_{\square} &= R(x, x+dx) \cdot R(x+dx, x+dx+\delta x) \\ &= R(x+dx+\delta x, x+\delta x)R(x+\delta x, x). \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} &R(x, x+dx)R(x+dx, x+dx+\delta x) \\ &= \exp(iA_{\mu}(x)dx^{\mu})\exp(iA_{\nu}(x+dx)\delta x^{\nu}) \\ &= \exp\left\{ i[A_{\mu}dx^{\mu} + A_{\nu}\delta x^{\nu} + \partial_{\mu}A_{\nu}dx^{\mu}\delta x^{\nu}] - \frac{1}{2}[A_{\mu}, A_{\nu}]dx^{\mu}\delta x^{\nu} \right\}. \end{aligned}$$

ここでは，行列 A, B とスカラー λ に対する次の (容易に確かめられる) 等式を用いた:

$$e^{\lambda A}e^{\lambda B} = e^{\lambda(A+B)+(\lambda^2/2)[A,B]} + \mathcal{O}(\lambda^3).$$

同様に，ループが戻ってくるところでは，次が成り立つ:

$$\begin{aligned} &R(x+dx+\delta x, x+\delta x)R(x+\delta x, x) \\ &= \exp(-iA_{\mu}(x+\delta x)dx^{\mu})\exp(-iA_{\nu}(x)\delta x^{\nu}) \\ &= \exp\left\{ -i(A_{\mu}dx^{\mu} + \partial_{\nu}A_{\mu}dx^{\mu}\delta x^{\nu} + A_{\nu}\delta x^{\nu}) - \frac{1}{2}[A_{\mu}, A_{\nu}]dx^{\mu}\delta x^{\nu} \right\}. \end{aligned}$$

これらの式をかけることにより，

$$\begin{aligned} R_{\square} &= \exp\{i[\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - i[A_{\mu}, A_{\nu}]]dx^{\mu}\delta x^{\nu}\} \\ &= \exp(iF_{\mu\nu}dx^{\mu}\delta x^{\nu}) \end{aligned}$$

を得る．これで証明を終る． □

注意. この 2 つの表し方は，曲率を考える上で有効である．ゲージポテンシャルを，1-form $A = A_{\mu}^{a}T_{a}dx^{\mu}$ (a, μ に関する和をとる) と表すと，$A = A_{\mu}dx^{\mu}$ で，

$$dA - iA \wedge A = \frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu])dx^\mu \wedge dx^\nu$$
$$= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$$

である. よって, 曲率は微分形式により表される. この書き方では, i を含まない書き方が普通ではあるが, 移動 $\psi(x+dx) = (1+iA_\mu dx^\mu)\psi(x)$ の表し方として, i を含む方が自然だと思われるので, この記法を採用している.

もう一つの表し方は, Lie 代数 $[T_a, T_b] = if_{abc}T_c$ (c 上の和) を用いて曲率の各項を明白に計算するという方法である. この定式化を行うため, f_{abc} は, a, b, c に関して反対称であると仮定する. すると, 次のようになる:

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A^b_\mu - i[A_\mu, A_\nu] \\
&= \partial_\mu A^a_\nu T_a - \partial_\nu A^b_\mu T_b - i[A^a_\mu T_a, A^b_\nu T_b] \\
&= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_a - iA^a_\mu A^b_\nu [T_a, T_b] \\
&= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_a + A^a_\mu A^b_\nu f_{abc}T_c \\
&= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_a + A^a_\mu A^b_\nu f_{cab}T_c \\
&= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)T_a + A^b_\mu A^c_\nu f_{abc}T_a \\
\therefore \quad F_{\mu\nu} &= (\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + A^b_\mu A^c_\nu f_{abc})T_a.
\end{aligned}$$

したがって, $F^a_{\mu\nu}$ を上の和の中の T_a の係数で定義する:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + A^b_\mu A^c_\nu f_{abc}.$$

Chern-Simons 形式

Chern-Simons 形式, さらにそれと曲率との関係について, 話を進めることにしよう. 微分形式の言葉では, Chern-Simons 形式は次の式で与えられる:

$$\mathcal{CS} = A \wedge dA - \frac{2i}{3}A \wedge A \wedge A.$$

ただし, $A = A^a_\mu(x)T_a dx^\mu$ は, 3 次元空間上のゲージポテンシャルである. T_aが Lie 代数の生成元であるとし, さらに, 次のことを仮定する:

(1) $\mathrm{tr}(T_aT_b) = (\frac{1}{2})\delta_{ab}$. ただし, δ_{ab} は Kronecker のデルタで, tr は普通の行列のトレースとする.

(2) f_{abc} は a, b, c に関して反対称で,

$$[T_a, T_b] = \sum_c if_{abc}T_c \qquad ([T_a, T_b] = T_aT_b - T_bT_a).$$

(本節の後の方で, 基本表現における $SU(N)$ の Lie 代数の特別な場合に制限する.)

Chern-Simons 形式は数に値をとる. ここでの目的に関して言えば, (確かめることはしないが) 与えられた境界のない 3 次元多様体 M^3 とゲージ変換 $g : M^3 \longrightarrow G$ (ここでは G は Lie 群) に対し, 積分は整数倍で変化するということは重要な事実である. もっと厳密にいうと, $\mathcal{CS}$ にゲージ変換を施したものを $\mathcal{CS}^g$ と書くことにすれば,

$$\int_{M^3} \mathrm{tr}(\mathcal{CS}^g) = \int_{M^3} \mathrm{tr}(\mathcal{CS}) + 8\pi^2 n(g)$$

が成り立つ. ここで, $n(g)$ は写像 $g : M^3 \longrightarrow G$ の写像度を表す. この証明は [JACI] を見よ.

よって, ゲージ不変量を得るためには, e の積分乗, つまり,

$$\exp\left(\frac{ik}{4\pi}\int_{M^3} \mathrm{tr}(\mathcal{CS})\right)$$

をとれば十分である. $\mathcal{L}_M = \mathcal{L}_M(A) = \int_{M^3} \mathrm{tr}(\mathcal{CS})$ とすると, $\exp((ik/4\pi)\mathcal{L}_M)$ は, すべての整数 k についてゲージ不変量である.

絡み目と 3 次元多様体の不変量に対する Witten の定義式は, 次式で与えられる:

$$W_K = \int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}_M} \prod_\lambda \mathrm{tr}\left(\mathbf{P}\exp\left(i\oint_{K_\lambda} A\right)\right).$$

(積は, K の成分 K_λ 全体を動く.) ただし, 積分は 3 次元多様体 M^3 のゲージ同値を法とするすべてのゲージ場をとる. このモジュライ空間の値の存在はいまだにわかっていない ([A2] を見よ). にもかかわらず, その値が存在すると仮定して積分の性質を調べることができる.

Witten の積分の形のもっとも注意すべき点の一つは, Wilson ラインから出てきた曲率と, Chern-Simons のラグランジアン $\mathcal{L}_M(A)$ の変化から出てくる曲率の間の相互作用である. 特に, 次が得られる.

命題 17.3. $\mathcal{CS} = A \wedge A - i\frac{2}{3} A \wedge A \wedge A$,

$$\mathcal{L}_{M^3}(A) = \int_{M^3} \mathrm{tr}(\mathcal{CS})$$

とする. ただし, M^3 はコンパクトな 3 次元多様体で, A を上のようなゲージ場とする. このとき, 点 $X \in M^3$ におけるゲージ場の曲率は, 次の式を用いて $\mathcal{L}$ の変化により決定される:

$$\boxed{F^a_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\delta\mathcal{L}/\delta A^a_\lambda}$$

ここで, $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ は 3 つの添数上の "イプシロン" で, $\varepsilon_{123}=+1$ であり, $\mu\nu\lambda$ の置換の符号に従って ±1 の値をとり, それ以外では 0 の値をとる. この式の中の導関数は, 点 X の近傍において変化するゲージ場に関する汎関数微分である. 曲率テンソルは次で与えられる:

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+A^b_\mu A^c_\nu f_{abc}.$$

証明. この命題を証明するために, まず Chern-Simons 形式の局所座標表現を考える.

$$\begin{aligned}
\mathcal{CS}&=A\wedge dA-(2i/3)A\wedge A\wedge A\\
A&=A^a_kT_a dx^k\\
\Rightarrow dA&=\partial_jA^a_kT_a dx^j\wedge dx^k\\
A\wedge dA&=A^a_iT_a\partial_jA^b_kT_b dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k\\
&=A^a_i\partial_jA^b_kT_aT_b dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k\\
A\wedge dA&=\varepsilon_{ijk}A^a_i\partial_jA^b_kT_aT_b dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3.
\end{aligned}$$

同様に, $A\wedge A\wedge A=\varepsilon_{ijk}A^a_iA^b_jA^c_kT_aT_bT_c\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$. したがって,

$$\mathcal{CS}=\varepsilon_{ijk}\left[A^a_j\partial_kA^b_lT_aT_b-\frac{2i}{3}A^a_jA^b_kA^c_lT_aT_bT_c\right]dv.$$

ただし, $dv=dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$.

さて, 今度は $A\wedge A\wedge A$ を Lie 代数の交換子を使って表してみると, 次のようになる:

$$\begin{aligned}
A\wedge A\wedge A&=\varepsilon_{jkl}A^a_jA^b_kA^c_lT_aT_bT_c\\
&=\sum_{\pi\in S_3}\operatorname{sgn}(\pi)A^a_{\pi_1}A^b_{\pi_2}A^c_{\pi_3}T_aT_bT_c.
\end{aligned}$$

ただし, S_3 は $\{1,2,3\}$ 上の置換群を, $\operatorname{sgn}(\pi)$ は置換 π の符号を表す. すると,

$$A\wedge A\wedge A=\sum_{\pi\in\mathrm{Perm}\{a,b,c\}}\operatorname{sgn}(\pi)A^a_1A^b_2A^c_3T_{\pi(a)}T_{\pi(b)}T_{\pi(c)}.$$

ここではまだ a,b,c すべての和をとっており, A^a_μ は可換なスカラーであることを用いる. すると,

$$\begin{aligned}
A\wedge A\wedge A&=A^a_1A^b_2A^c_3\sum_{\pi\in\mathrm{Perm}\{a,b,c\}}\operatorname{sgn}(\pi)T_{\pi(a)}T_{\pi(b)}T_{\pi(c)}\\
&=A^a_1A^b_2A^c_3\{[T_a,T_b]T_c-[T_a,T_c]T_b+[T_b,T_c]T_a\}.
\end{aligned}$$

ここで $\mathrm{tr}(T_aT_b) = (\delta_{ab})/2$ であることを用いれば,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}([T_a, T_b]T_c) &= \sum_k \mathrm{tr}(if_{abk}T_kT_c)\\ &= \sum_k \left(\frac{i}{2}\right) f_{abk}\delta_{kc}\\ &= \left(\frac{i}{2}\right) f_{abc}.\end{aligned}$$

よって, f_{abc} が a, b, c に関して反対称であることから,

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A \wedge A \wedge A) &= \left(\frac{i}{2}\right) A_1^a A_2^b A_3^c [f_{abc} - f_{acb} + f_{bca}]\\ &= \left(\frac{i}{4}\right) A_1^a A_2^b A_3^c \begin{bmatrix} f_{abc} - f_{acb} + f_{bca}\\ -f_{bac} + f_{cab} - f_{cba}\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

したがって, $\mathrm{tr}(A \wedge A \wedge A) = (i/4)\varepsilon_{jkl}A_j^a A_k^b A_l^c f_{abc}$ となり,

$$\mathrm{tr}(\mathcal{CS}) = \frac{\varepsilon_{jkl}}{2}\left[\sum_a A_j^a \partial_k A_l^a + \frac{1}{3}A_j^a A_k^b A_l^c f_{abc}\right].$$

それでは, $\delta\mathcal{L}/\delta A_j^a$ (ただし, $\mathcal{L} = \int_{M^3} \mathrm{tr}(\mathcal{CS})$) を計算しよう. まず,

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta A_l^r}[\varepsilon_{ijk}A_i^a A_j^b A_k^c f_{abc}] &= \varepsilon_{ljk}A_j^b A_k^c f_{rbc} + \varepsilon_{ilk}A_i^a A_k^c f_{arc} + \varepsilon_{ijl}A_i^a A_j^b f_{abr}\\ &= 3\varepsilon_{ljk}A_j^b A_k^c f_{rbc} \quad (\varepsilon, f \text{ がともに反対称であるから})\end{aligned}$$

と,

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta A_l^r}\left(\varepsilon_{ijk}\sum_a A_i^a \frac{\partial A_k^a}{\partial x^j}\right) &= \varepsilon_{ijk}\sum_a \left[\frac{\delta A_i^a}{\delta A_l^r}\partial_j A_k^a + A_i^a \frac{\partial_j[\delta A_k^a]}{\delta A_l^r}\right]\\ &= \varepsilon_{ljk}\partial_j A_k^r + \varepsilon_{ijl}A_i^r \frac{\partial_j[\delta A_l^r]}{\delta A_l^r}\end{aligned}$$

に注意する. M^3 上で部分積分をすると, 境界項は 0 になるので,

$$\begin{aligned}\int_{M^3}\frac{\delta}{\delta A_l^r}\left(\varepsilon_{ijk}\sum_a A_i^a \partial_j A_k^a\right) &= \int_{M^3}\varepsilon_{ljk}\partial_j A_k^r - \int_{M^3}\varepsilon_{ijl}\partial_j A_i^r\\ &= 2\int_{M^3}\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k^r.\end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_i^a} = \int_{M^3} \left[\varepsilon_{ijk}\partial_j A_k^a + \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}A_j^b A_k^c f_{abc}\right]$$

$$\varepsilon_{rsi}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_i^a} = \int_{M^3} (\partial_r A_s^a - \partial_s A_r^a) + \frac{1}{2}[A_r^b, A_s^c] f_{abc}$$

$$= \int_{M^3} F_{rs}^a.$$

ここで, 汎関数微分をとるときに, 点 $x \in M^3$ を中心としたデルタ関数をかけていることに注意すると, 次が得られる:

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda}\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\lambda^a(x)} = F_{\mu\nu}^a(x).$$ □

さてそれでは,積分発見のレベル 1 の話をしよう. まず, 記号と事実から述べよう. K を結び目とし, $\langle K|A\rangle$ を K の周りのゲージポテンシャル A に対する Wilson ループの値とすると,

$$\langle K|A\rangle = \mathrm{tr}\left\{\mathbf{P}\exp\left(i\int_K A_\nu^a(x)T_a dx^\nu\right)\right\}$$

である. Wilson ループは記号を用いて

$$\langle K|A\rangle = \prod_x (1 + iA_\nu^a(x)T_a dx^\nu)$$

と書ける. これは, $\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ を K の分割として, 極限

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n (1 + iA_\nu^a(x_k)T_a dx_k^\nu)$$

の意味である.

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}_{M^3} = \int_{M^3} \mathcal{CS}(A)$$

($\mathcal{CS}$ は Chern-Simons 形式) として,

$$W_K = \int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}}\langle K|A\rangle$$

とする. K が成分 $K_1, \cdots, K_n$ からなるとき,

$$\langle K|A\rangle = \prod_{i=1}^n \langle K_i|A\rangle$$

と書ける.

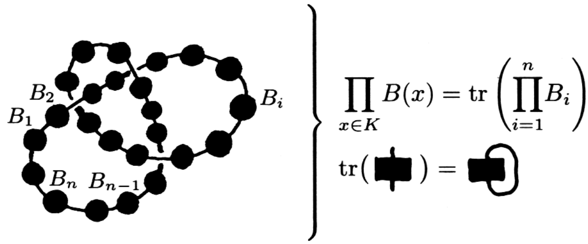
次に W $-W$ の差を決定しよう. これは, 十分大きな k のとき, 交

差交換をしているラインがとても近いときに有効である．この差を，基本表現でのゲージ群 $SU(N)$ に適用するにあたり，よく知られた Homfly スケイン関係式が出てくる．

計算する前に，この模型の図式的な絵について注意深く考えるとよい．まず最初に，

$$\begin{aligned}\langle K|A\rangle &= \prod_{x\in K}(1+iA_\nu(x)dx^\nu) \\ &= \prod_{x\in K} B(x)\end{aligned}$$

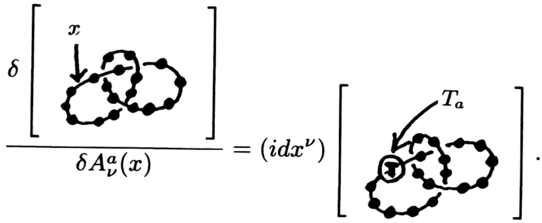
で表される Wilson ループがトレースであることは既にわかっている．それは，行列の 1 周する積だからである：



この意味で，汎関数積分は，以前に考えた結び目や絡み目のラインに沿ったトレースされた行列の積を含むステイト模型と同様である．しかし，絡み目は 3 次元空間，または 3 次元多様体内にあるので，交差点に関して順序がなかった．ところが，行列 $B(x)=(1+iA_\nu(x)dx^0)$ は，埋め込まれた曲線 K に沿って並べられる．それぞれの行列 $B(x)$ は，ゲージポテンシャルの局所的な振舞いの本質を見抜き，それらのトレースの積は，この場に関する観測可能量としての絡み目の作用である．

これらの行列を，普通の図式的なテンソルの約束を用いて，掛けたり並べられたりしたラインとして考えるのは，とても便利である．特に Wilson ラインをゲージに関して微分すると，**ラインの中に行列が挿入される**ことになる：

$$\begin{aligned}\frac{\delta\langle K|A\rangle}{\delta A^a_\nu(x)} &= \frac{\delta}{\delta A^a_\nu(x)}\prod_{y\in K}(1+iA^a_\nu(y)T_a dy^\nu) \\ &= iT_a dx^\nu\langle K|A\rangle \\ \frac{\delta\langle K|A\rangle}{\delta A^a_\nu(x)} &= idx^\nu T_a\langle K|A\rangle\end{aligned}$$



この微分より, Lie 代数の行列 T_a は, ライン上で点 x のところに挿入される. $idx^\nu T_a\langle K|A\rangle$ という書き方は, T_a が挿入されたという意味である. よって, $dx^\nu T_a\mathcal{O}$ は, T_a が積 $\mathcal{O}$ の中の点 x のところに挿入されたという意味である. このような挿入は, より詳しく書くことができるが, 記号が大変である.

曲率の挿入

命題 17.3 より, $F^a_{\mu\nu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\delta\mathcal{L}/\delta A^a_\lambda$ となり, 補題 17.2 より, 曲率 $F^a_{\mu\nu}$ は小さな Wilson ループの値をとることにより書くこともできる. もっと厳密にいうと, 補題 17.2 より,

$$\begin{aligned}\langle\,\square\,|A\rangle &= \mathrm{tr}R(\,\square\,;A) = \mathrm{tr}\exp(iF_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu)\\ &= \mathrm{tr}(1+iF_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) = \mathrm{tr}(1+iF^a_{\mu\nu}T_a dx^\mu dx^\nu).\end{aligned}$$

このことから, 点 x の近傍で少しだけ Wilson ループを動かすと, 新しいラインは x に $1+iF_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ を挿入した分だけ変化する. つまり, その差を $\delta\langle K|A\rangle$ と書くことにすると, それは, **曲率の挿入**により得られる:

$$\delta\langle K|A\rangle = idx^\mu dx^\nu F^a_{\mu\nu}T_a\langle K|A\rangle.$$

もう一度繰り返すが, これは, 変化した点 x への Lie 代数の元 T_aの挿入であり, ほんの少し曲線が動いた軌跡の領域で曲率分だけ変化している.

それでは, W_K 上の Wilson ラインのこの変化の影響を調べよう.

記法. W_K を $\langle K\rangle$ とする. これは, ステイト模型の記号と同じだが, 統計力学の変化でも使われる. ただし, $\langle K\rangle$ は W_K の商で, $W_\phi = \int_M dAe^{(i/4\pi)\mathcal{L}_M}$ である. この記号のもとで, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned}\delta\langle K\rangle &= \int dAe^{(ik/4\pi)\mathcal{L}}\delta\langle K|A\rangle\\ &= \int dAe^{(ik/4\pi)\mathcal{L}}idx^\mu dx^\nu F^a_{\mu\nu}T_a\langle K|A\rangle\end{aligned}$$

$$= \int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}} \left(\varepsilon_{\mu\nu\lambda} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu^a(x)} \right) i dx^\mu dx^\nu T_a \langle K|A \rangle$$

$$= \frac{4\pi}{k} \int dA \frac{\delta(e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}})}{\delta A_\lambda^a(x)} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu T_a \langle K|A \rangle$$

$$= -\frac{4\pi}{k} \int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}} \sum_a \varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu T_a \frac{\delta}{\delta A_\lambda^a(x)} \langle K|A \rangle$$

$$= -\frac{4\pi i}{k} \int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}} [\varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda] \left[\sum_a T_a T_a \right] \langle K|A \rangle.$$

つまり, 次を証明したことになる:

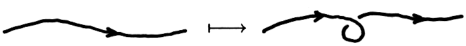
命題 17.4. $\langle K \rangle$ によって, 汎関数積分

$$\langle K \rangle = \int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}_M(A)} \langle K|A \rangle$$

(ただし $\langle K|A \rangle$ は絡み目 K の Wilson ループの積) を表すとすると, Wilson ライン K の点 x の近傍における極小の変形に対応する $\langle K \rangle$ の変化は, 次で与えられる:

$$\delta \langle K \rangle = \frac{-4\pi i}{k} \int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}} [\varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda] \left[\sum_a T_a T_a \right] \langle K|A \rangle.$$

議論. この変形した式を使うためには, 次の言い換えを注意深く行う必要がある. まず初めに, $\sum(x) = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda$ は 3 次元空間の**体積** (area) を表す元で, $dx^\mu dx^\nu$ は変化する曲線が動く軌跡の**領域**, dx^λ はもとの曲線の**垂直方向**に対応していることに注意する. よって, “平坦な” 変形 (例えば平面内で起こる変形) による体積の変化は 0 である. 一方, $\delta\langle K \rangle$ は次のような捻り



に対しては 0 でない. これは, 枠組みの情報が, 汎関数積分の中に含まれていることを示している. 平面上の絡み目表示に対しては, **汎関数積分は正則同位の不変量でなければならない.**

$\sum_a T_a T_a$ という項は, Lie 代数でカシミール元 (Casimir operator) とよばれるものである. $SU(N)$ において, この元の特殊な性質を用いる.

この議論は, k が十分に大きいところでのみ正しい. また, ここでは体積の式 $[\varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx^\mu dx^\nu dx^\lambda]$ について, その値が $+1, -1, 0$ のいずれかになるように正規化しておくと便利である. つまり, $\mu\nu\lambda$ という枠が退化しているか直交しているときのみ用い, そのとき積分は, 正規化されて定数倍になる. 正規化された変化は次のよ

うに書ける:

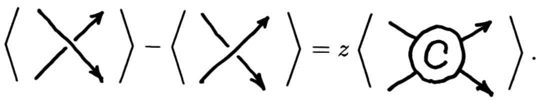
$$\delta\langle K\rangle = \frac{-4\pi i}{k}\int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}}\sum(x)\left[\sum_a T_a T_a\right]\langle K|A\rangle$$

ただし, $\sum(x) = \pm 1$ または 0.

一般化されたスケイン関係式

命題 17.4 の変形した式を使って, 差  を計算してみよう. ここでは, これを不変量 $\langle K\rangle$ に関する一般化されたスケイン関係式とよぶ. 結果は次のとおりである.

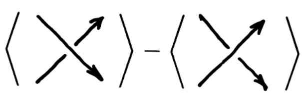
定理 17.5. $\langle K\rangle$ は上で述べてきた正則同位で不変な汎関数積分で, $\langle K\rangle = \int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}}\langle K|A\rangle$ とする. $\{T_a\}$ をゲージ群 G の与えられた表現における Lie 代数の生成元とする. このとき, 十分大きな kに対し, 次の交換等式が成り立つ:

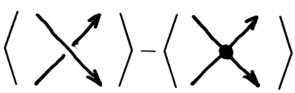
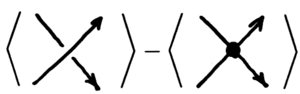


ただし,

(i) $z = e^{-(2\pi i/k)} - e^{(2\pi i/k)} \doteqdot -4\pi i/k$,

(ii) $\mathcal{C} = \sum_a T_a T'_a$ は, ライン  内に点 x において T_a を挿入し, 第 2 の T_a をライン  内に挿入することを表す. (それぞれの線分に別々に挿入される.)

証明.  $= \Delta_+ - \Delta_-$ と書く.

ただし, $\Delta_+ =$ , $\Delta_- =$ 

である.  は, 交差点をグラフの意味での頂点に置き換えたものを表し, x をある頂点とする:



 から  (または ) への変形に命題 17.4 を使うため, 自己交差に関する条件を考えなければならない. x を通る Wilson ループの両方の部分が計算に関係しているからである. ここで, 変形において, 一方の線分だけが動くと仮定する. したがって,

$$\delta\langle K|A\rangle = idx^\mu dx^\nu F^a_{\mu\nu} T_a \langle K|A\rangle$$

で与えられる計算の最初の部分は, **動くラインに T_a を挿入すること**に対応している. 部分積分すると, 汎関数微分$\delta\langle K|A\rangle/\delta A^a_\lambda(x)$ は, x を通る両方のラインに適用される. しかし, 動くラインの方向での差に対する $\sum(x)$ の体積は 0 である (これは, ラインがその垂直方向と平行な方向に動くと仮定したからである). よって, $\mathcal{O}$ を動く線分を含む Wilson ループ (行列 $(1 + idx^\mu A^\mu)$ の積) の部分, $\mathcal{O}'$ を動かない線分として, $\langle K|A\rangle = \mathcal{O}\mathcal{O}'$ と書くことにすると,

$$\frac{\delta\langle K|A\rangle}{\delta A^a_\lambda(x)} = idx^\mu T_a \mathcal{O}\mathcal{O}' + idx'^\mu T_a \mathcal{O}\mathcal{O}'$$

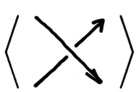
となる. ただし, 2 つの項は, それぞれ $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ 上の x への挿入を表している.

汎関数積分は第 1 項を 0 にするので,

$$\delta\langle K\rangle = \frac{-4\pi i}{k}\int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}} \sum(x) \left[\sum_a T_a T'_a\right] \langle K|A\rangle$$

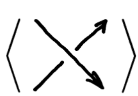
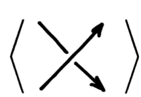
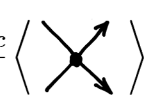
となる. ただし, T_a は動く方のラインに挿入され, $T'_a = T_a$ は動かない方のラインに挿入される.

この証明の冒頭で述べたように, $\delta\langle K\rangle = \Delta_+ - \Delta_-$ として考えている. 体積を表す元 $\sum(x)$ は, Δ_+ に対しては正, Δ_- に対しては負なので, $\Delta_- = -\Delta_+$ であり, つまり $\Delta_+ - \Delta_- = 2\Delta_+$ である. この差は計算において重要である. 約束により,  から  への体積を表す元の差を+1 としたので,

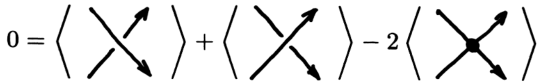
 -  $= \dfrac{-4\pi i}{k}\displaystyle\int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}} \left[\sum_a T_a T'_a\right] \langle K|A\rangle$

となる. この式は定理を積分の形で書いたものである. これで証明は終る. □

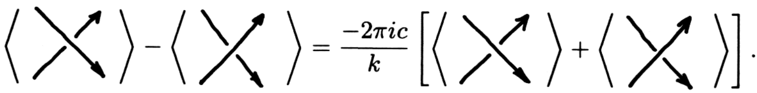
さて, 定理 17.5 の応用を 2 つ説明しよう. 1 番目は, 可換なゲージ群 (例えば, $G = U(1)$) の場合である. このとき, Lie 代数の元は, スカラーと可換であるので, 定理 17.5 の式は, c を定数として,

 -  $= \dfrac{-4\pi ic}{k}$ 

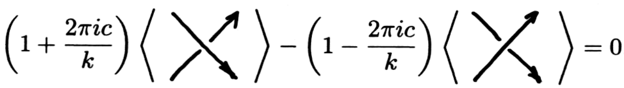
となる．つまり，交差点での行列の挿入はない．$\Delta_+ = -\Delta_-$ に注意すると（定理 17.5 の証明を見よ），$\Delta_+ + \Delta_- = 0$ となるので，



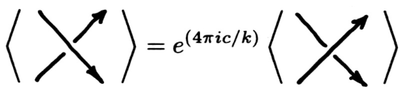
よって，可換なゲージ群においては，



よって，

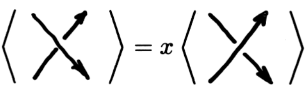


または，k が十分大きいときは，近似値で

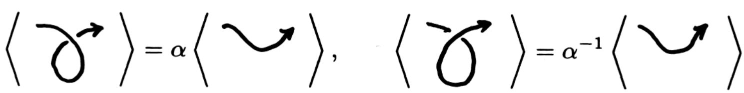


となる．

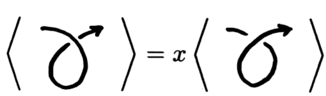
交差交換をすると，汎関数積分は位相因子の分だけ変わるので，可換なゲージ群に対しては，自然に絡み数と捻り数が出てくる: $x = e^{-4\pi ic/k}$ とおくと，



である．発見の仮定により，ある $\alpha \in \mathbf{C}$ があって，



となる．このような α は，次の式により決定される:



$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad \alpha = x\alpha^{-1} \\ &\Longrightarrow \quad \alpha^2 = x \\ &\Longrightarrow \quad \alpha = x^{1/2}. \end{aligned}$$

また，ある δ に対し，$\langle K\bigcirc\rangle = \delta\langle K\rangle$ となり，$\langle\bigcirc\rangle = \delta$ と仮定できる．すると，n 成分絡み目 $K = K_1 \cup K_2 \cup \cdots \cup K_n$ に対し，

$$\langle K\rangle = \left(x^{\sum_{i\neq j} \mathrm{lk}(K_i,K_j) + \sum_i w(K_i)/2}\right)\delta^n$$

となることがわかる. ただし, lk は絡み数を, w は捻り数を表す.

これらのことは, すべて 3 次元空間 (または任意の 3 次元多様体) 内の枠付き絡み目に対する正規化されたものに拡張することができるが, 絡み数と可換なゲージ群の関係が, この発見的方法の中で, いかに単純に現れるかということがとても興味深い.

2 番目の応用は, 基本表現における $SU(N)$ ゲージ群の場合である. ここでは, Homfly 多項式を導き、特に $N=2$ のときには Jones 多項式を導く. $N=2$ のとき, $SU(2)$ の基本表現は, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を Pauli の行列として, $T_a = \sigma_a/2$ で与えられる:

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

ここで, $[\sigma_a, \sigma_b] = i\varepsilon_{abc}\sigma_c$, $\mathrm{tr}(T_a T_b) = (\delta_{ab})/2$ となることに注意しておく. $SU(N)$ の基本表現を式で書くため, ここでは例として $SU(3)$ の場合をあげておく:

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

すると, $T_a = \lambda_a/2$ である.

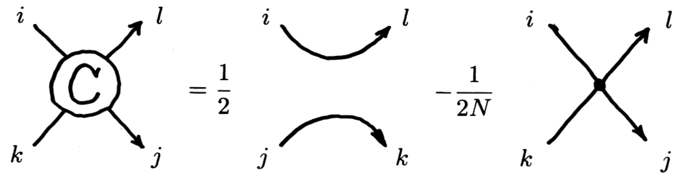
$SU(N)$ の場合も明らかである. 対角行列でないものは, i と $-i$, または, 1 と-1 という 2 つの 0 でない成分をもつ. 対角行列は, 対角成分に k個の 1 が並び, その次に$-k$, それ以降は 0 が続く. さらに, $\mathrm{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ となるように適当な正規化をする.

次に, 基本表現における $SU(N)$ の **Fierz 恒等式**

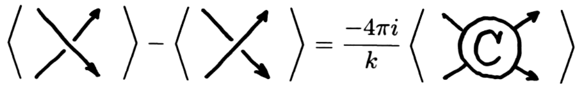
$$\sum_a (T_a)_{ij}(T_b)_{kl} = \frac{1}{2}\delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{2N}\delta_{ij}\delta_{kl}$$

を使う. (練習問題: この式を確かめよ.)

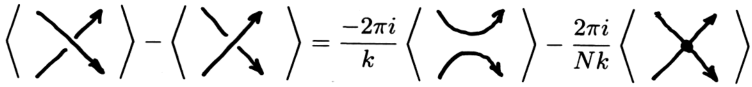
定理 17.5 にこの式を用いると, $\mathcal{C} = \sum_a T_a T'_a$ は,

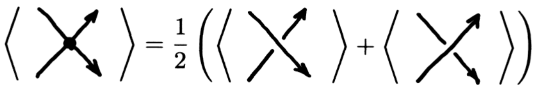


となる．よって，一般化されたスケイン関係式

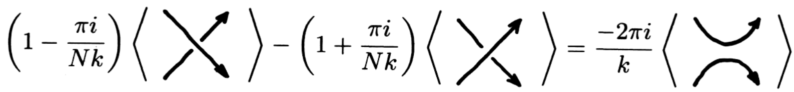


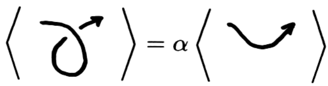
は，$SU(N)$ について，

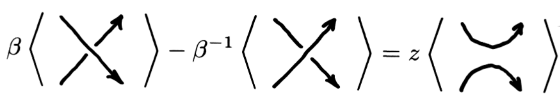


となる．となることを用いれば，

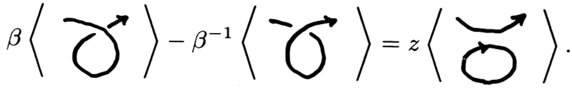
可換な場合と同様に，



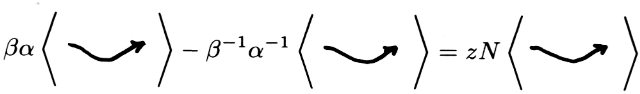
とできる．次に，となる α を，この式を使って決定しよう：$\beta = 1 - \pi i/Nk, z = -2\pi i/k$ とすると，上の式は，



と同値である．よって，



余分なループは，$N \times N$ 単位行列のトレースをとることにより，値 N をとる (Fierz 恒等式と比べてみよ)．よって，$z = x - x^{-1}$ として，



または,

$$\beta\alpha - (\beta\alpha)^{-1} = \left(1 - \frac{\pi i N}{k}\right) - \left(1 + \frac{\pi i N}{k}\right),$$

$$\beta\alpha - (\beta\alpha)^{-1} = x^N - x^{-N}.$$

つまり, $\beta\alpha = x^N$ である.

あとは, 捻り数により正規化された

$$P_K = \alpha^{-w(K)}\langle K\rangle$$

について,

$(\beta\alpha)P$  $-(\beta\alpha)^{-1}P$  $= zP$ 

となることは簡単にわかる. よって, $x^N P$  $-x^{-N}P$  $= (x - x^{-1})P$ 

となり, これは Homfly の特殊化を与える. 実は, これは形式的には, 第 11 節において, YBE と $SL(N)$ 量子群を用いて構成したステイト模型から出てくる特殊化に対応している. Kauffman 多項式と基本表現の $SO(N)$ ゲージについても, 同様の関係が成り立つ. [WIT3] を参照されたい.

積分発見を越えて

これらの単純な発見法の次のステージは, 3 次元多様体の汎関数積分

$$Z_{M^3} = \int dA e^{(ki/4\pi)\mathcal{L}_{M^3}}$$

の k を ∞ にしたときの極限を考えることである. Witten の論文 [WIT2] で, これが 3 次元多様体 M^3 に対する Ray-Singer torsion (解析的 Reidemeister torsion) をどのように導くか, また, 位相因子に関連した η 不変量をどのように導くかを示している. 汎関数積分の拡張についての議論は, [BN] と [GMM] も見るとよい. 量子化は, 共形場理論との関係を導く; [WIT2], [MS], [CR1], [CR2] を参照されたい. [MS] の中で Witten は, 3 次元多様体 M^3 内の絡み目に沿った手術の言葉を用いて, 汎関数積分を 3 次元空間内の絡み目の不変量の和として書き直せるという美しいアイディアを説明している. これは, Z_{M^3} を, 第 16 節で説明した 3 次元多様体の不変量の書き方と本質的には同値な形で表している.

位相的共形場理論と不変量を説明する方法のパターンを直接導く手術を用いたアイディアを述べておこう. それはこうである: M' は埋め込まれた曲線 $K \subset M$ 上の手術により M から得られるとする. 手術により, 3 次元多様体が変わるとき, 汎関数積分 $Z_M = \int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}_M}$ はどう変わるのかを調べよう. 埋め込まれた曲

線に Wilson ループを加えることにより, 汎関数積分がどのように変化するのかは既にわかっている. したがって, Witten は $Z_{M'}$ を次の積分

$$Z_M(K, G_\lambda) = \int dAe^{(ik/4\pi)\mathcal{L}_M} \langle K|A\rangle_\lambda$$

の和として表すことを提案している. ただし, $\langle K|A\rangle$ はゲージ群 G の表現 G_λ における Wilson ループの値を表す. 根気強く適用すると, この方法によって, Z_M を S^3 内の手術曲線の不変量の和で書くことができる. この方法については多くがわかっているが, Reshetikhin, Turaev, Lickorish のブラケットを使った研究 (第 16 節を見よ) は, 手術により 3 次元多様体不変量を考えるというこのアプローチが自明ではないことを示している.

3 次元多様体を分解するとき, 汎関数積分がどうなるのかを調べることも重要である. 3 次元多様体 M^3 の Heegaard 分解を考える. つまり, $M^3 = M_1^3 \cup_\psi M_2^3$ とする. ただし, M_1^3, M_2^3 は曲面 F を境界とする標準的な中味の詰まったハンドル体で, $\psi : F \longrightarrow F$ は貼り合せの写像である. 微分同相写像 ψ は, M を作るための M_1 と M_2 の貼り合せを指定する. すると, (形式的に)

$$Z_M = \langle M_1|\psi|M_2\rangle$$

と書ける. ただし, 汎関数積分をとる上で, データは十分であるとし, **かつ**, $\langle M_1|$ は $M_1 \cup_\psi M_2$ 上積分することで不変量を計算できる組 (ψ, M_2) 上の**汎関数** (functional) とみなせる. この意味で, 汎関数積分は, 汎関数 $\langle M_1|$ からなる Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ と, $|M_2\rangle$ をもつ双対空間 $\mathcal{H}^*$ の概念を導く. ハンドル体 M_1 は "真空ベクトル" $\langle M_1| \in \mathcal{H}$ を与え, (位相の差を除いて決定される) 3 次元多様体の不変量は, 曲面の微分同相写像 $\psi : F \longrightarrow F$ により本質的に決定される内積 $\langle M_1|\psi|M_2\rangle$ である.

よって, 形式的には, Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は F だけに依存していること, また $\mathcal{H}(F)$ と内積の構造および貼り合せの情報 ψ により決まる 3 次元多様体の不変量の直感的な表し方があることがわかった. このゴールは, 曲面上の共形場理論を使うことで到達された ([CR1], [CR2], [CLM], [KO2], [SE], [MS] を見よ). 結果として, 直接に汎関数積分によらないような, これらの不変量が定義できた. にもかかわらず, 汎関数積分の方法は, 共形場理論に直接関連していて, 技術的には中心的な役割をはたしている.

これらの注意をもって, 残念ではあるが第 I 部を終ることにする. 共形場理論と汎関数積分のもっと深いミステリーへの旅は次の機会まで待ってほしい.

覚え書き. 図 21 は, 本節で与えた考え方のいくつかによる基礎的な積分形式の説明である. この考え方は図式化して示されている.

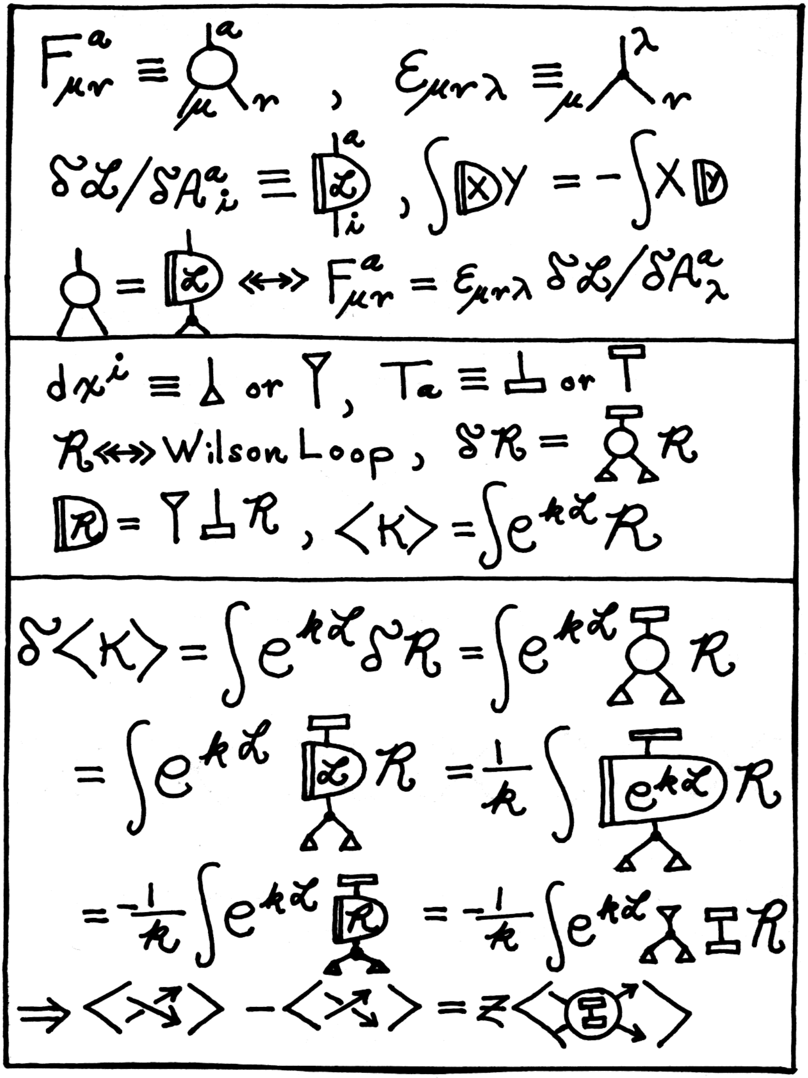
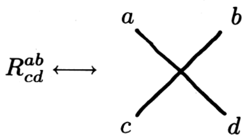


図 21

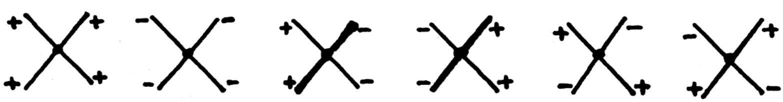
18節　付録——Yang-Baxter 方程式の解

本節では, Yang-Baxter 方程式 (YBE) の解で, 2 つの添字をもつスピンを保存するものに関する条件を, おおまかに説明する.

(ラピディティパラメーターをもたない)YBE の解 $R = R^{ab}_{cd}$ を考える. ただし, 添字は, 集合 $\mathcal{I} = \{-1, +1\}$ の元とする. さらに, この解は, $a+b=c+d$ のときのみ $R^{ab}_{cd} \neq 0$ であるという意味で, **スピンを保つ**とする. そうすると, 1 頂点



の周りでのスピンのとり方はちょうど 6 通りの可能性がある. この 6 通りの可能性は次に示してある:



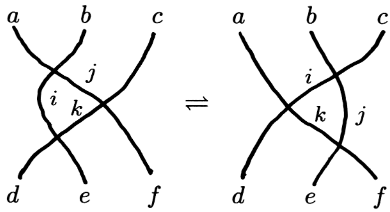
p　　n　　ℓ　　r　　d　　s

下に書いた文字 (p, n, ℓ, r, d, s) は, 行列 R に関する頂点の重みを表している. したがって, R を次のように行列の形で書くことができる:

$R =$

	−−	−+	+−	++
−−	n	0	0	0
−+	0	r	d	0
+−	0	s	l	0
++	0	0	0	p

(ラピディティパラメーターをもたない) YBE は, 次のように表される:



$$\sum_{i,j,k} R^{ab}_{ij} R^{jc}_{kf} R^{ik}_{de} = \sum_{i,j,k} R^{bc}_{ij} R^{ai}_{dk} R^{kj}_{ef}.$$

次に述べるのがこの付録の主結果である:

定理. $R = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & d & 0 \\ 0 & s & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$ が YBE の解であることの必要十分条件は, 次の条件がすべて満たされることである:

$$\left\{\begin{array}{l} r\ell d = 0 \\ r\ell s = 0 \\ r\ell(\ell - r) = 0 \\ p^2\ell = p\ell^2 + \ell ds \\ n^2\ell = n\ell^2 + \ell ds \\ p^2 r = pr^2 + rds \\ n^2 r = nr^2 + rds \end{array}\right\} \quad (*)$$

証明 (概略). YBE を次のように書く:

$$\mathcal{L}^{abc}_{def} = \mathcal{R}^{abc}_{def}$$

ただし, $\mathcal{L}$ と $\mathcal{R}$ はそれぞれ方程式の左辺と右辺で, $a,b,c,d,e,f \in \mathcal{I} = \{-1,+1\}$. この場合,YBE は, a,b,c,d,e,f の選び方により, 64 個の式で書き下せる. さらに, スピンを保存することから, 式の数が減る. 与えられた a,b,c,d,e,f に対し, $\mathcal{L}$ を構成するには,

$$\left.\begin{array}{rcl} a+b &=& i+j \\ j+c &=& k+f \\ i+k &=& d+e \end{array}\right\} \mathcal{L}$$

となる i,f,k をみつけなければならない. $(a,b,c/i,j,k/d,e,f)$ を, この条件を満

たす 1 つの解とする．$\mathcal{L}$ の配置は $\mathcal{R}$ の配置と同じ (上下を入れ換えればよい!) なので, 式を列挙するためには, $\mathcal{L}$ に対する 9 つの可能な符号を列挙すればよい．次がそのリストである:

0. $(+++/+++/+++)$

1. $(++-/+++/++-)$
   $(++-/++-/+-+)$
   $(++-/++-/-++)$

2. $$\left\{\begin{array}{l}(+-+/+--/+-+)\\(+-+/-++/+-+)\end{array}\right\}$$
   $$\left\{\begin{array}{l}(+-+/-++/-++)\\(+-+/+--/-++)\end{array}\right\}$$
   $(+-+/+-+/++-)$

3. $$\left\{\begin{array}{l}(+--/+--/+--)\\(+--/-++/+--)\end{array}\right\}$$
   $$\left\{\begin{array}{l}(+--/-++/-+-)\\(+--/+--/-+-)\end{array}\right\}$$
   $(+--/-+-/--+)$

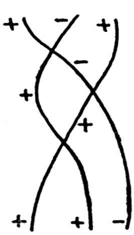
4. $$\left\{\begin{array}{l}(-++/-++/-++)\\(-++/+--/-++)\end{array}\right\}$$
   $$\left\{\begin{array}{l}(-++/+--/+-+)\\(-++/-++/+-+)\end{array}\right\}$$
   $(-++/+-+/++-)$

5. $$\left\{\begin{array}{l}(-+-/-++/-+-)\\(-+-/+--/-+-)\end{array}\right\}$$
   $$\left\{\begin{array}{l}(-+-/+--/+--)\\(-+-/-++/+--)\end{array}\right\}$$
   $(-+-/-+-/--+)$

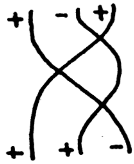
6. $(--+/---/--+)$
   $(--+/--+/-+-)$
   $(--+/--+/+--)$

7. $(---/---/---)$

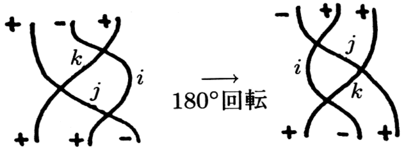
すべての式はこのリストから出てくる．例えば, $(a,b,c)=(+,-,+)$, $(d,e,f)=(+,+,-)$ に対する式は次のように出てくる．リストから, 可能な $\mathcal{L}$ の配置は $(+-+/+-+/++-)$ で, 対応する図は



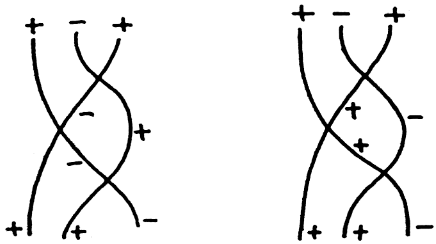
で, 頂点の重みの積は ℓsp となることがわかる．この調べ方で, $(+,-,+)$ で始まるものすべてがわかる．$\mathcal{R}$ の配置については,



の場合に考えてみると, これに対応する $\mathcal{L}$ の配置は,



となるので, $(-++/+--/+-+)$ と $(-++/-++/+-+)$ が可能で, その頂点の重みは,



$r\ell s$　　　　$sp\ell$

となる. この場合, $\mathcal{L} = \mathcal{R}$ から,

$$\ell sp = r\ell s + sp\ell$$

または,

$$0 = r\ell s$$

が出てくる.

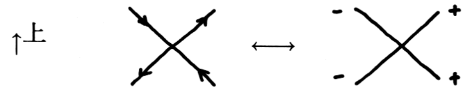
配置のリストを使うと, 簡単に式をすべてあげることができる. すると, 同じ式が出てくることもあって, 最終的なリストは, 定理の中で与えられた式 $(*)$ となる. これで証明を終る. □

注意. これらの解に対する 6 つの基本的な配置は, 統計力学における 6–頂点模型 [BA1] の 6 つの基本的な局所配置に対応している. 特に, **氷模型** (ice-model) の局所的な**矢印の配置** (arrow configurations) に対応している. 氷模型において, 格子 (またはもっと一般に 4 次正則グラフ) の辺には向きが付いており, その向きの

付き方は, **それぞれの頂点で, 2 つの矢印は頂点に向かい, 他の 2 つの矢印は頂点から出ている.** このことから, 次の 6 パターンが考えられる:



1 つの方向を選び (次の図のように, "上向き (up)"の向きを定める) この方向に対し, それぞれの線がその方向に沿っているか, 反しているかで, 線に + か − の符号を割り当てると, もとのスピンを保存したラベル付けが得られる:



Jones 多項式と Alexander 多項式に対する解

定理から得られる最終的な結論を読者に残したままであるが, $r = 0, \ell \neq 0, d = s = 1$ という特別な場合,

$$p^2 = p\ell + 1, \quad n^2 = n\ell + 1$$

という式が出てくることに注意すべきである. さらに, $p \neq 0, n \neq 0$ とすると, $p - p^{-1} = n - n^{-1}$ となる. これは **2 つ**の解をもつ: $p = n$ と $pn = -1$ である. 以前に (第 8 節で) 注意したように, $p = n$ のときは, $SL(2)$ 量子群に関する YBE の解と Jones 多項式が, $pn = -1$ のときは, Burau 表現から得られる YBE の解と Alexander-Conway 多項式が出てくる (第 11, 12 節).

第 II 部

結び目の数学と物理——雑録集

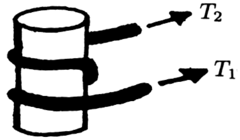
ここからは, 結び目, 物理学, 数学, それに哲学の世界を散策することにしよう. すべてがうまくいけば, たくさんの話が繰り広げられるであろう.

1 節　ヒッチの理論

本節は, 論文 [BAY] に基づくものである.

ヒッチ (hitch) の性質について, 数学的分析を行う. ヒッチとは, 柱の周りにロープを巻き付ける方法のことで, それにより, 少しばかりの摩擦で, ロープは柱に巻き付いたままになる. ロープの先につながれた馬は逃げられないというわけである.

まず, 柱の周りに, コイル状にロープを巻き付けたシンプルな巻き付き方を考えよう:



巻き付き数 (winding number) は, 整数値であるとする. 張力 T_1 と T_2 がロープの端にかかるとする. その張力の大きさ (または, 相対的な大きさ) によっては, 柱から滑り抜けてしまうかも知れない.

ここで, ロープと柱の間には, いくらかの摩擦が働くものとする. これについては, 実験してみる価値がある. 紐と木製かプラスチック製の細い棒を使って, 試してみるとよい. 紐を 1 ～ 2 回棒に巻き付けて, どのくらい滑り抜けやすいか, また, 紐の片端からもう一方の端まで, どのくらい張力が伝わるか, 観察してみよう.

また, 紐を, 10 回かそれ以上巻き付けて, どのくらい滑り抜けにくいかみてみよう. 実際には, 紐が滑り抜けないためには, 反対向きの張力は, まったく必要としないのである.

一般には, T_2–方向に滑り抜けないためには, κ をある適当な定数として,

$$T_2 \leq \kappa T_1$$

であればよい. この定数 κ は, 巻き付いている回数によると考えられる. 巻き付く回数が増えると, κ の値も大きくなる.

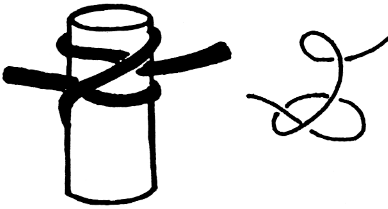
定数 κ のとり方のよいモデルは, 紐が棒の周りに巻き付く角度の指数関数に, 紐と棒の間の摩擦係数を掛けたものであろう. 簡単のために, 摩擦係数を 1 とすると,

$$\kappa = e^{\theta/2\pi}$$

となる. ここで, θ は棒の周りに巻き付くロープの総角度である.

このようにすると, 1 回巻き付いているときは $T_2 \leq eT_1$ となり, n 回 (n は整数) の巻き付きに対しては $T_2 \leq e^n T_1$ となることが, 滑り抜けないために必要であるということになる.

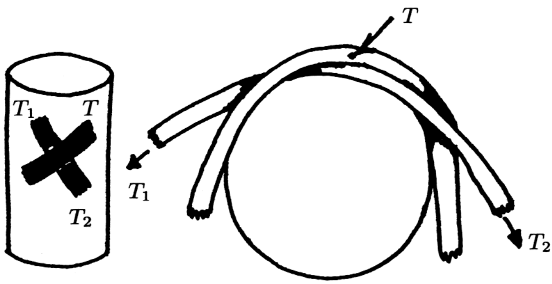
実際のヒッチには, 巻き付き (winding) のほかに, **重なり** (wrap-over) が生じる.



徳利結び (Clove hitch)

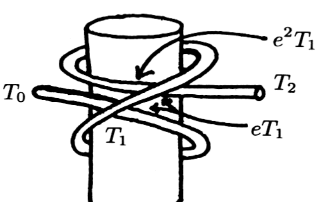
例として, 徳利結びのパターンをあげておこう. 重なりの部分では, 張力によって, 棒に対して上になっている部分が, 下になっている部分を締め付けている. したがって, まず, 次が成り立つ:

$$\boxed{T_2 \leq T_1 + uT}$$



この締め付けは, 滑り落ちようとする力に対して, シンプルな巻き付き方の場合の力とは別の力を与えている. もし, このような重なった点で, 重なりの上側 (overcrossing) での張力を T, u を紐と紐の摩擦から決まるある定数, T_2 と T_1 を下側の紐の両端の張力とするとき, $T_2 \leq T_1 + uT$ である限りは, 重なりの下側 (undercrossing) の紐は押さえつけられている.

このような点を念頭におくとき, ヒッチの交差点 (crossing) と巻き付き具合いに関する不等式の列を書き下すことができる. 例えば, 徳利結びの場合は, 紐が



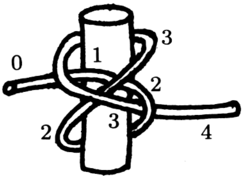
$$\boxed{\begin{array}{ccccc} T_1 & \leq & T_0 & + & ueT_1 \\ T_2 & \leq & e^2T_1 & + & ueT_1 \end{array}}$$

滑り抜けないための関係式は, 次のようになる:

$$\begin{aligned} T_1 &\leq T_0 + ueT_1 \\ T_2 &\leq e^2T_1 + ueT_1. \end{aligned}$$

最初の不等式は, $ue > 1$ または $u > 1/e$ のときに限って成立することから, 徳利結びは, T_2 にどのような力がかかろうとも, $u > 1/e$ が成立する程度に十分に摩擦が大きければ, 滑り抜けることはないことがわかる。

このことは, このヒッチの効力を明らかにしている. 他のヒッチについても, 同様に解析することができる.



$$\begin{aligned} T_1 &\leq T_0 + ueT_3 \\ T_2 &\leq T_1 + uT_3 \\ T_3 &\leq eT_2 + ueT_3 \\ T_4 &\leq eT_3 + uT_2 \end{aligned}$$

この例では, もし,

$$T_1 \leq ueT_3$$
$$T_2 \leq T_1 + uT_3$$
$$T_3 \leq eT_2 + ueT_3$$

の解を求めることができれば, 滑り抜けないということになる.

T_1	T_2	T_3
1	0	$-ue$
-1	1	$-u$
0	$-e$	$1-ue$

行列の形で表すと,

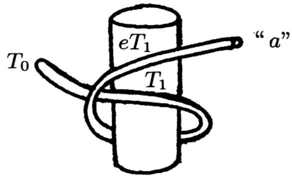
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -ue \\ -1 & 1 & -u \\ 0 & -e & 1-ue \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となる. この行列の行列式は,

$$1 - ue(2+e)$$

である. よって, 臨界点となるのは, $u = 1/e(2+e)$ であり, $u > 1/e(2+e)$ であれば, 滑り抜けないということになる.

注意. もっと簡単な "ヒッチ" に戻ろう.



$$\boxed{T_1 \leq T_0 + ueT_1}$$

いままでの理論的な解析では, $ue > 1$ であれば滑り抜けないと考えられる. しかしながら, この例では, 安定性はまったくない. a を引っ張れば, 輪の部分は回転し, それにより u–因子は消えて, 解けてしまう. 徳利結び目においては, 本当にかたく締まる.

このことは, 実際にヒッチの振舞いを解析する際には, ロープで作られているということからくる既に決定したような安定した力学的メカニズムを考慮にいれなくてはならないことを示している. [Sci.Amer.,Amateur Sci.,Aug. 1983 参照.]

結び目や絡み目の摩擦の性質を理解するという点においても, なすべきことはたくさんある. これらの性質は, ヒッチをはるかに離れて, ロープ間の相互作用の問題となる. もっとも単純でかつ魅力的な例は, **横結び** (square knot) と **縦結び** (granny knot) である. 横結び (square knot) は, 張力をかけることにより締め付けられる. 各ループはそれ自身ともう一方のループをともに締め付け, その結果, しっかりと締まるのである.



横結び

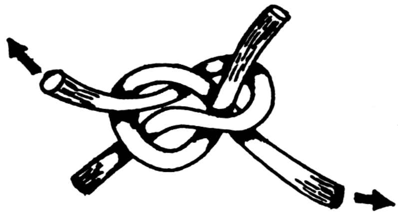
この結び目を作って, それがどうやって自分自身を締め付けるかを調べてみよ.

縦結び (granny) は, 張力をかけてもぎゅっと締まることはなく, さしずめ "悪魔の仕業" とでもよべるであろう.



縦結び

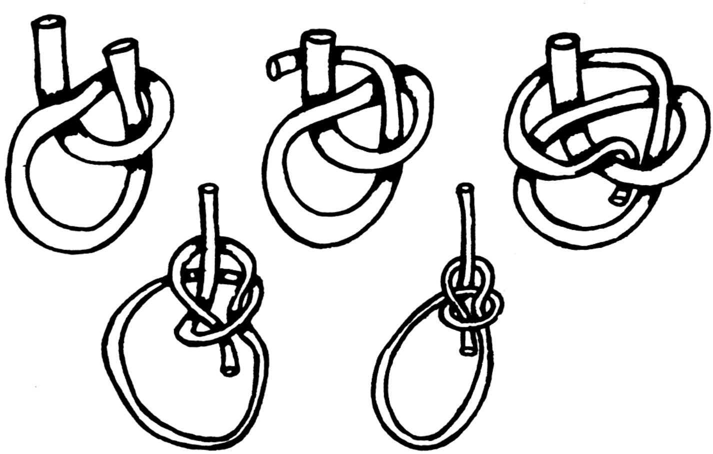
試してみることにしよう! 端 A, B は, 図のように各々 A', B' とつながっており, A と B に十分な張力を与えれば, ロープはこのタングルをくぐりぬける.



このことから, 組継ぎ (splice) とヒッチは, 力学的に工夫されたものの中でも, 素晴らしいもののうちの一つであることがわかる. 歯車やギアのようなよく知られた規則で正確に相互作用が行われる部品の組合せである古典的な機械と異なり, 張力のもとでの 2 つのロープの滑り方という相互作用は, 張力, トポロジー, そして系全体が関わって最終的な系の様子が決まるような, 他には見られない種類のものである.

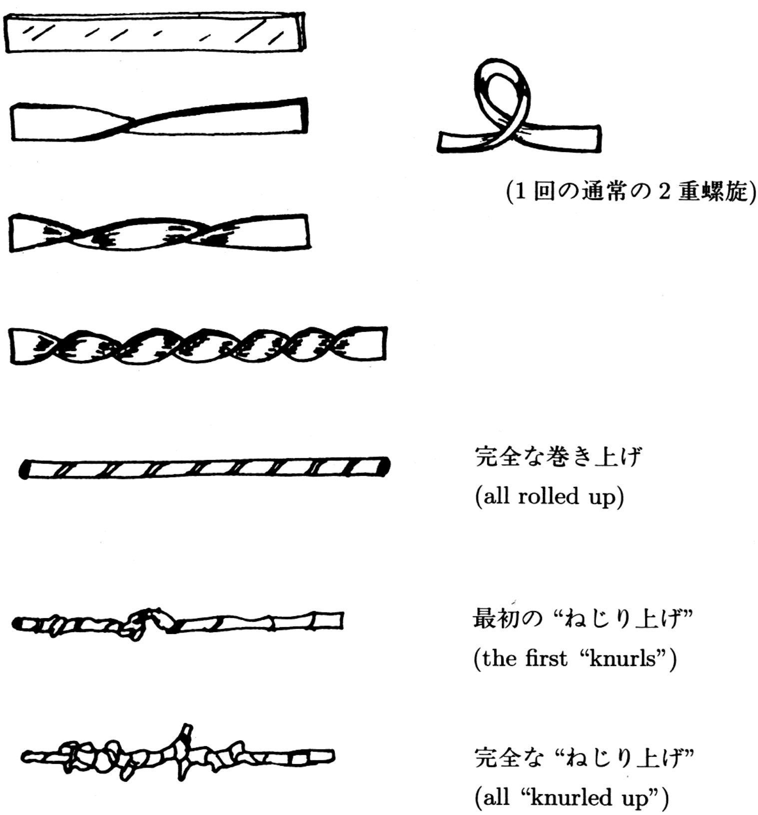
明らかに, ここは力学機構において例示されたようなトポロジーのより深い理解が必要であるという研究の場面である. しかし, 我々は人跡未踏の地に立っていることも事実である. 我々の知っているトポロジーは, こういった物理学の立場からくる最初の抽象化を犠牲にして得られてきた. それにもかかわらず, これから先で意図するところは, この関係を調べることにある.

結び目を, 射影図のみを通して部分部分に分解したり, 相互作用するロープの性質を導き出そうとして観察することにより, 結び目を一つのシステムとして考えることが多い. ここには, 観察に対する強力な暗喩がある. 細部に分解するということは常々行っていることにほかならず, そういった個々の部分の解明を通して全体を把握するようになるのだ, ということを思い起こさせてくれるのである.



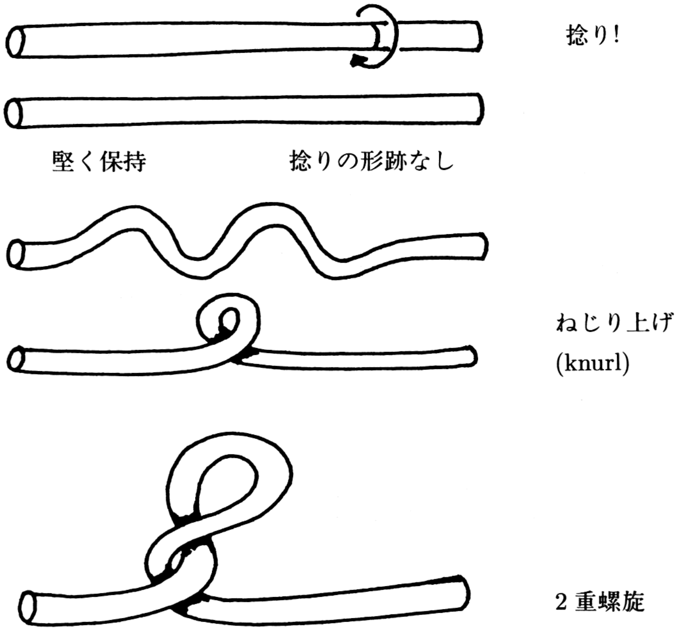
もやい結びの結び方

2節　ゴムバンドと捻ったチューブ



バンドを捻り続けると,“ねじり上がって”しまう. そうなるには, その前にまずバンド全体に捻りがいきわたることが必要である. (図中 roll up). **ねじり上げ** (knurl) とは, 堅い2重螺旋 (super-coil) のことで, バンドの両端の張力 (←━→) を緩めると, ねじり上げはあたかも捻ったバンドから位置エネルギーが流れ出るようにはずむ. したがって, ねじり上げをほどくには, それに応じて, 長く引っ張ることと, さらにエネルギーが必要となる.

バネ入りのチューブを使うと, 捻りに関する類似の現象をより簡単に確かめることができる.



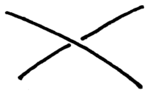
上のどの場合においても, やってみるのが一番である. 興味のある現象は, 一度ねじり上げが形成されると, チューブそれ自身に対する相互作用により, それをほどくには, たくさんの力が必要だということである.

この状況でのエネルギー論には, たくさんの実験が必要である. 以下の実験に関し, Jack Armel 氏に感謝の意を表する.

Armel 効果 平らなゴムバンドを用意する. それを切ってゴムの帯を作り, 片側を黒く塗る. そのゴムの帯の片端を机のすみに貼りつける. もう一方の端を手で持って, 反時計回りの方向に, ねじり上げが片方の色を隠すまでゆっくり捻る. 今度は, バンドを時計回りに捻ってみる. また, 紙の帯を用いてこの実験を行う.

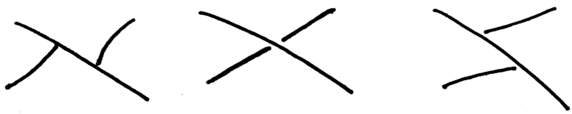
3節 交差点で

本節では, 図形表示上の交差点の構造について考える.



この図は (局所的には) 3 本の弧で構成されている. 上交差点を表す弧 1 本と, 下交差点を表す弧 2 本の, 計 3 本である. 下交差点の 2 本の弧は, 上交差点の弧の近くに描かれ, 交差点に関して向かい合っている. これは, 上交差点の弧の下を通って続いていることを示している.

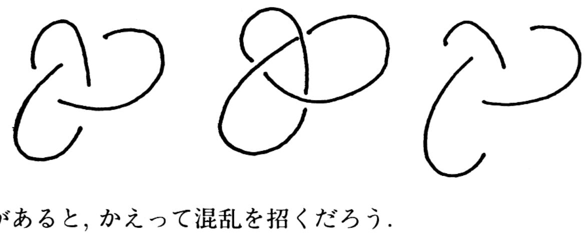
図を描き替えたらどうなるだろう? この視覚化の規約にはどれくらいの自由度があるのだろう?



明らかに, 反対側の弧と向き合うという点に関しては, それほど自由度はない. では, 離れ具合いはどうだろう?



これは, もっと自由度が大きいように思われる.



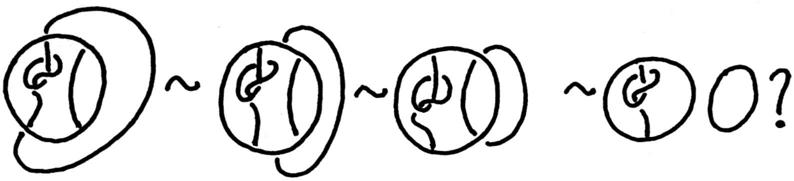
あまり曖昧さがあると, かえって混乱を招くだろう.



図形 (diagram) の中の典型的な弧は, 1 つの下交差点からでて, 次の下交差点へ走っている. その途中は, 他の弧に対して上交差点となっている. 結び目理論を一般化して, "one-sided originations" (下交差点の片側だけの移動) を含むようにできないだろうか?



こういった図形 (diagram) に対する Reidemeister 移動は, いったいどうなるのだろう? 次の変形は許されるだろうか?



それでは, 次はどうだろう?

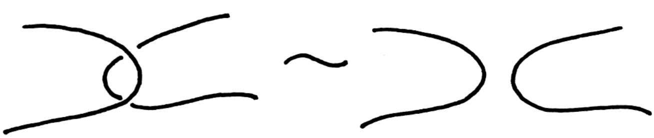


もちろん,



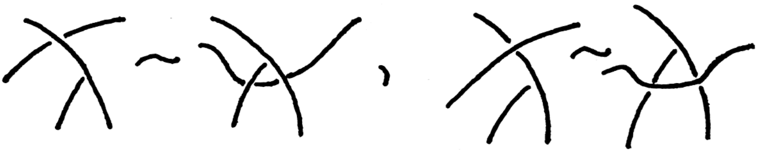
は禁じなければならない. 何かルールをお望みだろうか? では, これはどうだろう?

1.  はそのまま.(正則同位を行う)

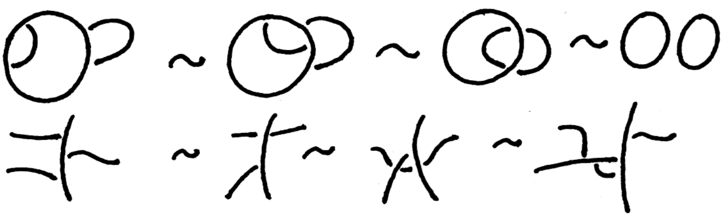
2. 

3. 

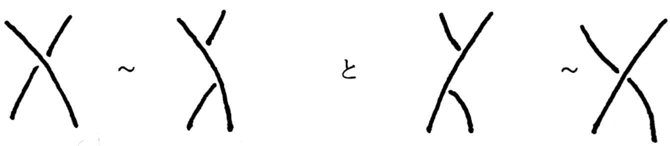
4. 

5. 

これを**仮想結び目理論** (Imaginary knot theory) とよぼう．不変量を考えつく人はいるだろうか? ([K], [TU4] と比べよ.)



この交差点での制限をはずす考え方は, 独立に, M.Khovanov により, ブレイドの形で考え出されている．彼の方法では,

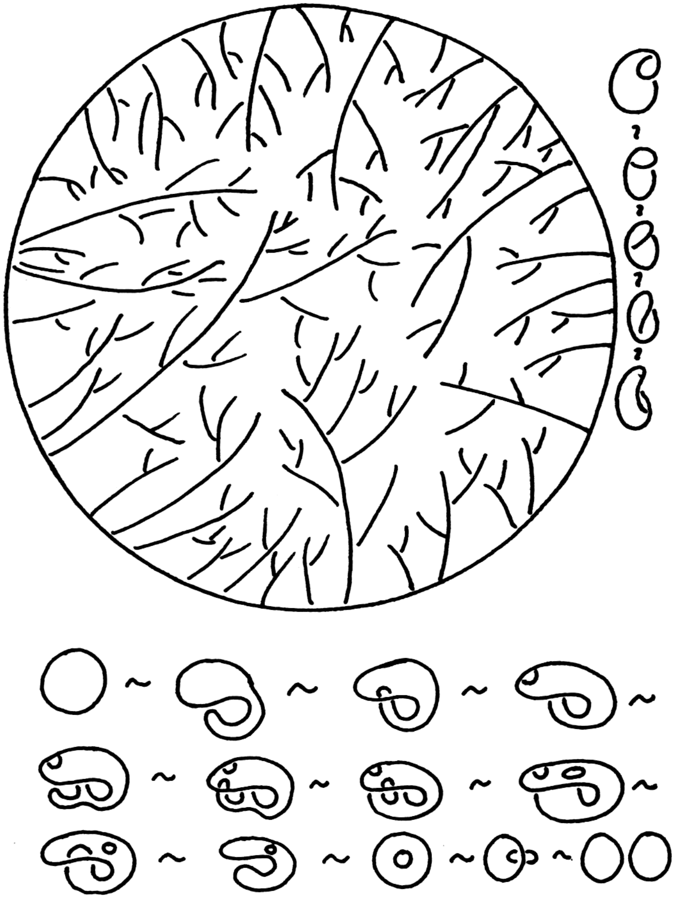


という操作も許し, さらに次の操作も取り入れている．



これにより, 個々の 3–頂点の元  を "組み替え理論" における 3–頂点の類似とみなすことができる．(第 II 部 第 12 節, 第 13 節と比べてみよ.) ブレイドか

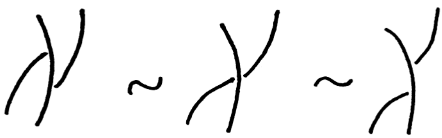
ら離れてみても,  という同値関係を含んでいることは, 価値のあることにも思える. これを, **滑走同値** (slide equivalence) として, 次節で定式化する.



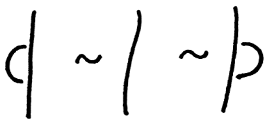
4節　滑走同値

前節で述べたように, 向き付けされていない図形 (表示) に対して, **滑走同値** (slide equivalence) を定義しよう. 滑走同値 ($\sim$ で表す) は, 次で生成されるとしよう:

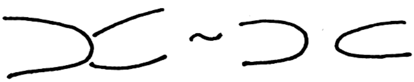
I′.



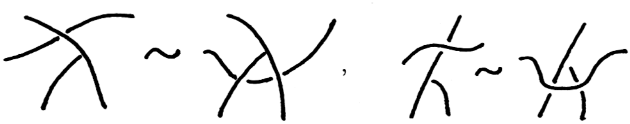
II′.



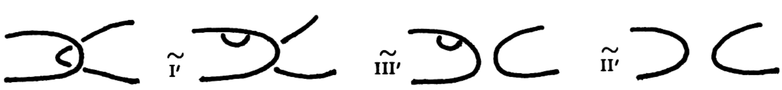
III′.

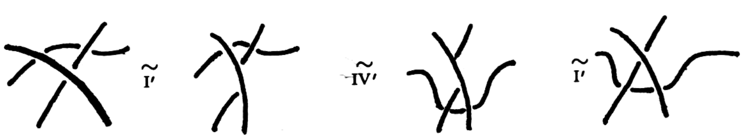


IV′.



普通の Reidemeister 移動の II 型, III 型は, この滑走同値の公理から得られることに注意する:

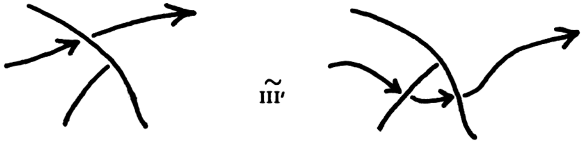




向き付けされた図形に対しての滑走同値の操作は, すぐにわかる. 操作 I′, II′ は, 向きをどのように付けてもそのまま適用できる. III′, IV′ については, 一対になっ

た弧に関しては, 矛盾しないような向きが付いていることが必要である. それゆえ, 次が成り立つ:



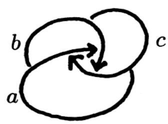


定義. カテゴリー (category [M]) C が, **ミラーカテゴリー** (mirror category) であるとは, すべての C の対象 (object) が同時に C の射 (morphism) であり, かつ, すべての C の射は対象の合成となるときにいう.

任意の向き付けられた滑走図形 (slide diagram) は, ミラーカテゴリーの対象と射の図形とみなすことができる. したがって,

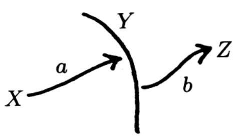


$$a : b \longrightarrow b$$
$$b : a \longrightarrow a$$



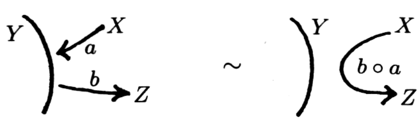
$$a : c \longrightarrow b$$
$$b : a \longrightarrow c$$
$$c : b \longrightarrow a$$

もちろん, 図形は平面上において他の構造ももつ. それにもかかわらず, 各滑走移動 (slide moves)(I′ から IV′) は, カテゴリー的に意味のある図形の変形を表現している. したがって, I′ は, 射が図形的な障害 (diagrammatic obstruction) なしで構成できることを主張している.

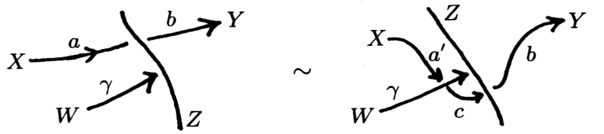


$$a : X \longrightarrow Y$$
$$b : Y \longrightarrow Z$$

II′ は, それ自身を目標の対象としない自己写像の挿入または移動を許す. III′ は, 別の形の合成である.



IV′ は, 別の形の局所的合成を与える:



$a : X \longrightarrow Z$ $\qquad$ $a' : X \longrightarrow W$

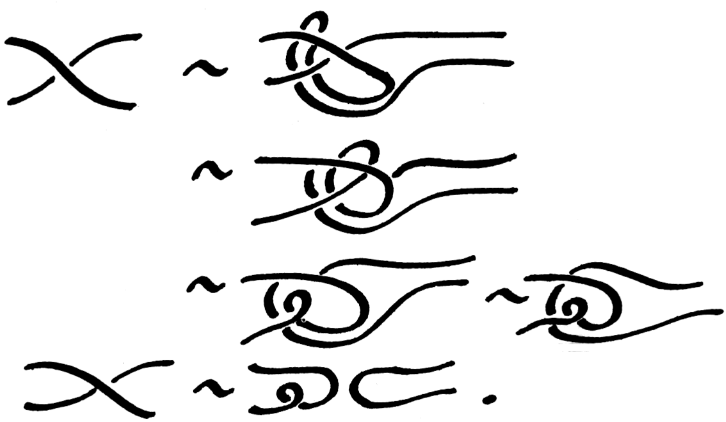
$b : Z \longrightarrow Y$ $\qquad$ $c : \gamma \longrightarrow Z$

$\gamma : W \longrightarrow Z$ $\qquad$ $b : Z \longrightarrow Y$

それゆえ, ミラーカテゴリーの言葉で IV′ を抽象化すると, 次のように言い換えられる: 2 つの射 $a : X \longrightarrow Z$, $b : Z \longrightarrow Y$ と, **対象射** (object-morphism) $\gamma : W \longrightarrow Z$ が与えられると, 射 $c : \gamma \longrightarrow Z$, $a' : X \longrightarrow \gamma$ が存在し, $b \circ c \circ a' = b \circ a$ となる.

このことは, IV′ のいろいろなバージョンや, II′ と類似変形を満たす, **特殊ミラーカテゴリー** (special mirror category) が定義できることを示唆している. 滑走図形は, 平面型 (planar type) の特殊ミラーカテゴリーに対する対象射の生成系 (generating object-morphism) を描写したものである.

滑走同値のカテゴリーにおけるダイアグラムに話を戻すと, 不変量をみつけることは, とてもよい問題である. これはまだ未解決である (向きを用いてみよ).



5節　無向な図形表示と絡み数

まず次のことに注意しよう: **成分数が 2 の絡み目の絡み数の絶対値は, 同じ絡み目の向きを考えないものだけから決定される.**

いまだに普通は, 絡み目に向き付けをするという煩雑な方法で絡み数を決定する. 本節では, 向き付けられていない図形表示 (無向な図形表示) から, いかにして絡み数の絶対値を計算するかを示すことにする. K を任意の無向な絡み目の図形表示とし, $K^{\mathcal{O}}$ を K に一つの向きを付けたものとする. それゆえ $\mathcal{O}$ は, $|K|$ を K の成分数として, $2^{|K|}$ 通りの向きの付け方のうちの一つである. $[K]$ を次の公式で定義する:

$$[K] = \sum_{\mathcal{O}} \alpha^{w(K^{\mathcal{O}})}.$$

したがって, $[K]$ は, 変数 α の, K に一つの向きを定めたときの捻り数乗を, K のすべての向き付け方にわたって足し合わせたものである.

注意. いろいろなところでブラケットを用いて異なる多項式を表すのは, 目的を際立たせるのに有効である. 与えられたブラケットは, 特に指定されない限り, 上で定義されたものとしよう.

確かに, $[K] = \sum_{\mathcal{O}} \alpha^{w(K^{\mathcal{O}})}$ は, 正則同位の不変量である.

K_0 をある決まった向きを K に与えたものとすると, $\Lambda(K_0) = \alpha^{-w(K_0)}[K_0]$ は, 有向絡み目 K_0 の全同位不変量となるだろう. ここで,

$$\begin{aligned} \Lambda(K_0) &= \sum_{\mathcal{O}} \alpha^{w(K^{\mathcal{O}})-w(K_0)} \\ &= 1 + \sum_{\mathcal{O} \neq \mathcal{O}_0} \alpha^{w(K^{\mathcal{O}})-w(K_0)} \end{aligned}$$

となる. ただし, $\mathcal{O}_0$ は K_0 の向きを表すものとする.

これは何を意味するのだろうか. 次の事実に注目しよう: $K_0 = L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n$ (L_i は絡み目 K_0 の成分) とすると,

$$w(K_0)=\sum_{i=1}^{n} w(L_i)+\sum_{i<j} 2\cdot \mathrm{lk}(L_i,L_j)$$

となる．いま，K_0 の成分 L_i のうち，いくつかの向きを変えて得られたものを $K^{\mathcal{O}}$ とすると，$K^{\mathcal{O}}$ は次のように表すことができる:

$$K^{\mathcal{O}}=L_1^{\varepsilon_1}\cup L_2^{\varepsilon_2}\cup\cdots\cup L_n^{\varepsilon_n}.$$

ただし，$\varepsilon_i=\pm 1$ (同じ向きのとき 1，向きが変わったとき -1) とする．しかし，$w(L_i^+)=w(L_i^-)$ なので，

$$w(K^{\mathcal{O}})-w(K_0)=\sum_{i<j} 2\left(\mathrm{lk}(L_i^{\varepsilon_i},L_j^{\varepsilon_j})-\mathrm{lk}(L_i,L_j)\right)$$

かつ，

$$\text{i)}\ \left\{\begin{array}{rl} & \varepsilon_i=-1,\quad \varepsilon_j=+1 \\ \text{または} & \varepsilon_i=+1,\quad \varepsilon_j=-1\end{array}\right\}\Longrightarrow \mathrm{lk}(L_i^{\varepsilon_i},L_j^{\varepsilon_j})=-\mathrm{lk}(L_i,L_j).$$

それゆえ，

$$w(K^{\mathcal{O}})-w(K_0)=-4\sum_{\substack{i<j\\ \varepsilon_i\neq\varepsilon_j}} \mathrm{lk}(L_i^{\varepsilon_i},L_j^{\varepsilon_j}).$$

したがって，

$$w(K^{\mathcal{O}})-w(K_0)=-4\sum_{L,L'\subset K^{\mathcal{O}}} \mathrm{lk}(L,L').$$

ここで，L, L' は，$K^{\mathcal{O}}$ の異なる成分の組で，そのうち 1 つだけが，K_0 と比べて向きが逆になっているものとする．

これが，$[K]$ に随伴した全同位不変量の完全な記述である．

最も単純な例は，成分数が 2 の絡み目 $K=K_1\cup K_2$ である．このとき，4 通りの向き付けが可能である．

$$\begin{array}{rcl} K_0 &=& K_1^+\cup K_2^+\\ K_1 &=& K_1^-\cup K_2^-\\ K_2 &=& K_1^-\cup K_2^+\\ K_3 &=& K_1^+\cup K_2^-\end{array}\ \Longrightarrow\ \begin{array}{rcl} w(K_0) &=& w_0\ \text{とする.}\\ w(K_1) &=& w(K_0)\\ w(K_2) &=& w(K_3)\end{array}$$

それゆえ，

$$[K]=2\left(\alpha^{w(K_1^+\cup K_2^+)}+\alpha^{w(K_1^+\cup K_2^-)}\right)\ \Longrightarrow\ [K]=2\left(\alpha^{d_1}+\alpha^{d_2}\right)$$

ここで, $|d_1 - d_2| = 4\,|\,\mathrm{lk}(K_1^+, K_2^+)|$ とする.

したがって, **成分数 2 の絡み目 K に対しては,** $[K]$ **は** (2 つの指数の差から) **2 つの曲線の絡み数の絶対値** (≥ 0) **を計算していることになる**.

ここでいまやりたいことは, どのようにすれば $[K] = \sum_{\mathcal{O}} \alpha^{w(K^{\mathcal{O}})}$ は, **向きというものにいっさい触れずに**, 向きの付いていない絡み目から帰納的に計算されるかを示すことである.

この離れ技をなしとげるために, まず, 捻り数を, 向きの付いた (局所的に) 次数 4 のグラフの頂点を 1 つ含む絡み目の図形表示に拡張する.



交差点からくる ±1 の値を全体にわたって足し合わせることにより, これを行う. したがって,

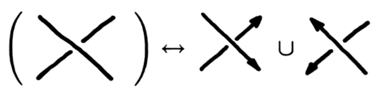
w () $= +1.$

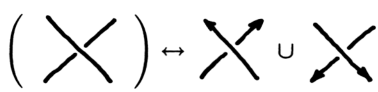
定義 5.1.

 $= \sum_{\mathcal{O}\in\mathcal{O}_+(}$  $)$ $\alpha^{w(K^{\mathcal{O}})}$,

 $= \sum_{\mathcal{O}\in\mathcal{O}_-(}$  $)$ $\alpha^{w(K^{\mathcal{O}})}$.

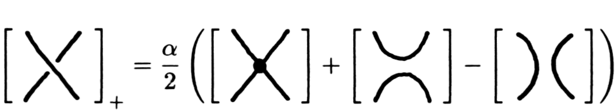
ただし, $\mathcal{O}_+($$)$ は, この図の 2 本のラインが局所的に + となる向きを与えるような, この絡み目のすべての向き付けを表す. それゆえ,

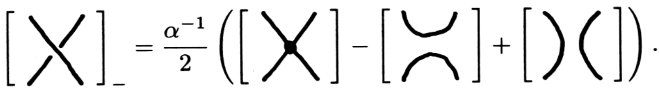
$\mathcal{O}_+$ 

$\mathcal{O}_-$ 

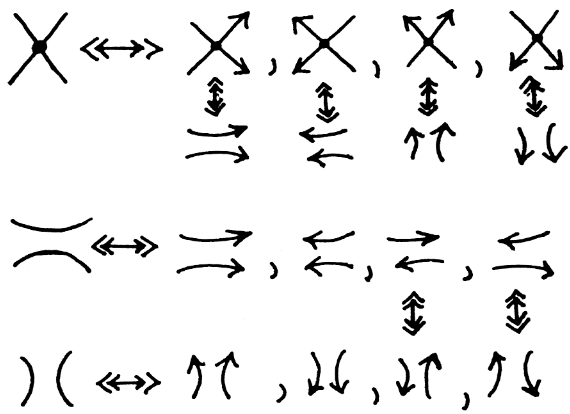
ただし, この図式は, 注目している交差点での局所的な形がこの図のようになる K のすべての向きを表すものとする.

命題 5.2.

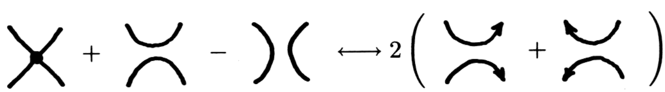


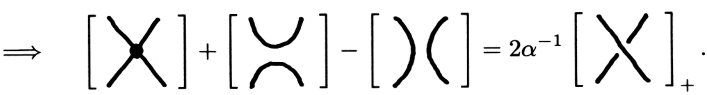


証明. 可能な場合を考えてみよう.

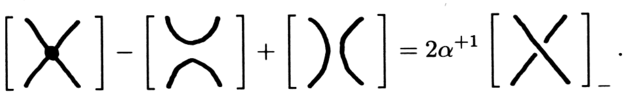


それゆえ,





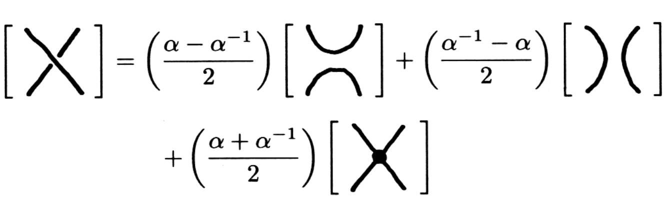
また, 同様にして, 次も成り立つ:



□

系 5.3.

(a)



(b) G が次数 4 の正則な平面グラフのとき,

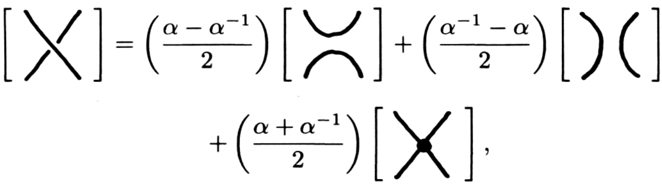
$$[G] = 2^{|G|}$$

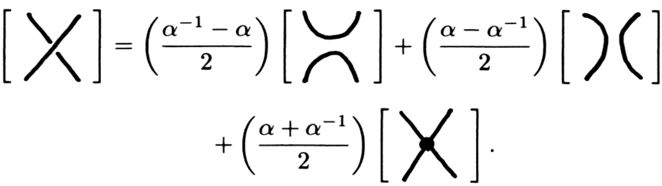
が成り立つ. ただし, $|G|$ は, 結び目理論的な G のサーキット (circuits) の個数 (つまり, 各頂点を交差点に置き換えることによって得られる絡み目の成分数) を表すものとする.

証明. (a) は, 前の命題と  という事実からわかる.

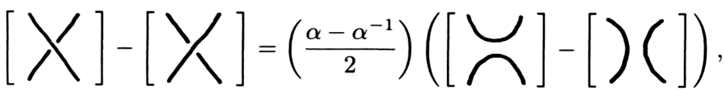
(b) は, r 個の成分をもつ絡み目には, 2^r 通りの向き付けが可能なことからわかる. □

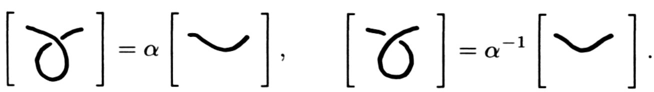
注意. $[\bigcirc] = 2$ に注意する. 系で示した式は, 任意の無向な K に対して $[K]$ を計算する帰納的方法を与えている. したがって, 無向な図形表示から絡み数の絶対値を計算する, まさに目的としていた手段を得たことになる.





これは, 次の等式より得られる:





このことから, 本節における $[K]$ は, 第 I 部の第 14 節で述べた Dubrovnik 多項式の特別な場合であることがわかる.

$[K]$ に対する展開公式を, 次の**ステイト和** (state summation) の形でもみてみよう:

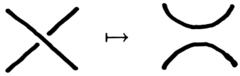
$$[K] = \sum_G [K|G]\, 2^{|G|}.$$

ただし, 各**ステイト**は, K の表示から次のようにして得られるものとする.

1. K の各項点  を次の図にあるような, ラベルの付いた 3 つの局所形のうちの 1 つで置き換える:

 C  A  B

ラベル A は, A–**分離**



と対応している.

2. その結果得られるラベル付きステイト G は, 次数 4 の正則な平面グラフである. $[K|G]$ は, G **のラベルの積を表すものとする.**

$|G|$ を, G の**交差サーキット** (crossing circuit) の個数とする. ただし, 交差サーキットとは, G にそって歩くことによって得られるサーキットで, その際, **各交差点では交差するように**進むものとする.

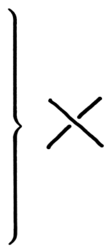
例. $\left|\right.$  $\left.\right| = 3.$

ここで, C, B, A を次のようにおく:

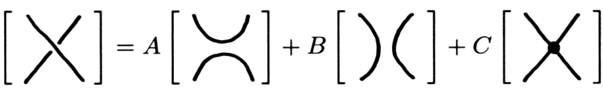
$$C = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{-1}) \longleftrightarrow$$ 

$$B = \frac{1}{2}(\alpha^{-1} - \alpha) \longleftrightarrow$$ 

$$A = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^{-1}) \longleftrightarrow$$ 



そうすると, これまでの議論から,

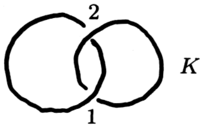


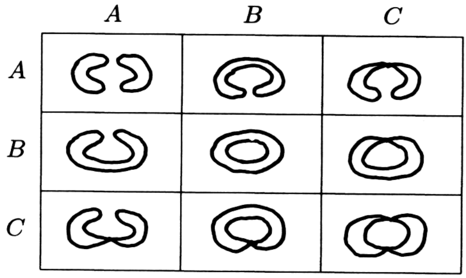
となり,

$$[K] = \sum_G [K|G]\, 2^{|G|}$$

が得られる.

証明の詳細は, 練習問題として残しておくことにしよう. 参考までに, 一つ例をあげておく:





ここで, 行は頂点 1 のラベルの選び方を表し, 列は頂点 2 のものとする. この結果,

$$\begin{aligned}\sum_G [K|G]\,2^{|G|} &= A^2 \cdot 2^2 + AB \cdot 2^1 + AC \cdot 2^1 \\ &\quad + BA \cdot 2^1 + B^2 \cdot 2^2 + BC \cdot 2^1 \\ &\quad + CA \cdot 2^1 + CB \cdot 2^1 + C^2 \cdot 2^2 \\ &= 4(A^2 + B^2 + C^2) + 4(AB + AC + BC) \\ &= (\alpha - \alpha^{-1})^2 + (\alpha^{-1} - \alpha)^2 + (\alpha + \alpha^{-1})^2 \\ &\quad + (\alpha^{-1} - \alpha)(\alpha - \alpha^{-1}) + (\alpha - \alpha^{-1})(\alpha + \alpha^{-1}) \\ &\quad + (\alpha^{-1} - \alpha)(\alpha + \alpha^{-1}) \\ &= (\alpha - \alpha^{-1})^2 + (\alpha + \alpha^{-1})^2 \\ &= 2(\alpha^2 + \alpha^{-2}) = [K]\end{aligned}$$

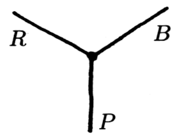
となり, 確かに成り立っている.



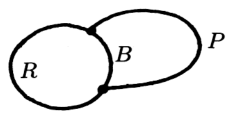
$$\left\{ \quad K, \quad \begin{aligned} [K] &= 2(\alpha^{d_1} + \alpha^{d_2}) \\ |\mathrm{lk}(K)| &= \frac{1}{4}|d_1 - d_2| \end{aligned} \right\}$$

6 節　Penrose 彩色漸化式

第 5 節で行った定式化に非常に関係の深い図式漸化式は, 3–正則平面グラフの辺 3 彩色の総数と関係している. グラフの辺に 3 つの色 (それらを赤 (R), 青 (B), 紫 (P) とする) で色付けし, **各頂点に 3 つの色が現れるようにしたい**.



例えば,



は, そのような彩色である. Penrose [PEN1] は次のような漸化式を与えている:



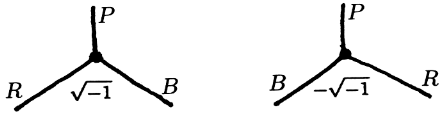
ただし, 3–正則平面グラフ G に対し $[G] = 3^{|G|}$ と定義し, $|G|$ は G のサーキット (circuits ; 交差点をもつ場合もある) の個数を表すものとする. 例えば,



$= 3^2 - 3 = 6.$

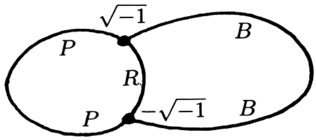
この漸化式の証明は実に簡単である. それが成り立つようなステイトの和を与えればよい.

平面上で, 有向頂点は 2 つの型に分類される.

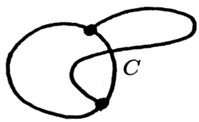


これらの2つの型は, 頂点における円順列の順 (反時計回り) の RBP あるいは BRP に対応する. RBP 型の頂点に $\sqrt{-1}$ を, BRP 型の頂点には $-\sqrt{-1}$ を**ラベル付け**する.

すると,

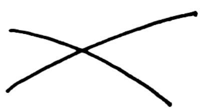


ここで, 特異点をもつ写像とそうでない写像を区別する必要がある. 例えば



は特異点をもつ (C で交差している).

定義 6.1. **キャスト** (cast) とは, (3–正則) グラフの平面上への任意の実現 (はめ込み; 特異点があってもよい) と定義する. 通常, キャストにおける特異点はすべて次のような 2 重点である.



平面的キャスト (planar cast) あるいは**地図** (map) とは, 特異点のないキャストのことである.

ところで, 3 つの色 R,B,P によるキャストの辺彩色に関してうまい方法がある. これを**配列** (formation) という. (この言葉と方法は, G.Spencer-Brown[SB1] による.)

配列ではまず赤い (R) サーキットと青い (B) サーキットを与える. 2 つの色のサーキットは辺を共有することもあり, そこでは





交わる (cross) か, **接する** (bounce).

ここで ——— は**赤** (R) を, - - - - - は**青** (B) を表すことにする. さらに, 赤と青の重なったところを紫とする. よって



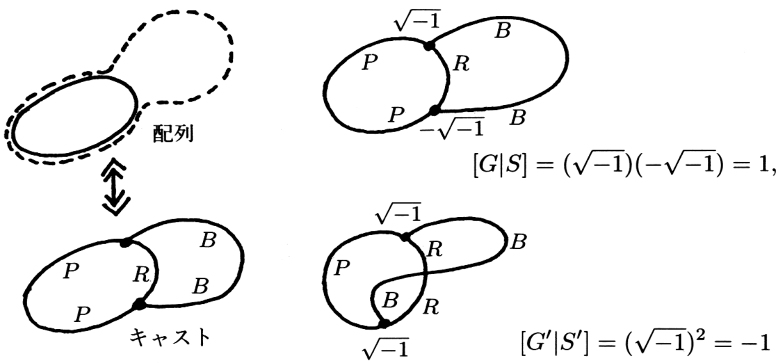
が紫 (P) である. 平面的キャストに関して配列を描くことは, たいへん容易なことである. 互いに交わらない赤い閉曲線の集合を描き, それに青い閉曲線を絡ませる (交わったり, 接したりする) ように描けばよい. したがって地図 (平面的キャスト) の場合, 配列は辺彩色と対応しており, いくつかの Jordan 曲線から構成されている. 逆に, 任意のキャストの 3 彩色に対して, 配列を描く方法が容易にわかる (これを確かめよ).

定義 6.2. G をキャスト, S を G の辺 3 彩色 (各頂点に 3 色が現れる) とする. **G に関する S の値** $[G|S]$ を次のように定義する:

$$[G|S] = \prod_{j=1}^{n} \varepsilon(j)$$

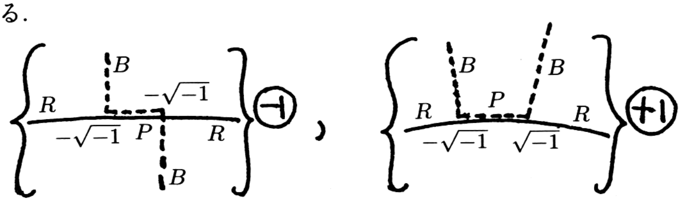
ただし, $\{1, 2, \ldots, n\}$ は G の頂点を表し, $\varepsilon(j) = \pm\sqrt{-1}$ は彩色 S によってこの頂点に付けられたラベルとする.

例題.



命題 6.3. M を平面的キャストとし, S を M の辺 3 彩色とする. このとき, $[M|S] = 1$ である. つまり, 辺彩色 S によって M の頂点に付けられた虚数値の積は 1 となる.

証明.



S に随伴する配列 $\mathcal{F}$ を考える. 次のことに注意する.

辺が接したところでは $(\sqrt{-1})(-\sqrt{-1}) = +1$ となるが,

辺が交わったところでは $(\pm\sqrt{-1})(\pm\sqrt{-1}) = -1$ となる.

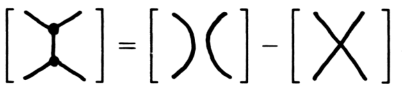
ここで c を配列において赤いサーキットと青いサーキットの交差数とすると，$[G|S]=(-1)^c$ である．Jordan の曲線定理より，c は偶数である． □

定義 6.4. 任意のキャスト G に対し $[G]=\sum_S [G|S]$ と定義する．ただし，S は G の辺 3 彩色すべてにわたって動くものとする．

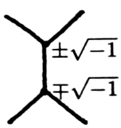
命題 6.5. G を平面的キャストとする．このとき $[G]$ は G の辺 3 彩色 (各頂点に 3 色が現れる) の総数に等しい．

証明. 前述の命題より，G が平面的ならば，任意の S において $[G|S]=+1$ であるから，明らかに成り立つ． □

命題 6.6. G を任意のキャストとする．  を G において注目している辺とするとき，その辺をそれぞれ  と  に置き換えて得られる 2 つのキャストを考える．このとき

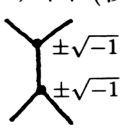


証明. $\mathcal{S}_+$ は辺  に

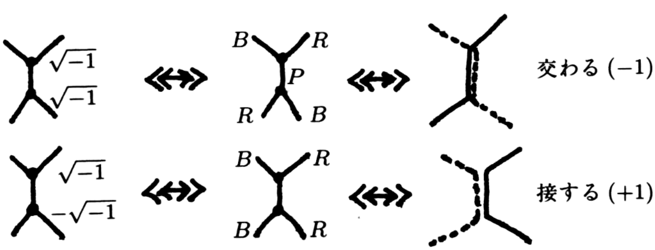


$$(\pm\sqrt{-1})(\pm\sqrt{-1})=+1,$$

のようなラベル付けをしたステイト (彩色) S を表し，$\mathcal{S}_-$ は



のようなラベル付けをしたステイト S を表すことにすると，次のような関係になる:

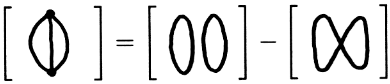


したがって, すべてのステイトにわたって和をとることは, 交わるタイプと接するタイプに分けて和をとることに等しい. $\mathcal{S}_+$ は  のステイトと 1 対 1 に対応し, $\mathcal{S}_-$ は  のステイトと 1 対 1 に対応するから,



□

例題.

 $= 3^2 - 3 = 6,$

 $= 3 - 3^2 = -6.$

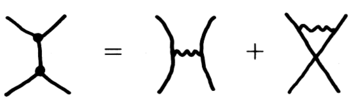
$[G]$ を求めるとき, 非平面的キャストに対する辺彩色の総数は数える必要がないということに注意しておく.

定理 6.7.(Kempe) 平面的キャストに辺 3 彩色を与えることと, 隣接する領域を異なる色で塗るような 4 彩色を与えることは同値である.

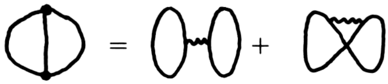
証明. W を 4 番目の色とし, $\mathbf{K} = \{R, B, P, W\}$ に次のような群の構造を与える: $W = 1, R^2 = B^2 = P^2 = W, RB = P, BR = P$. 辺彩色を与えた平面的キャストの任意の領域を 1 つ選び, そこに W を塗る. 次に隣接する領域に対して色 X を, 共有する辺の色 Y について $WY = X$ となるように色付けする. この方法をできるところまで続けるとよい. □

彩色の展開式.

辺 3 彩色の総数を求めるこの公式を, 任意の 3–正則グラフに拡張する一つの方法がある (これとは別の視点からの考察については [JA6] を参照されたい). これを理解するために,  を互いに異なる色のついた 2 本の線分とし,  もまた同様とする. そのとき, 次のように書くことができる:

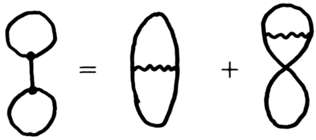


これは右辺のグラフのどちらかに局所的に互いに異なる色が辺に付いたとき, 左辺のグラフの彩色として数えることを意味している.



$$= 3 \cdot 2 + 0 = 6.$$

単純閉曲線には異なる色を付けることはできないので, この展開においては多くのステイトの値が 0 になる. このようなステイトの総和を 3–正則グラフに対する**彩色展開式** (chromatic expansion) という. ダンベル形のグラフについて, どのように計算されるかを記しておく:

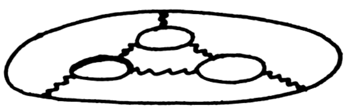


$$= 0 + 0 = 0.$$

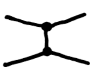
実は, 四色定理と平面上の Jordan 曲線に関する次の命題が同値であることは容易にわかる:

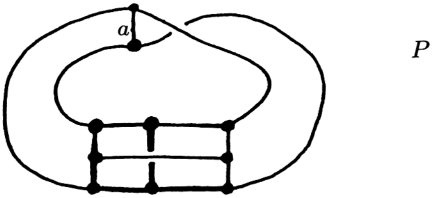
> **J を平面上の互いに交わらない Jordan 曲線の集合とする. J に禁止の印**  **(局所的には図のとおりだが同じ曲線の間では印を付けることはできない) が付いていると仮定する. すると禁止の印による条件を満たすように J の各曲線を 3 色で色付けできるか, あるいはいくつかの禁止の印を取り替えること (**  $\overset{\text{取り替え}}{\mapsto}$  **) によってある色の配置を定めることができる.**

例えば, J を下図のようなものとする.

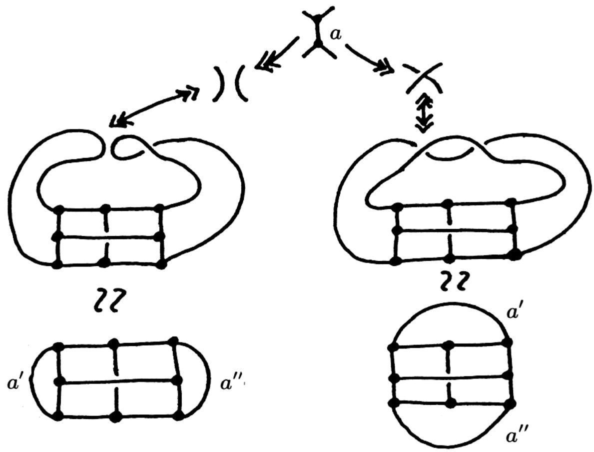


そのとき J は色付けできないが, すべての印を取り替えて得られる J' は色付け可能である.

彩色の展開により,  が彩色不可能な最小のグラフにおける辺を表しているならば,  と  はともにより小さなグラフの任意の彩色において同じ色が付けられなければならない. 最もよく知られた (非平面的な) 例として次図の Petersen グラフがある:

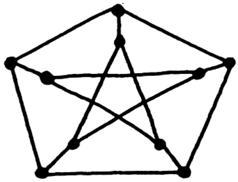


辺 a のところで次のようになる:



したがって, どちらの場合も a'' と a' は同じ色を付けざるを得ないことがわかる.

注. Petersen グラフはふつう五角形状に描かれる [SA]:

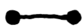


7 節　彩色多項式

彩色多項式とは, グラフ G に対する多項式 $K(G) \in \mathbf{Z}[x]$ で, $K(G)(x)$ が x 色による G の頂点彩色の**総数**となるようなもののことである. (頂点彩色では**2つの頂点が辺で結ばれているとき, その頂点には異なる色が付けられる.**)

例題.

$K\Big($  $\Big) = x$

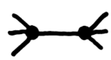
$K\Big($  $\Big) = x(x-1) = x^2 - x$

$K\Big($  $\Big) = 0$

$K\Big($  $\Big) = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x.$

便宜上, G がループをもつならば形式的に $K(G) = 0$ とおくことにする.

今回の話を始める前に, $K(G)$ に関するよく知られた [WH2] 漸化式を紹介する:

$K\Big($  $\Big) = K\Big($  $\Big) - K\Big($  $\Big)$

$$K(G) = K(G-a) - K(G/a).$$

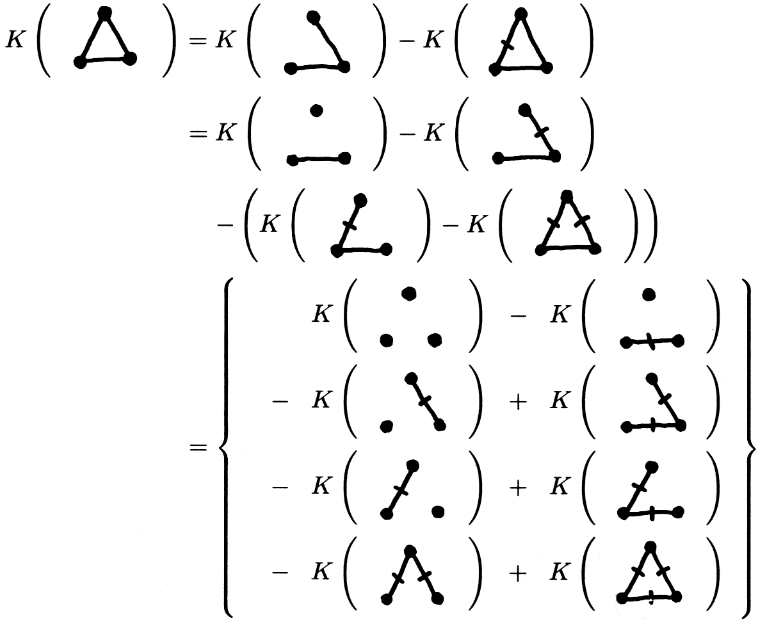
この公式は, 特定の辺 a をもつグラフ G の彩色の総数は, $(G-a)$ (G から辺 a を除いたグラフ) の彩色数と (G/a) (G において辺 a を 1 点に縮めたグラフ) の彩色数の差であることを示している. これは論理的な等式である:

(a の両端点の色が) 異なるもの

= (a の両端点の色が同じものと異なるもの) 全部

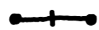
−(a の両端点の色が) 同じもの.

この公式は彩色多項式を帰納的に計算するために用いられる. 例えば:



$$= \left\{ \begin{array}{cccc} & x^3 & - & x^2 \\ - & x^2 & + & x \\ - & x^2 & + & x \\ - & x & + & x \end{array} \right\} = x^3 - 3x^2 + 2x$$

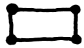
$\therefore$ K  $= x(x-1)(x-2).$

この計算の中で, 縮めた辺を示すために**辺接合** (edge-bond)  を用いた. したがって, さきほどの漸化式は次のように表される:



計算のなかほどで示されたように, 帰納的な計算の結果は, G の各辺を取り除くか, 接合して得られる**接合グラフ** (bond-graph) に関する K の値の総和となる. 明らかに, そのようなグラフのとる値は $(-1)^{\sharp(\text{接合})}x^{\sharp(\text{連結成分})}$ である.

そこで, 任意のグラフ G に対して, G の**接合ステイト** (bond state) B を, 各辺を取り除くか接合していって, その結果として得られるものと定義する. このとき, $||B||$ で B の成分数を, $i(B)$ で接合数を表すことにする.

例えば, B  は  の接合ステイトの 1 つで, $||B|| = 2$, $i(B) = 2$ である. 彩色多項式は次のような公式で与えられることがわかる:

$$K(G) = \sum_{B}(-1)^{i(B)}x^{||B||}.$$

まず初めに考えることは, グラフ G に随伴するユニバース (4–正則平面グラフ) のステイトによって, この彩色多項式を書き換えることである. 実際, ユニバースと平面グラフの間には 1 対 1 対応がある. その対応は次のようにして得られる (図 7.1 を参照せよ).

(i) ユニバース U が与えられたとき, 初めに非有界領域が白となるように, U にチェッカー彩色を施し, 以下のようにして随伴するグラフ G を得る (色は白と黒にする). 各黒色領域 (以後, 陰という) の内部に 1 つの頂点をおく. U の交差点で接触している領域にある頂点どうしをすべて辺で結ぶ. 例えば,

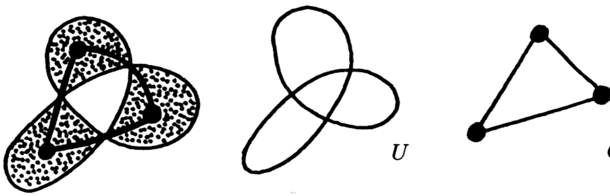
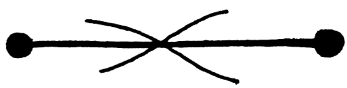


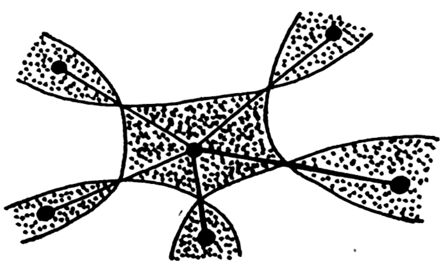
図 7.1　グラフ G とそのユニバース U.

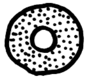
上述の説明を図 7.1 の場合で考えよ.

(ii) 逆にグラフが与えられたときは, まず各辺上に交差点を次のようにおき,

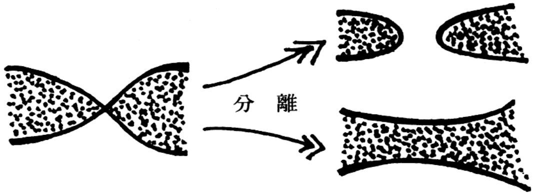


1 つの頂点に対して下図に示されるようなパターンを作るように交差点をつないでゆく:

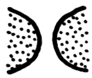


練習問題.  のような場合に注意しながら，この対応を正確に定義せよ．

(文献によっては，平面グラフに随伴するユニバースを，その**中間グラフ** (medial graph) ということもある.) グラフ G をそれに随伴するユニバース U で置き換えると，彩色多項式の別の定式化ができる．グラフの辺を取り除いたり，接合したりするかわりに，2 つの方法で U の交差点を分離する:



グラフ G の頂点彩色は，**交差点で接触している 2 つの領域には，異なる色が付くような U の陰領域の彩色**に対応しているので，彩色等式は次のようになることがわかる:

K () $= K$ () $- K$ ().

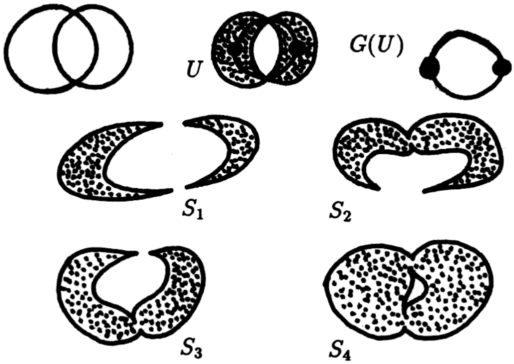
元の構造がわかるように交差点の分離をすると，**彩色ステイトの外部頂点と内部頂点**を分類することができる．チェッカー彩色を施されたユニバース U の彩色ステイトとは，各頂点 (交差点) での分離を選択することである．分離した頂点が**内部** (interior) であるとは，分離によって局所的に連結な陰領域ができる場合であり，**外部** (exterior) であるとは局所的に非連結な場合である．図 7.2 を参照されたい．



図 7.2

図 7.3 に，簡単なユニバース U に対するすべての彩色ステイトをあげておく．内部頂点は随伴するグラフの接合辺と対応しているから，ユニバースに対する彩色公式は次のようになることがわかる:

$$K(U) = \sum_S (-1)^{i(S)} x^{||S||} \tag{$*$}$$



U の彩色ステイト

$$\|S_1\| = 2,\quad \|S_2\| = 1,\quad \|S_3\| = 1,\quad \|S_4\| = 1,$$

$$i(S_1) = 0,\quad i(S_2) = 1,\quad i(S_3) = 1,\quad i(S_4) = 2,$$

$$\begin{aligned} K(U) &= \sum_S (-1)^{i(S)} x^{\|S\|} \\ &= (-1)^0 x^2 + (-1)^1 x + (-1)^1 x + (-1)^2 x \end{aligned}$$

$$\therefore\quad K(U) = x^2 - x$$

図 7.3

ここで, $i(S)$ は彩色ステイト S の内部項点の個数, $\|S\|$ は S の陰領域の個数とする.

本節の後半の目標は, **平面グラフの彩色多項式を計算するための, プログラムによって制御できる簡単なアルゴリズムを与えること**である. (もちろん, グラフは比較的簡単なものでなければならない.) あとで, これを 2 変数彩色多項式に拡張し, 統計物理学の Potts 模型との関係を明らかにする. そのアルゴリズムは有用で, Potts 模型を考える際に用いることができる. 数学の立場から考えると, この公式化は Potts 模型, ある種の代数と, 結び目や絡み目の不変量に関する類似の模型との関係について明確な説明を与えている. それはとても含蓄のある構造であり, すべてが彩色問題に関係している.

さてアルゴリズムを考えるとき, 最初に必要なものは**彩色ステイトのリストを作る方法**である. 各ステイトは, U の各項点での (分離の仕方の) 二者択一の結果であるから, 零 (0) 個から $2^n - 1$ 個 ($n = U$ の項点数) までの 2 進数のリストを作るために都合のよい方法を用いれば十分である. 特に, **Gray コード** を用いると便利である. Gray コードは, 各段階ごとに数字が 1 つだけ変わる 2 進数のリストを

作る方法を与える. 図 7.4 に Gray コードの初めの部分をあげておく.

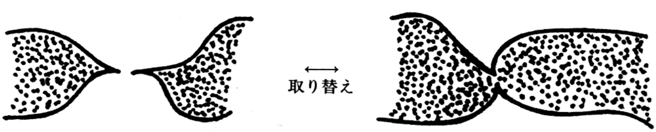
				0
				1
			1	1
			1	0
		1	1	0
		1	1	1
		1	0	1
		1	0	0
	1	1	0	0
	1	1	0	1
	1	1	1	1
	1	1	1	0
	1	0	1	0
	1	0	1	1
	1	0	0	1
	1	0	0	0
1	1	0	0	0
		⋮		

} Gray コード

図 7.4

このコードは右端にある数字を変えることと, 100⋯0 という形の列の右端のすぐ左隣りの数字を変えることとを, 交互に行っている.

1 回につき 1 つの場所 (交差点) を分離するから, この展開における符号は $+-+-+-\cdots$ と交互になる (これは公式 (*) の符号 $(-1)^{i(S)}$ である). 各ステイトについての情報のなかできわめて重要なものは, 陰領域の個数 $||S||$ である. したがって, **S の 1 つの頂点における分離を取り替えて得られるステイトを S' とするとき, $||S||$ と $||S'||$ がどのくらい異なるかということを決定する必要がある.**



これについては, 次のことがわかる.

補題 7.1. S と S' をユニバース U の彩色ステイトとする. S' は S の 1 つの頂点 v における分離を取り替えて得られるものとする. このとき, 次が成り立つ:

1) v が S の 2 つのサイクルに接続する外部頂点ならば, $||S'|| = ||S|| - 1$.

2) v が S の 1 つのサイクルに接続する内部頂点ならば, $||S'|| = ||S|| + 1$.

3) そのほかの場合, $||S'|| = ||S||$.

(図 7.5 を参照せよ.)

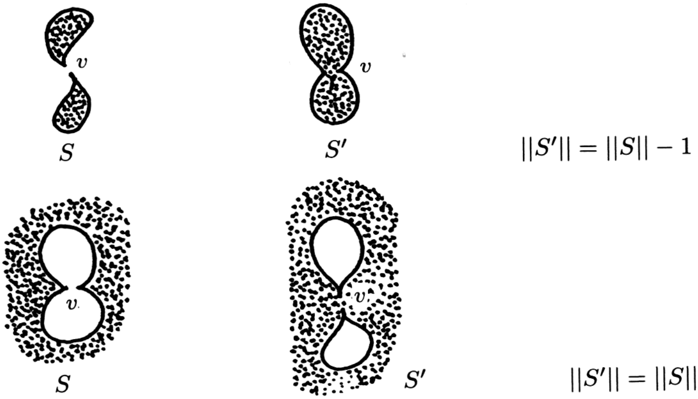
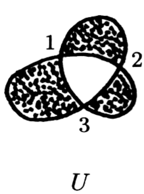


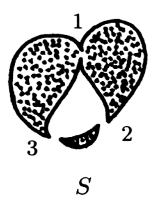
図 7.5

S に新しいサイクルができたことによって違いが生じることは, 図 7.5 より明らかである. 任意のステイト S は, 平面上の互いに交わらない閉曲線の集合である. これは S におけるサイクルのことである. すべての頂点は 1 つあるいは 2 つのサイクルに挟まれている.

この補題より, アルゴリズムの構成には, 与えられたステイトにサイクルがいくつあるかということを調べる必要がある. 実際, **ステイトをそのサイクルのリスト (および頂点の型のリスト) からコード化すること**は容易である. 各サイクル上の頂点に時計回りに順番をつけたリストを作ってみよう. 例えば (図 7.6 を見よ),



サイクル
123
23



頂点	型
1	内部
2	外部
3	外部

図 7.6

図 7.6 には三葉結び目に関する 1 つのステイト S, サイクルのリスト, 頂点の型のリストをあげておいた. サイクルと頂点のみの情報から, 頂点 3 を取り替えると, 成分数が 1 つ減ることがわかる (これは 2 つのサイクルに接続する外部頂点である). このようにして平面グラフの彩色多項式を計算するためのコンピュータ・アルゴリズムの大筋が得られた. このアルゴリズムの途中の様子は, その結果と同じくらい面白いものである. この話をするために, グラフの彩色数を求めるアルゴリズムの概略を次に記す:

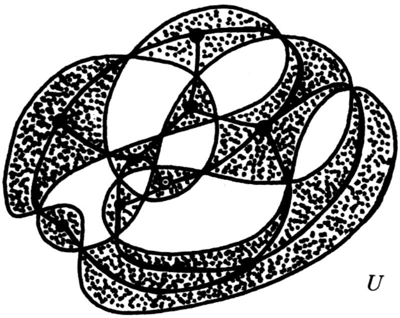
1. 色の総数 (NUM) を入力せよ (おそらく 4 色).
2. 1 つのステイト S のステイト情報を入力せよ: 頂点の個数とその型, サイクルのリスト, 陰領域の個数.
3. SUM の初期値を 0 とせよ. (SUM はステイトの和の初期値である.)
4. $\mathrm{SUM} = \mathrm{SUM} + (-1)^{i(S)}(\mathrm{NUM}^{||S||})$. (ただし, $i(S)$ は S の内部頂点の個数, $||S||$ は陰領域の個数とする.)
5. log(SUM) と log (このアルゴリズムの繰り返しの回数) を軸とするグラフに log(SUM) の値を書き入れよ.
6. Gray コードを用いて次に取り替えるべき頂点 V を選べ. (すべてのステイトが現れたら, 終り!)
7. ステップ 6 の V における選択を用いて, サイクルを再分離し, 頂点 v の型を変えて (内部 $\rightleftarrows$ 外部), ステイト S を新しいステイトに取り換えよ.
   新しいステイトをまた S とする.
8. ステップ 4 へ行け.

このアルゴルズムは, 途中のステイトを考えるための最初のステイトをどれにするかにのみよっている. 最も簡単な初めのステイトとは, そのサイクルがユニバース U の陰領域の境界であるようなステイト S_0 である. そのときすべての頂点は外部であり, $||S_0|| = (\mathrm{NUM}^M)$ である. ここで M は陰領域の個数に等しい. これは S_0 の最大値である.

Gray コードをよくみると, このような初期設定では SUM の途中の値はつねに**非負**になることがわかる. **これがつねに正であるというのは, 四色問題** (NUM = 4) **を一般化した予想である.**

事実, $K = 1, 2, \cdots$ について 2^K 回の反復で log–log 軸の平面に点をプロットして描いたグラフがほぼ線形であることは経験的にわかる. (この値は双対グラフ $\Gamma(U)$ の部分グラフの集合の彩色数に対応している!) 明らかに, この分野には研究課題がまだまだ残っている.

図 7.7 はこのアルゴリズムで描いた典型的なプロットを示す ([LK10] を見よ).



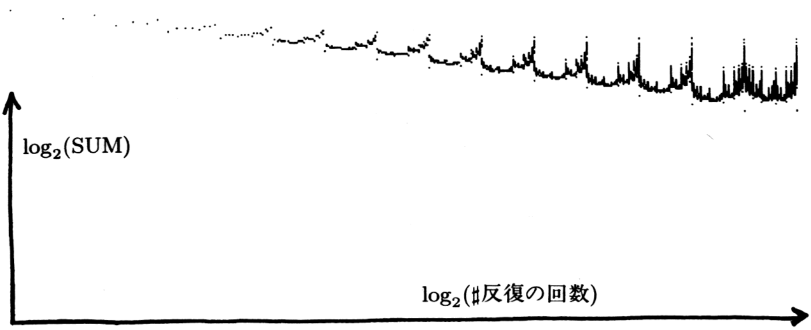


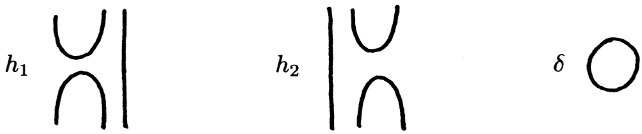
図 7.7

このプロットの**極小値**は, 部分グラフの彩色数に対応する. (すなわち, それは 2^K 回の反復で現れる.) 極大値は, Gray コードが領域を最も多く分離したステイトに対応する. (それは, 取り替えの過程で, 新しい接合を取り替える直前に周期的に現れる.) "彩色数の予言者"として, このアルゴリズムを用い, また最小自乗法による近似値によって極小値を探すことは, 面白くまたとても役に立つであろう.

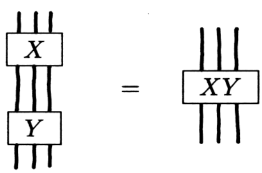
8 節　Potts 模型と 2 変数彩色多項式

本節では, Potts 模型の分配関数 ([BA2] 参照) がいかにしてブラケット多項式のステイト模型に変換されるか, を示す. 特に, (Temperley と Lieb によって Potts 模型の物理学から初めて構成された) 作用素代数が, ユニバース (4–正則平面グラフ) に対する 2 変数彩色多項式の計算の中で, きわめて自然に出現することを示す.

Potts 模型について述べる前に, まず作用素代数を紹介する:



図式 h_1, h_2 は, 3–紐**図式代数** (diagram algebra) D_3 の 2 つの生成元を表している. 積は図式を接続させることとする:

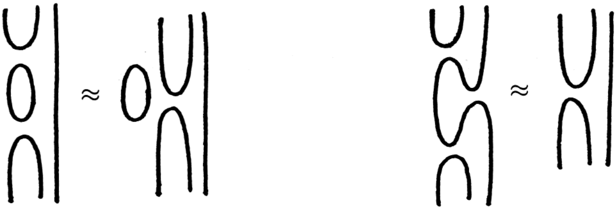


以前は h_i の代わりに e_i を使い, この代数を (直接)Temperley-Lieb 代数とよんでいた. 紐はトポロジー的には動かしてもよいが, その**固定された**端点を通る水平な線より上または下へ動かすことはできない. また, ループが現れたら δ 倍することにする.

図式代数 D_n において, 次の関係式が成り立つ:

$$\left\{\begin{array}{rcll} h_i^2 &=& \delta h_i & i=1,2,\cdots,n-1 \\ h_i h_{i+1} h_i &=& h_i & \\ h_{i+1} h_i h_{i+1} &=& h_{i+1} & \\ h_i h_j &=& h_j h_i & |i-j|>1 \end{array}\right\}$$

次の図 8.1 を参照されたい.



$h_1^2 = \delta h_1$ $h_1 h_2 h_1 = h_1$

図 8.1 図式代数の関係式

Potts 模型.†

この模型を用いて, 平面グラフ G に関する分配関数を計算しよう. 一般に, 頂点 $i, j, \cdots$, 辺 $\langle i, j \rangle, \cdots$ をもつグラフ G に対し, 分配関数は $Z_G = \sum_S e^{-E(S)/kT}$ という形をしている. ここで, 和は G の 〈ステイト〉S すべてにわたってとるものとし, $E(S)$ は 〈ステイト〉S のエネルギー, k は Boltzmann 定数, T は温度を表すものとする.

このことは, グラフおよび組合せ論的に定義されたステイト S の集合に対応する物理系が存在し, またステイトはうまく定義されたエネルギーをもつという前提から出発している. 分配関数は, 詳しく調べると物理系に関する多くの情報を含んでいる. 例えば, 系がステイト S になる確率は, $p(S) = e^{-E(S)/kT}/Z$ で与えられる.

ステイトのエネルギーの確率分布に関するこの指数模型は, 【次のエネルギーの均質性仮定に基づいている: エネルギー準位 E, E' に対して, $\hat{p}(E)$ をステイトがエネルギー E をもつ確率とすると,

$$\hat{p}(E+K)/\hat{p}(E'+K) = \hat{p}(E)/\hat{p}(E')$$

が成り立つ】. さらに, 同じエネルギー準位の状態は存在確率も等しい, とする.

【Boltzmann 分布はこれらの仮定から導かれる. 2 つの仮定のうち, 後者はこのシステムが平衡状態にあるという仮定である. 均質性は, 観測者がエネルギーの "基点" を固定することができないことと関係している.】

Potts 模型において, 〈ステイト〉はグラフ G の各頂点に q 個の値 ($1, 2, 3, \cdots, q$ とする) を割り当てる方法に関係している. したがって, G に N 個の頂点があるならば, q^N 個の 〈ステイト〉がある. q 個の値は, 格子の交差点における粒子のスピンや合金に含まれる金属の種類などに対応する. 頂点でのスピン ($1, 2, \cdots, q$ と

---

†訳注: この「Potts 模型」の項目には, 明らかに著者の誤解と考えられる部分が散見する. 修正もままならず, 削除することも考えたが, 考慮の末そのまま訳すことにした. このような部分は【 】でくくってある. また 〈ステイト〉は本来は「配位 (configuration)」とすべきところを, そのまま訳したことを示す.

よぶ) の選び方に条件はなく, 頂点 i でスピン S_i であるような〈ステイト〉S のエネルギーは次式で与えられるものとする:

$$E(S) = \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(S_i, S_j).$$

ただし, 和はグラフの辺すべてにわたってとるものとし, $\delta(x,y)$ は Kronecker のデルタ:

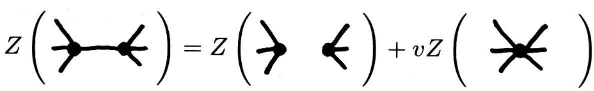
$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \text{ のとき} \\ 0 & x \neq y \text{ のとき} \end{cases}$$

とする. したがって, Potts 模型の分配関数は次のようになる:

$$\begin{aligned} Z_G &= \sum_S e^{K \sum_{\langle i,j \rangle} \delta(S_i,S_j)} \qquad (K = -1/kT) \\ &= \sum_S \prod_{\langle i,j \rangle} e^{K\delta(S_i,S_j)} \\ \therefore \quad Z_G &= \sum_S \prod_{\langle i,j \rangle} (1 + v\delta(x,y)). \end{aligned}$$

ただし, $v = e^K - 1$ (すなわち, $e^{K\delta(x,y)} = 1 + v\delta(x,y)$).

分配関数の最後の形は特に重要で, これは次のような構造を示唆している:



$$Z(\bullet \sqcup H) = qZ(H).$$

ここで  はグラフ G  から辺一本を取り除いたグラフを,

 は同じ辺を縮めて得られるグラフを表す.

それゆえ, $Z(G)$ は v, q **を変数とする** G **の 2 変数彩色多項式** (dichromatic polynomial) である.

注意. Potts 模型のタイプによっては辺の種類により v の値が異なる. ここでは最も簡潔なもので考えた.

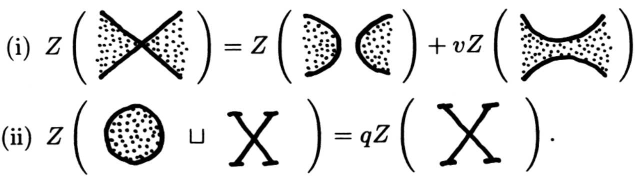
注意. $Z(G)$ を計算するのは, 相転移のような現象 (液体が気体に, $\cdots$) に対応する臨界点における挙動を決定するためである. そこで大きなグラフを取り扱うことになるが, 完全にわかったのは q が小さい場合 (例えば Potts 模型において $q = 2$

ならば Ising 模型である) と平面グラフの場合のみである[†].

注意. $v=-1$ のとき, $Z(G)$ は (変数 q の) 彩色多項式である. 物理学的に $v=-1$ であるとは, $-1=e^{-1/kT}-1 \Longrightarrow e^{-1/kT}=0$ となり, よって $T=0$ のことである.

平面グラフの 2 変数彩色多項式.

彩色多項式の場合と同様に, 平面グラフをそれに随伴するユニバース (中間グラフ) に置き換えると, 2 変数彩色多項式はチェッカー彩色を施したユニバースから次の公式によって帰納的に計算することができる:



ただし,  は任意の連結な陰領域を表し, ⊔ は互いに交わらない集合の和を意味する.

前と同様に, **彩色ステイト** S はユニバース U を頂点で分離したものであると定義すると, すべての頂点が分離していることから, U の**チェッカー彩色に関して**

$$||S|| = S\text{の陰領域の個数},$$
$$i(S) = S\text{の内部頂点の個数}$$

がわかる. するとステイトの和は次のようになる.

$$Z(U)=\sum_S q^{||S||}v^{i(S)}.$$

そこで 2 変数彩色多項式をこのように書き換えると, **チェッカー彩色を施したユニバースは交代絡み目表示に, また陰領域の個数 $||S||$ は S の成分 (閉路) の個数に置き換えられる.**

命題 8.1 U をユニバース (結び目あるいは絡み目の図形表示の影) とする. U にチェッカー彩色を施しておく. また, N を U の陰領域の個数とする. (陰領域はグラフ $\Gamma(U)$ の頂点と 1 対 1 に対応している. よって N を**双対**頂点の個数ということにする.) S を U の彩色ステイトで, $||S||$ 個の連結な陰領域と $i(S)$ 個の内部

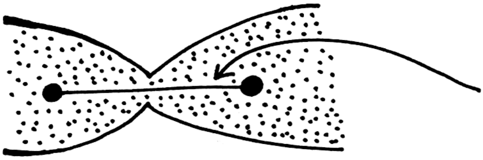
[†]訳注: 相転移の起こる点を転移点という. 臨界点があるのは, 2 次以上の相転移の場合だけである. また, q が大きい場合にも特殊な場合にいくつか厳密解が知られている.

頂点をもつものとする. $|S|$ で S における閉路の個数 (すなわち, S の陰領域の境界である閉曲線の個数) を表すことにする. そのとき,

$$||S|| = \frac{1}{2}(N - i(S) + |S|)$$

が成り立つ.

証明. 各ステイト S に対し, グラフ $\Gamma(S)$ を考える: $\Gamma(S)$ の頂点は $\Gamma(U)$ の頂点であり, 各頂点は U の 1 つの陰領域に対応している. $\Gamma(S)$ の 2 つの頂点は S の内部頂点の間に辺が描けるときに限って 1 本の辺で結ばれる. すなわち,



したがって, $\Gamma(S)$ の辺は S の内部頂点と 1 対 1 に対応している. $\Gamma(S)$ は平面グラフであり, $\Gamma(S)$ の**面 (face) の個数**は $|S| - ||S|| + 1$ であるといえる.

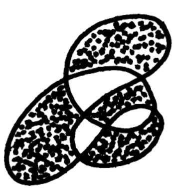
いま述べたことの後半を理解するには, $\Gamma(S)$ における各閉曲線が S の陰領域の内部にある白色領域を囲んでいることに注目すればよい. すると S の閉路を数え上げることで $\Gamma(S)$ の面が数えられるが, S の陰領域の外側の閉路は除かなければならない. それには, $||S||$ を引き算すればよい. さらに非有界な面を数えるために 1 を加えるのである.

$\Gamma(S)$ に $||S||$ 個の成分があることは明らかであるから, 平面グラフに対して Euler の公式

$$(\text{頂点の個数}) - (\text{辺の個数}) + (\text{面の個数}) = (\text{成分数}) + 1$$
$$N - i(S) + (|S| - ||S|| + 1) = ||S|| + 1$$

を適用する. よって, $N - i(S) + |S| = 2||S||$. これで証明を終る. □

例題.



$N = 4$



$\Gamma(S)$

$$||S|| = 2$$
$$|S| = 3$$
$$i(S) = 3$$

したがって

$$\frac{N - i(S) + |S|}{2} = \frac{4 - 3 + 3}{2} = 2, \qquad ||S|| = 2.$$

このとき, S は 2 変数彩色多項式の $q^{||S||}v^{i(S)} = q^2v^3$ という項に寄与する. v–因子の個数は Potts 模型における正のエネルギー寄与に対応するので, これらの寄与は辺で結ばれた $\Gamma(S)$ の項点の一群に対応していることがわかる. このような項点は互いにスピン・ステイトの選び方によって定まる.

命題 8.1 により, 公式の中の $||S||$ を $|S|$ で置き換えることができる. 実際に置き換えてみよう!

$$Z(U) = \sum_S q^{||S||}v^{i(S)}$$
$$= \sum_S q^{1/2(N - i(S) + |S|)}v^{i(S)}$$
$$\therefore\ Z(U) = q^{N/2}\sum_S (q^{1/2})^{|S|}(q^{-1/2}v)^{i(S)}.$$

さらに

$$W(U) = \sum_S (q^{1/2})^{|S|}(q^{-1/2}v)^{i(S)}$$

とおくと,

$$Z(U) = q^{N/2}W(U).$$

これで 2 変数彩色多項式の書き換えを完成させる準備ができた. ユニバースに**チェッカー彩色を施すということ**は, 次図 (図 8.2) のように, **絡み目の図形表示の交差点を決めること**と考えられる.

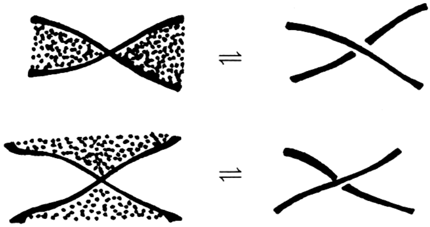


図 8.2 局所的なチェッカー彩色と交差点の対応

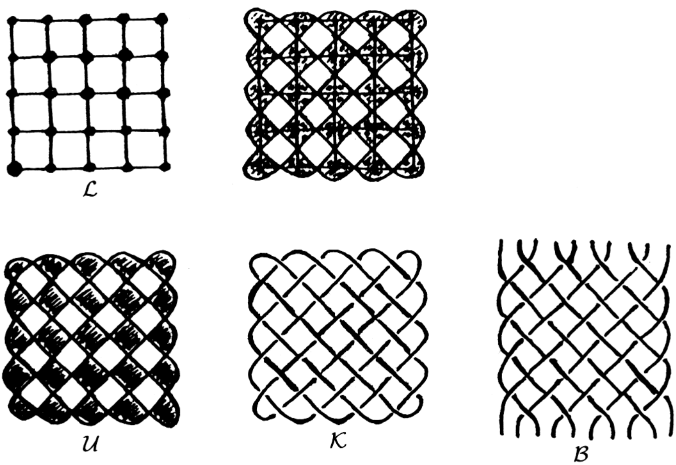


図 8.3

それは W が次の等式



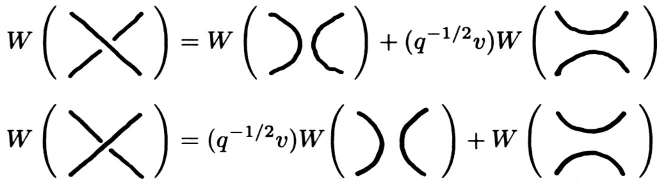
$$W(\bigcirc \sqcup K) = q^{1/2} W(K)$$

を満たすからである. (K とは独立した成分が陰領域ではないことに注意せよ!) そこで, 以下のような W–公理と Z–定義を書き上げることができる:

***W*–公理 (Potts ブラケット).**

1. 結び目あるいは絡み目の図形表示 K に対して, $W(K) \in \mathbf{Z}[q^{1/2}, q^{-1/2}, v]$ は変数 q, v の関数として定義できる.

2.



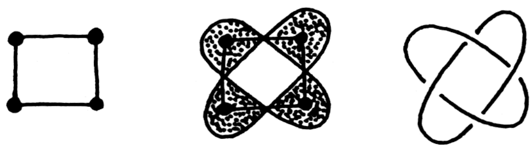
3. $W(\bigcirc \sqcup K) = q^{1/2}W(K)$

4. $W(\bigcirc) = q^{1/2}$

Z–定義: $Z(K) = q^{N/2}W(K)$ とする. ここで N は K の陰領域の個数を表している ([LK10] と比較せよ).

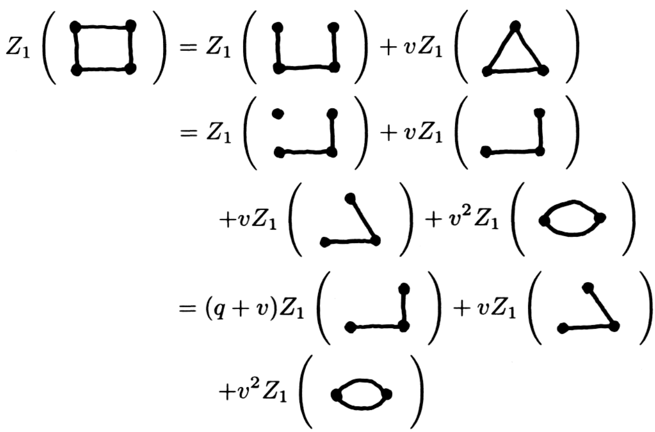
これまでの議論に従って, 格子 $\mathcal{L}$ に対してまずその中間グラフを考え, それにチェッカー彩色を施す. さらに, 図 8.2 の対応によって絡み目の図形表示 $K(\mathcal{L})$ をつくることで, $\mathcal{L}$ の 2 変数彩色多項式 (すなわち Potts 模型の分配関数) が計算できる. 図 8.3 には 5×5 格子 $\mathcal{L}$ に関する構成が示されている.

ここで例として 2×2 格子を計算してみる.

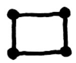


$\mathcal{L}$ 　　U 　　$K = K(\mathcal{L})$

(a) $Z(\mathcal{L}) = Z_1$ **を直接計算する方法.**



$$
\begin{aligned}
&= (q+v)(q+v)^2q + v(q+v)^2q + v^2(q+2v+v^2)q \\
&= (q+v)^3q + (q+v)^2vq + (q+2v+v^2)v^2q \\
&= (q^3+3q^2v+3qv^2+v^3)q + (q^2+2qv+v^2)vq \\
&\quad +q^2v^2+2v^3q+v^4q \\
&= q^4+3q^3v+3q^2v^2+qv^3 \\
&\quad +q^3v+2q^2v^2+qv^3+q^2v^2+2qv^3+qv^4
\end{aligned}
$$

$\therefore\ Z\Big($  $\Big) = q^4+4q^3v+6q^2v^2+4qv^3+qv^4$

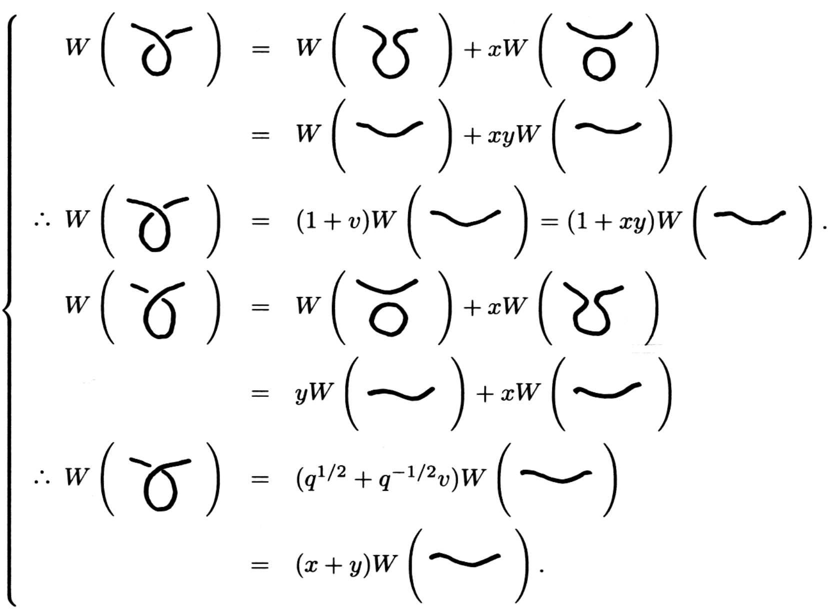
(b) **はじめに $W(K)$ を計算する方法.** W を計算するために次の公式を用いる.

$W\Big($  $\Big) = W\Big($  $\Big) + xW\Big($  $\Big)$,

$$W(\bigcirc \sqcup L) = yW(L), \qquad W(\bigcirc) = y.$$

ただし, $x = q^{-1/2}v, \quad y = q^{1/2}$.

2×2 格子を計算する前に, いくつかの便利な公式を出しておこう:



ここで格子／結び目の図形表示 K に戻ると，

$W\Bigg($  $\Bigg) = W\Bigg($  $\Bigg) + xW\Bigg($  $\Bigg)$

$= (x+y)^3 W\Bigg($  $\Bigg)$

$+x\Bigg[W\Bigg($  $\Bigg) + xW\Bigg($  $\Bigg)\Bigg]$

$$= (x+y)^3 y + x(x+y)^2 y + x^2((x+y)y + x(1+xy)y)$$

$\therefore\ W\Bigg($  $\Bigg) = (x+y)^3 y + (x+y)^2 xy + (x^2 y + 2x + y)x^2 y.$

このとき，$Z(\mathcal{L}) = q^{N/2} W(K(\mathcal{L}))$ となっていることを示すのは練習問題として読者に残しておく！

コメント． 明らかにわかるように，2 変数彩色多項式を結び目の図形表示を用いて計算するというのは，計算そのものを簡素化してはいない．しかしこうすることで (Potts 模型を経由した) 2 変数彩色多項式に関連した Temperley-Lieb 代数の幾何的側面が明らかになる．

ブレイドから Temperley-Lieb 代数への写像が，2 変数彩色多項式の W–公式からどのようにして自然に生じるかを示そう．

次のように考える：ブレイド表示に対する W を，対応するステイトで展開すると，Temperley-Lieb 代数の元を見い出すだろう．例えば，下図

$\beta =$ 

について $W(\beta)$ を計算したとすると，その 1 つのステイトは



となるが，これは D_3 の元 $h_1 h_2 h_1$ である．一般に，(例えば)

$$W(\beta) = W(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)$$

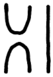
を展開するには，

$$\sigma_i \text{ を } \mathcal{I} + xh_i \text{ で}$$
$$\sigma_i^{-1} \text{ を } x\mathcal{I} + h_i \text{ で}$$

置き換え, これらの積を形式的にとることによって, 代数的に展開できる.

例えば, 上記の例の場合は

$$\begin{aligned}
&(\mathcal{I} + xh_1)(\mathcal{I} + xh_2)(\mathcal{I} + xh_1)\\
&= (\mathcal{I} + xh_1 + xh_2 + x^2h_1h_2)(\mathcal{I} + xh_1)\\
&= \mathcal{I} + xh_1 + xh_2 + x^2h_1h_2 + xh_1 + x^2h_1^2 + xh_2h_1 + x^3h_1h_2h_1\\
&= \mathcal{I} + 2(xh_1) + (xh_2) + (x^2h_1^2) + (x^2h_1h_2) + (xh_2h_1) + (x^3h_1h_2h_1).
\end{aligned}$$

 $\longleftrightarrow h_1$  $\longleftrightarrow h_2$  $\longleftrightarrow h_1^2$

 $\longleftrightarrow h_1h_2$  $\longleftrightarrow h_2h_1$  $\longleftrightarrow h_1h_2h_1$

W はブレイドのトポロジー的な不変量**ではない** (ブレイドの W を考えるときのブレイドとは, このパターンを含む大きな図形表示を指している) が, **この対応は Temperley-Lieb 代数の関係式を満たしている.**

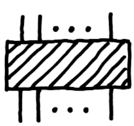
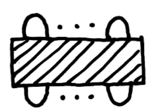
したがって,

$W(h_1h_2h_1) = W\Big[$  $\Big] = W\Big[$  $\Big] = W(h_1),$

$W(h_1^2) = W\Big[$  $\Big] = yW\Big[$  $\Big] = yW(h_1).$

($h_1^2 = \delta h_1$ であるので $W(\delta X) = yW(X)$ を $W(\bigcirc \sqcup X) = yW(X)$ の代数版とみなせる. **よって, ここでは $\delta = y$ と考える.**) この写像の像である代数とはどのようなものであろうか? 形式的には, $\mathcal{U}_n = \mathbf{Z}[x, y](D_n)$ である. つまり, 変数を x, y とする $\mathbf{Z}[x, y]$–多項式を係数として, D_n の生成元を形式的に足したり, 掛けたりしているわけである.

このような定式化をするにあたっては, 正方格子の Potts 模型の計算を完全に $\mathcal{U}_n$ に関する代数の問題として考えた. そのため, 格子 $\mathcal{L}$ による絡み目の図形表示 $K(\mathcal{L})$ を, $K(\mathcal{L})$ の上下をそれぞれ閉じて得られるブレイドとして考える:

β  $\longrightarrow$ 

$P(\beta) = K(\mathcal{L})$

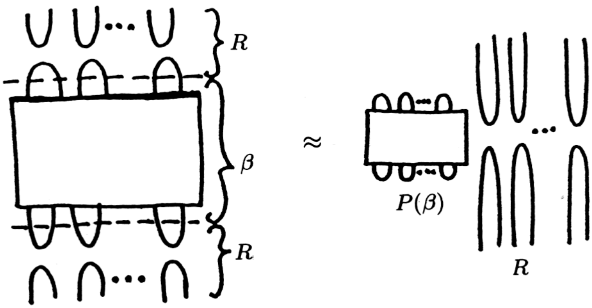
$P(\beta)$ のようにブレイド β を閉じたものを**プラット** (plat) という.

注意. R を次のような表示とする:

$$\begin{matrix}\cup\cup\cdots\cup \\ \cap\cap\cdots\cap\end{matrix} = h_1h_3h_5\cdots h_{2n-1} \in D_{2n}$$

このとき, β **を** B_{2n} **の任意の元とすると,** $R\beta R = P(\beta)R$ である.

証明.



$$R\beta R = P(\beta)R.$$ □

この公式から, β を $\mathcal{U}_n$ の元の積と置き換えると自動的に必要なすべての成分数がわかる. $X(\beta)$ を β に対応する $\mathcal{U}_n$ の元としよう:

$$X : \widehat{B}_n \longrightarrow \mathcal{U}_n$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} X(\sigma_i) & = & \mathcal{I} + xh_i \\ X(\sigma_i^{-1}) & = & x\mathcal{I} + h_i \\ X(\mathcal{I}) & = & \mathcal{I} \end{array}\right\}$$

$$\{X(ab) = X(a)X(b)\}.$$

ここで, $\widehat{B}_n$ はブレイドの語によって表されるブレイド図式の集合とする. 図式でいうと全同位を含めていないし, 代数的にいうと, $\widehat{B}_n$ は生成元を $\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}$, $\sigma_1^{-1}, \cdots, \sigma_{n-1}^{-1}$, $\mathcal{I}$ (関係式は, $|i-j|>1$ のとき $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$) とする自由群である. すると $R = h_1h_3\cdots h_{2n-1}$ で $\beta \in \widehat{B}_{2n}$ のとき

$$RX(\beta)R = W(P(\beta))R$$

となり, W の計算は作用素代数 $\mathcal{U}_n$ を用いて完全に代数的にできる.

例題.  $= P\Bigg($  $\Bigg) = P(\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2)$

$$\begin{aligned}
\beta &= \sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2 \\
X(\beta) &= (\mathcal{I} + xh_2)(x\mathcal{I} + h_1)(x\mathcal{I} + h_3)(\mathcal{I} + xh_2) \\
&= (x\mathcal{I} + x^2h_2 + h_1 + xh_2h_1)(x\mathcal{I} + h_3)(\mathcal{I} + xh_2) \\
&= x^2 + x^3h_2 + xh_1 + x^2h_2h_1 \\
&\quad + xh_3 + x^2h_2h_3 + h_1h_3 + xh_2h_1h_3 \\
&\quad + x^3h_2 + x^4h_2^2 + x^2h_1h_2 + x^2h_2h_1h_2 \\
&\quad + x^2h_3h_2 + x^3h_2h_3h_2 + xh_1h_3h_2 + x^2h_2h_1h_3h_2.
\end{aligned}$$

最終的に現れた項はそれぞれ K の 16 個のステイトに対応している. 1 つの項を例にとり, その様子を代数的かつ幾何的にみてみよう. そのために, $\beta \in B_4$,

$$R = h_1h_3 \longleftrightarrow \begin{matrix} \cup\cup \\ \\ \cap\cap \end{matrix}$$

とする. $RX(\beta)R$ における項 $R[x^2h_2h_3h_2]R$ をみてみると,

$$\begin{aligned}
R[x^2h_2h_3h_2]R &= x^2h_1h_3h_2h_3h_2h_1h_3 \\
&= x^2h_1h_3h_2h_1h_3 \\
&= x^2h_1h_3h_2h_3h_1 \\
&= x^2h_1h_3h_1 \\
&= x^2h_1^2h_3 \\
&= (x^2y)h_1h_3 \\
&= (x^2y)R.
\end{aligned}$$

幾何的には:



$h_2h_3h_2$

$Rh_2h_3h_2R \longleftrightarrow$  $\cong$ 

であり, 他から独立した成分は代数において y を生じる.

これまでの話をまとめると, 任意のブレイド図式 $\beta \in \widehat{B}_{2n}$ に対し, その W–多項式は, 代数的には

$$W(P(\beta))R = RX(\beta)R$$

によって与えられる. これは, Potts 模型の作用素代数的な公式, つまり Temperley と Lieb によって与えられた関係式と形式的に同型なものを生ずる ([BA1] 参照). 本書で用いた方法は, まったく幾何的に作用素代数を構成している. 実際, この定式化は模型の統計力学的ないくつかの特徴を明確に示している. 例えば, 反強磁性場の大きな正方格子の場合, 格子の分配関数と双対格子のそれとの間に対称性があれば臨界点が生じると思われる. Potts 模型のブラケットによる定式化において, これは W () $= W$ () が成り立つことに対応し, またこれは $q^{-(1/2)}v = 1$ のときに起こる. したがって (推測される) 臨界温度は

$$e^{(1/kT)} - 1 = \sqrt{q},$$

または

$$T = \frac{1}{k \log(1 + \sqrt{q})}$$

である. 明らかに, 結び目と組合せ論と物理のこの特殊な相互関係をさらに研究する必要がある.

練習問題. 任意の平面グラフ G の 2 変数彩色多項式が Temperley-Lieb 代数によって次のように表せることを示せ: $Z_G = q^{N/2}\{\widetilde{K}(G)\}$. ただし $\{L\} = W_L$ は Potts ブラケット, N は G の頂点数, $\widetilde{K}(G)$ はプラットの形態をとった絡み目とする. (ヒント: $\widetilde{K}(G)$ を極大, 極小をつけた交代中間絡み目 $K(G)$ から得よ.) この練習問題の答えは Hubert Saleur と筆者の共同研究の中に出てくる. [SAL2] と比較されたい.

9節　量子力学, スピン・ネットワークおよび角運動量に対する準備

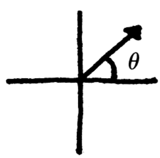
本節は, スピン・ネットワークの Penrose 理論を解説するための準備である. このネットワーク理論は, ステイト和や彩色評価と多くの類似点をもつ. また, ある大きなネットワークの場合には, Roger Penrose の基本的結果によって, 3 次元幾何と密接に関係する. 驚くべきことなのだが, 純粋に組合せ的に定義された大きなスピン・ネットワークにおける内部作用の前後関係に 3 次元空間が現れるのである. まずは量子力学におけるスピンの復習から始めよう.

スピンの復習 ([FE] を参照のこと).

量子力学において, 各過程に確率振幅とよばれる複素数 ψ が対応していることを思い出してもらいたい. ψ は通常は時間と空間の関数 $\psi(x,t)$ である. 標準化することにより, 各過程の起こり得る確率は確率振幅の絶対値の 2 乗に等しい:

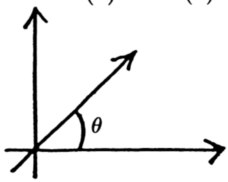
$$\mathrm{prob}(\psi) = \psi^*\psi.$$

ここで ψ^* は ψ の複素共役を表している. ここでは, 過程という言葉を物理過程や観測の方法をも条件として含んで使っている. もし偏光させられた光線を観測するならば, ある方向 θ が与えられた偏光の確率振幅がある (適当なフィルターにより, このような観測が実現できる).



ある方向が与えられた偏光を考えてみる. 分析器 (偏光フィルターや適当なプリズム) の軸は, 分析器を通過する光子の数を測れるように, 直交する方向 x, y に対して適当な位置におかれている [x, y ともに光線の方向に垂直]. a_x, a_y を, それぞれ, x, y 方向の確率振幅とする. このとき, 分析器を x 軸に対して θ 回転すると確率振幅は偏光の確率振幅

$$a(\theta) = \cos(\theta)a_x + \sin(\theta)a_y$$



と重なり合う. この結果は, 次の 2 つの原則に基づいている:

1) 自然には固定された軸は存在しない. [したがって, 結果は回転のもとで不変とならなければならない.]
2) 混合状態における量子確率振幅は, 線形に重なり合う.

偏光器実験には, 既に量子力学の要点が含まれているのである. 例えば, 偏光器において,

y–フィルターの後に x–フィルターを施した

過程に対する確率振幅は零であり,

x–フィルター／45°–フィルター／y–フィルターを施す

と一般には零でなくなる. 互いに 90° をなす偏光フィルターは光を通さないが, 間にある角度のフィルターを入れると光を通してしまう.

次に, **固定軸が存在しないこと**と**線形の重なり合い**という 2 つの原則に数学を導入する.

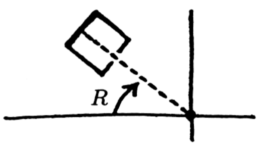
より一般的な粒子のビームにおいて, 確率振幅のベクトル

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

が存在する. 分析器の回転により, 新たに確率振幅

$$\vec{a}' = D(R)\vec{a}$$

が得られる. ここで R は分析器の 3 次元空間における回転を表している.



S と R を回転とするとき, SR を回転の合成とする (最初に R, 次に S). $D(SR) = D(S)D(R)$ かつ $D(R)$ と $D(S)$ がともに線形変換であることが必要である.

線形性は重ね合せから, 合成は軸の取り方によらないことから, 導かれる. すなわち, $\vec{a}$ を標準的な方向の確率振幅とすると, 回転 R によって $\vec{a}' = D(R)\vec{a}$ が得ら

れ, さらに S による回転で $\vec{a}'' = D(S)D(R)\vec{a}$ が得られる. これは, SR による回転を施したものと同じであり, $\vec{a}'' = D(SR)\vec{a}$. したがって, $D(SR) = D(S)D(R)$. (これは状況の要素を除いて常に成立する.) これらの表現に対して確率を議論するのであるが, 複素数上で平面における回転は

$$e^{i\theta} = \lim_{n\to\infty}(1 + i\theta/n)^n$$

により表されることを思い出してほしい. これは実数上の極限 $e^x = \lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n$ の形式的な一般化であり, 次式が成立する:

$$(1 + i\varepsilon)z = z + i\varepsilon z.$$



複素数 z に $(1 + i\varepsilon)$ を掛けることは, 複素平面上で反時計回りにほぼ ε ラジアン回転することに対応する. すなわち, $(1 + i\varepsilon)$ を "無限小の回転" とみなすことができる.

ここで, 次のようにおいてみよう:

$$D(\varepsilon/x) = 1 + i\varepsilon M_x,$$
$$D(\varepsilon/y) = 1 + i\varepsilon M_y,$$
$$D(\varepsilon/z) = 1 + i\varepsilon M_z.$$

これは, それぞれ, x, y, z 軸に関する微小角の回転を表している. この定式化において, $D(\theta/z)$ は z 軸に関する角 θ の回転を表す行列であるとすると,

$$D(\theta/z) = \lim_{\varepsilon\to 0}(1 + i\varepsilon M_z)^{\theta/\varepsilon} = (e^{iM_z})^\theta,$$

つまり,

$$D(\theta/z) = e^{i\theta M_z}$$

が成り立つ. 一般に, ある方向ベクトル $\vec{v}$ に対して, $D(\theta/\vec{v}) = e^{i\theta(\vec{v}\cdot\vec{M})}$ となる. ここで,

$$\vec{M} = (M_x, M_y, M_z),$$
$$\vec{v}\cdot\vec{M} = v_x M_x + v_y M_y + v_z M_z$$

である.

命題 9.1. $D(R)$ はユニタリ行列である. すなわち, $D(R)^{-1} = D(R)^*$. ただし, $*$ は複素共役かつ転置を表す.

証明. $\psi\psi^*$ は回転のもとで不変でなければならない. しかし, 仮に $\psi' = D\psi$ とおくと,

$$\psi'\psi'^* = D\psi(D\psi)^* = \sum_i (D\psi)_i(\psi^* D^*)_i$$
$$= \sum_i \Big(\sum_j D_{ji}\psi_j\Big)\Big(\sum_k \psi_k^* D_{ki}^*\Big)$$
$$= \sum_{jk}\sum_i D_{ji}\overline{D}_{ik}\psi_j\overline{\psi}_k$$
$$= \sum_{j,k}(DD^*)_{jk}\psi_j\overline{\psi}_k.$$

この最後の形がいかなる ψ に対しても $\psi\psi^*$ と等しくなるためには, $DD^* = I$ でなければならない. □

ところで, $D = e^{i\theta M}$ はユニタリ行列であるから,

$$1 = DD^* = e^{i\theta(M-M^*)}$$

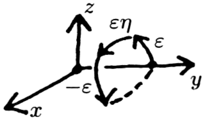
である. よって, $M = M^*$ となり, M は**エルミート行列**になる.

以上のように, M は量子論において**観測可能な物理量**の候補になる. [この行列は実固有値をもつから, 観測の量子力学モデルではある確率振幅 ψ に対して $M\psi = \lambda\psi$ となる.]

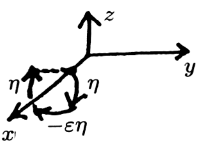
このように考えてくると M_x, M_y, M_z を深く追求する必要が生じる. 特に, それらの固有値やその計算方法が問題となる.

まず, M_x と M_y の交換関係を知るために, x 軸に関する ε 回転, y 軸に関する η 回転, さらに x 軸に関する $-\varepsilon$ 回転, y 軸に関する $-\eta$ 回転という合成を考えよう.

1. 第 1 位数までの範囲では, z 軸は固定されたままとする.

2. 

$\Big\}\Longrightarrow$ y 軸上の点は, z 軸の周りに約 $-\varepsilon\eta$ 回転.

3. 

$\Big\}\Longrightarrow$ x 軸上の点は, z 軸の周りに約 $-\varepsilon\eta$ 回転.

したがって,

$$\begin{aligned}(1-i\varepsilon\eta M_z) &\doteqdot D(-\eta/y)D(-\varepsilon/x)D(\eta/y)D(\varepsilon/x)\\ &= (1-i\eta M_y)(1-i\varepsilon M_x)(1+i\eta M_y)(1+i\varepsilon M_x)\\ \Longrightarrow -iM_z &= -M_yM_x - M_yM_x + M_yM_x + M_xM_y.\end{aligned}$$

よって,

$$M_xM_y - M_yM_x = -iM_z.$$

マイナスの符号がついているので, 共役表現に書き換えると次を得る:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} M_xM_y - M_yM_x &=& iM_z \\ M_yM_z - M_zM_y &=& iM_x \\ M_zM_x - M_xM_z &=& iM_y \end{array}} \qquad (*)$$

固有値の構造.

$$\begin{aligned} M^2 &= M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 \\ M_- &= M_x - iM_y \\ M_+ &= M_x + iM_y \end{aligned}$$

とおく. このとき, M^2 は M_x, M_y, M_z と可換である. (演習: 交換関係 $(*)$ を用いてこれを示せ.)

命題 9.2.

$$\begin{aligned} M_zM_- &= M_-(M_z-1), \\ M_zM_+ &= M_+(M_z+1). \end{aligned}$$

証明.

$$\begin{aligned} M_zM_- &= M_z(M_x - iM_y) \\ &= M_zM_x - iM_zM_y \\ &= M_xM_z + iM_y - iM_zM_y \\ &= (M_x - iM_y)(M_z - 1) \\ \therefore\ M_zM_- &= M_-(M_z - 1) \\ M_zM_+ &= M_z(M_x + iM_y) \\ &= M_xM_z + iM_y + iM_zM_y \\ &= (M_x + iM_y)(M_z + 1) \\ \therefore\ M_zM_+ &= M_+(M_z + 1). \end{aligned}$$

□

ここで, $M_za^{(m)} = ma^{(m)}$ とおく. すなわち, $a^{(m)}$ は固有値 m をもつ固有ベクトルとする. すると,

$$\begin{aligned}M_zM_-a^{(m)} &= M_-(M_z-1)a^{(m)}\\ &= M_-(m-1)a^{(m)}\\ &= (m-1)M_-a^{(m)}\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって, $M_-a^{(m)}$ は固有値 $(m-1)$ をもつ固有ベクトルとなるので, ある定数 c に対して

$$ca^{(m-1)} = M_-a^{(m)}$$

と定義することができる.

各 m に対して, $a^{(m)}$ は $1=\sum_n a_n^{(m)}a_n^{(m)*}$ となるように標準化されていると仮定する. すると,

$$1 = \frac{1}{cc^*}\sum_n \left[M_-a^{(m)}\right]_n \left[M_-a^{(m)}\right]_n^*$$

が成立する. よって,

$$\begin{aligned}1 &= \frac{1}{cc^*}\sum_n \left[M_-a^{(m)}\right]_n^* \left[M_-a^{(m)}\right]_n\\ &= \frac{1}{cc^*}\sum_n \left[a^{(m)*}\right]_n \left[M_-^*M_-a^{(m)}\right]_n\\ &= \frac{1}{cc^*}\sum_n \left[a^{(m)*}\right]_n \left[M_+M_-a^{(m)}\right]_n.\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}M_+M_- &= (M_x+iM_y)(M_x-iM_y)\\ &= M_x^2+M_y^2+i(M_yM_x-M_xM_y)\\ &= M_x^2+M_y^2+i(-iM_z)\\ &= M_x^2+M_y^2+M_z.\\ \therefore\quad M_+M_- &= M^2-M_z^2+M_z.\end{aligned}$$

(M^2 は他の作用素と可換であるから) k を与えて

$$M^2a^{(m)} = ka^{(m)}$$

となるように $a^{(m)}$ を選ぶことができ, 結果として m の範囲を求めることができる.

$$c^*c = \sum_n a_n^{(m)*}(M_+M_-)a_n^{(m)}$$

$$\begin{pmatrix} M_-a^{(m)} & = & ca(m-1)\\ M_+a^{(m-1)} & = & c^*a^{(m)}\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\quad \boxed{|c|^2 = k-m^2+m}.$$

よって $|c| = (k - m(m-1))^{1/2}$. 以上より, $k = j(j+1)$ となり, また $2j$ は整数である.

証明. $m = -j$ を $M_- a^{(m)} = 0$ となる最小の m とする. $m = -j$ に対し $c = 0$ となり, $0 = k - (-j)(-j-1)$. よって $k = j(j+1)$.

同様に考え, m の最大値を j' とすると, $k = j'(j'+1)$. 以上より, $j = j'$ であり, $2j$ は整数となる. □

例題. $j = 1/2$. このとき, 2 つの量子状態がある.

$$a^{(1/2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a^{(-1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく.

$$\begin{aligned} c &= [j(j+1) - m(m-1)]^{1/2} \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{1/2} = \left[\frac{4}{4}\right]^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad c = 1.$$

したがって,

$$\left.\begin{aligned} M_- \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ M_- \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow M_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} M_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ M_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\tfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow M_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

同様にして, $M_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, かつ次が成り立つ:

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\sigma_x \\ M_y &= \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\sigma_y \\ M_z &= \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \tfrac{1}{2}\sigma_z \end{aligned}\right\} \quad \boxed{\begin{aligned} M_- &= M_x - iM_y \\ M_+ &= M_x + iM_y \end{aligned}}$$

ここで, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は以下の関係式を満たす Pauli 行列である:

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1,$$

$$\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x = i\sigma_z.$$

波動力学の簡単な復習

$$\psi = Ae^{i(kx-wt)}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -iw\psi \qquad \boxed{E = h\upsilon = \hbar w}$$

$$(\hbar = h/2\pi)$$

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = E\psi \qquad \boxed{p = \hbar k}$$

$$-i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \hbar k\psi = p\psi.$$

De Broglie (1923) は, 電子と同様に粒子もある波動性をもつことを提唱し, エネルギー E と運動量 p に対して, 次の基本的な式をあげている:

$$E = \hbar w, \qquad p = \hbar k.$$

これらの量は波動関数 $\psi = e^{i(kx-wt)}$ と結びつけられる.

これは, 同年 Schrödinger に次の式を設定させる契機となった:

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi}$$

ここで, $H = p^2/2m + V$ は全エネルギーであり, それは運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和である. そして, 運動量に**作用素**

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$$

を対応させた. すると次式が得られる:

$$H = \frac{(-i\hbar)^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V.$$

ほぼ同じ頃, Heisenberg は非可換代数を基にする行列力学を見い出した. この Heisenberg の力学は, 位置 x と運動量 p が可換でないが,

$$xp - px = \hbar i$$

を満たすような代数を基礎にしている. この代数と Schrödinger の力学は, 物理量に作用素を対応させること (例えば p に対する $(\hbar/i)\partial/\partial x$ のように) によって形式的に結びつく.

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}(xf) - x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}(f) = \frac{\hbar}{i}\left[f + x\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\hbar}{i}f$$

に注目すれば, Schrödinger の理論においても $xp - px = \hbar i$ となる.

以上により, 位置と運動量は同時に観測することはできないのである. 観測可能性はエルミート作用素とその固有値に対応している.

数年後, Max Born が「ψ は事象に対する“複素確率”を測るものである」という解釈 ($\psi^*\psi$ が実際の確率) を行なった.

ここで回転という対象にもどり, 量子力学における角運動量の役割について考えてみよう.

$$\vec{r} = ix + jy + kz, \quad \vec{p} = ip_x + jp_y + kp_z$$

とおく. ここで, i, j, k は $\mathbf{R}^3$ における標準的な基底とする. 古典的な角運動量は $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ によって与えられている:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}.$$

量子力学においては, $\vec{p} = i\hbar\vec{\nabla}$ である. したがって,

$$L_x \leftrightarrow \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$L_y \leftrightarrow -\frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$L_z \leftrightarrow \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$L^2 = |\vec{L}\cdot\vec{L}| = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2.$$

ここで $[a, b] = ab - ba$ とおくと,

$$\left.\begin{array}{rcl} [L_x, L_y] & = & i\hbar L_z \\ [L_y, L_z] & = & i\hbar L_x \\ [L_z, L_x] & = & i\hbar L_y \end{array}\right\} \vec{L} \times \vec{L} = i\hbar\vec{L}$$

である. よって, $[L^2, L_z] = 0$ となり, L^2 は $\vec{L}$ と可換である.

量子力学における角運動量に対する式は, 回転を不変にするユニタリ表現の式と同じである. 角運動量の作用素が ψ の回転不変性に対応している.

波動力学余談

加法定理により, $\sin(X+Y)+\sin(X-Y)=2\sin(X)\cos(Y)$ である.

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right)} \qquad \begin{array}{lcl} \lambda & : & \text{波　長} \\ c & : & \text{波の速度} \end{array}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x-ct)\right)=\sin(kx-wt)$$

$$k=2\pi/\lambda, \qquad w=2\pi c/\lambda=2\pi\nu.$$

ここで次のようにおく:

$$u \;=\; a\left[\sin\underbrace{(kx-wt)}_{X+Y}+\sin\underbrace{(k'x-w't)}_{X-Y}\right]$$

$$\Longrightarrow \; X \;=\; \left(\frac{k+k'}{2}\right)x-\left(\frac{w+w'}{2}\right)t$$

$$Y \;=\; \left(\frac{k-k'}{2}\right)x-\left(\frac{w-w'}{2}\right)t$$

$$u=a\sin\left[\left(\frac{k+k'}{2}\right)x-\left(\frac{w+w'}{2}\right)t\right]\cos\left[\left(\frac{k-k'}{2}\right)x-\left(\frac{w-w'}{2}\right)t\right].$$

もし, $k-k'=\delta k$, $w-w'=\delta w$ とすると,

$$u \;\doteqdot\; \left[a\cos\left(\frac{\delta k}{2}x-\frac{\delta w}{2}t\right)\right]\sin(kx-wt)$$



$$V_g=\text{群速度}=\delta w/\delta k$$

$$\therefore\; V_g=\frac{d(c/\lambda)}{d(1/\lambda)}=\frac{dc/d\lambda}{\lambda d(1/\lambda)}+c=-\lambda\frac{dc}{d\lambda}+c.$$

De Broglie は, $E=h\nu=\hbar w$ を仮定し, さらに光子と同様に

$$p=\frac{E}{c}=\frac{h\nu}{c}=\frac{h}{\lambda}=\frac{\hbar 2\pi}{\lambda}=\hbar k$$

を仮定した. このような約束のもとでは,

$$V_g=\frac{d(c/\lambda)}{d(1/\lambda)}=\frac{d\nu}{d(1/\lambda)}=\frac{d(h\nu)}{d(h/\lambda)}$$

$$\therefore V_g = dE/dp$$

古典的な状況と比較してみると:

$$p = mv$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U \qquad (U: \text{ポテンシャル})$$

$$\frac{dE}{dp} = \frac{1}{m}\frac{dE}{dv} = \frac{1}{m}(mv + 0) = v.$$

De Broglie のエネルギー等式 $E = \hbar\omega$ と運動量等式 $p = \hbar k$ は, 古典的な速度と波束の群速度の対応を生みだした.

相対論余談

ここでは, 特殊相対論において以下のパターンがどのように現れるかを示したいと思う:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sigma_x^2 & = & \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \\ \sigma_x\sigma_y & = & \sqrt{-1}\,\sigma_z \\ \sigma_y\sigma_z & = & \sqrt{-1}\,\sigma_x \\ \sigma_z\sigma_x & = & \sqrt{-1}\,\sigma_y \end{array}\right\}$$

特殊相対論においては, 次の 2 つの基本原理がある:

1. 互いに一定の相対速度で動いている 2 つの座標系において物理法則は同じである.
2. 2 つの慣性系の (すなわち, 互いに一定の相対速度で動いている) 観測者に対し, 光の速度は一定である.

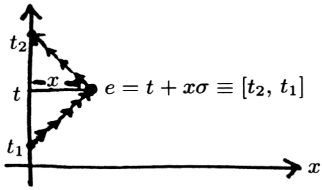
特殊相対論の最初の原理は, ほとんど物理法則の定義のようなものである. 2 つ目の原理は, 明らかなことではない. しかし, Michelson Morley の実験により正当化され, 電磁気学における Maxwell の方程式が最初の原理を満足するという要請に答えている. [Maxwell の理論において, 光の速度に対応するような速度をもつ波動方程式の解が存在する. このことにより, 光波とこのモデルの波動が同一視される. Maxwell 方程式が 1. を満たすと同時に 2. を満たすことになる.]

ここで, 特殊相対論における事象を考えてみよう. 観測者に対して, 事象は **2 つの時間**によって明記される: $[t_2, t_1] = e$. 2 つの時間とは,

$$t_1 = \text{シグナルを発した時間}$$

$$t_2 = \text{シグナルを受け取った時間}$$

である．この考えでは, 観測者は時刻 t_1 で光のシグナルを発する．シグナルは何らかの事象 (レーダー等) により反射され, (観測者の世界の軸で伝達され) 同じ観測者に時刻 t_2 で受け取られる．



簡単のために**光の速度を 1** とおくことにしよう．すると, この世界における光の動きは, 観測者の鉛直な時間軸 t に対し $45°$ の直線で表される．すなわち, 上の図における矢印の道は, 時刻 t_1 でシグナルが発生し, 時刻 t である事象に会い, 観測者に時刻 t_2 で受け取られることを示している．c を光の速度とし, $c = 1$ とおくと,

$$t_2 - t_1 = 2x, \qquad t_2 + t_1 = 2t$$

である．ここで, x と t は事象 e の**空間**と**時間**の座標である．すると, $[t_2, t_1] = [t + x, t - x]$ となり, 光円錐座標を時空座標に移していることになる．

順序対 $[a, b]$ が加法的, すなわち, $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$ で, かつスカラー k に対して $k[a, b] = [ka, kb]$ であるとすると,

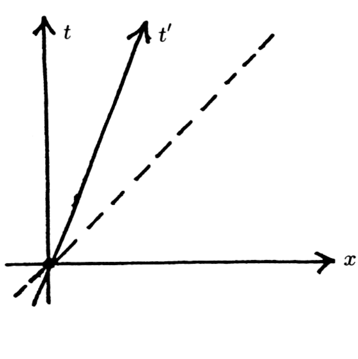
$$[t_2, t_1] = t[1, 1] + x[1, -1]$$

である．省略して, $[1, 1]$ を 1, $[1, -1]$ を σ と書くことにすると,

$$e = [t_2, t_1] = t1 + x\sigma$$

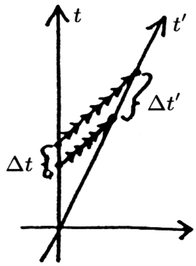
となる．このような座標選択と座標考察がたいへん便利であることが間もなくわかるであろう．

さて, ある事象の光円錐座標が, 互いに相手に関して定速度で動いているような 2 つの関連システムに対して, どのように関係しているかを決定しよう．ここでの表し方に従えば, 2 番目の慣性系の観測者には世界の軸は下の図のようになる．



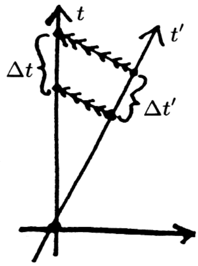
ここで, t' 軸上の座標 (x,t) は, 2番目の座標系の "静止している観測者"の位置と時刻を, 最初の観測者 $\mathcal{O}$ で測ったものである. 第2の観測者の相対速度は $v=x/t$ である. ($\mathcal{O}'$ によって測られる距離というものは, 必ずしも t' 軸に 90° の角をなす図式において測ったものではない.)

このように, 同一の図に $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ のシステムが描けたわけだが, $\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}'$ へシグナルが発せられた図を考えてみよう.



$\mathcal{O}$が送っている

$\Delta t' = K\Delta t$



$\mathcal{O}'$が送っている

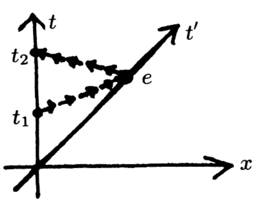
$\Delta t = K\Delta t'$

上の図から次のことがわかる. $\mathcal{O}$ が2つのシグナルを Δt の時間の間隔で送ったとすると, $\mathcal{O}'$ は $K\Delta t$ の間隔をおいて受け取る. ここで, 定数 K は

$$\boxed{\frac{\Delta(\text{受け取った時間})}{\Delta(\text{発した時間})} = K}$$

である. 相対論の最初の原理を用いれば, $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ ($\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}'$ へ送る) も $\mathcal{O}' \longrightarrow \mathcal{O}$ も同じ定数 K をもつことになる. 実際, K は $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ の相対速度の関数である. ([BO] を見よ. これは Bondi の K–calculus である.)

ここで K を求めてみよう.



$$e = [t_2, t_1]$$
$$e' = [t', t']$$

$\mathcal{O}'$ の時間軸の点 e を考えてみる. $\mathcal{O}$ の視点からは $e=[t_2,t_1]$ となり, $\mathcal{O}'$ から見れば $e'=[t',t']$ と表される.

($\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ が同時刻を表す時計をもっているとすると,)

$$t' = Kt_1, \qquad t_2 = Kt'$$

となり, $t_2 = K^2 t_1$ となる. さらに, $\mathcal{O}$ から見た時空座標 x, t を用いると,

$$t_2 = t + x, \quad t_1 = t - x$$

であるから,

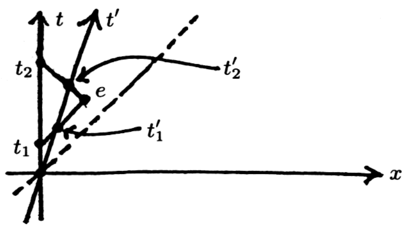
$$t + x = K^2(t - x) \implies 1 + (x/t) = K^2(1 - (x/t))$$

である. ここで, $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ の相対速度 v を用いると, $1 + v = K^2(1 - v)$ となり,

$$K = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

となる.

次に, K を用いて一般的な座標変換を定めてみる.



事象 e が $\mathcal{O}'$ の時間軸上で起こるのではなく, $\mathcal{O}$ が時刻 t_1 でシグナルを発して $\mathcal{O}'$ を時刻 t_1' ($\mathcal{O}'$ で測ったもの) で通り過ぎ, e で反射して再び $\mathcal{O}'$ を時刻 t_2' で通り過ぎ, $\mathcal{O}$ が時刻 t_2 で受け取る. 上と同様の仮定を用いると,

$$t_1' = K t_1, \quad t_2 = K t_2'$$

となる. したがって,

$$[t_2', t_1'] = [K^{-1} t_2, K t_1]$$

である. これは, 光円錐座標における Lorentz 変換である.

K の速度の式と, 等式

$$\begin{aligned} t_2 &= t + x, & t_2' &= t' + x', \\ t_1 &= t - x, & t_1' &= t' - x' \end{aligned}$$

の助けを借りると, この Lorentz 変換の式を通常の座標に移すのは容易なことである. ここでは, 次に示すようなもっとより代数的なアプローチ [LK17], [LK30] を選択しよう.

1. $[K^{-1} t_2, K t_1]$ を以下の式によって与えられる積構造により得られたものと考える:

$$[A, B] * [C, D] = [AC, BD].$$

したがって, $[K^{-1}, K] * [t_2, t_1] = [K^{-1}t_2, Kt_1] = [t_2', t_1']$ となり, Lorentz 変換は積で表されたことになる. これを**反復代数** (iterant algebra [LK17]) とよぶ.

2. $[K^{-1}, K] = [X + T, -X + T] = T1 + X\sigma$ と書き直してみる. すると,

$$T + X\sigma = \frac{1 + (X/T)\sigma}{\sqrt{1 - (X/T)^2}}$$

$$(T^2 - X^2 = K^{-1}K = 1 \Longrightarrow \sqrt{T^2 - X^2} = 1)$$

$$\Longrightarrow T\sqrt{1 - (X/T)^2} = 1,$$

かつ, $v = -(X/T)$ が次のようにして成立する.

$$K = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} \Longrightarrow T + X = \sqrt{\frac{1-v}{1+v}}, \quad T - X = \sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

$$\Longrightarrow \frac{1 + (X/T)}{1 - (X/T)} = \frac{\sqrt{(1-v)/(1+v)}}{\sqrt{(1+v)/(1-v)}} = \frac{1-v}{1+v}$$

$$\therefore \quad \boxed{[K^{-1}, K] = \frac{1 - v\sigma}{\sqrt{1 - v^2}}}$$

この反復代数を用いると次が得られる:

$$1^2 = [1, 1] * [1, 1] = [1, 1] = 1$$

$$\sigma^2 = \sigma * \sigma = [1, -1] * [1, -1] = [1, 1] = 1$$

$$1 * \sigma = \sigma * 1 = \sigma.$$

したがって,

$$[t_2', t_1'] = [K^{-1}, K] * [t_2, t_1]$$

$$\Updownarrow$$

$$t' + x'\sigma = \left(\frac{t - xv}{\sqrt{1 - v^2}}\right) + \left(\frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}\right)\sigma.$$

よって, 次が成り立つ:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} t' & = & (t - xv)/\sqrt{1 - v^2} \\ x' & = & (x - vt)/\sqrt{1 - v^2} \end{array}}$$

これは光の速度を 1 とおいたときの Lorentz 変換の古典的な形である.

注意. Lorentz 変換を導いたのだが, $t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2$, すなわち, Lorentz 変換が $t^2 - x^2$ を不変とする線形変換群であることに注意されたい. このことは上記の方法によっても得られる. $t_2' t_1' = K^{-1} t_2 K t_1 = t_2 t_1$ より,

$$(t' + x')(t' - x') = (t + x)(t - x)$$
$$\therefore \quad t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2.$$

相対論を簡単に述べたが, これは, スピンや角運動量の議論に結びついていく. すなわち, **Pauli 行列の代数が Lorentz 群との関係から自然に生じてくるのである.** まずこれまで考えてきたことを, ユークリッドの空間的な方向や位置で考え直さなければならない. 空間の次元を n , 時空の次元を $n+1$ とし, σ_0 を時間の方向, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$ を空間の基底とする. したがって, 次のように同一視する:

$$\sigma_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0)$$
$$\sigma_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0)$$
$$\vdots$$
$$\sigma_n = (0, 0, 0, \cdots, 1).$$

$\sigma = a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + \cdots + a_n\sigma_n$ によってユークリッド空間内の大きさ 1 の方向を表すことにすると, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$ である.

$t\sigma_0 + x\sigma_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ と $t\sigma_0 + x\sigma$ がこれらの与えられた方向によって時空における点を表すという仮定により,

1) $\sigma_i^2 = 1 \qquad (i = 1, \cdots, n)$
2) $\sigma^2 = 1$

が**与えられる**. (空間の方向が与えられると, 今まで見てきたような構造をもつ 2 次元の時空が生じるのである.)

ここで, σ^2 を計算してみる:

$$\sigma^2 = (a_1\sigma_1 + \cdots + a_n\sigma_n)(a_1\sigma_1 + \cdots + a_n\sigma_n)$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \sigma_i \sigma_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i<j} a_i a_j (\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i)$$

$$\therefore \quad \sigma^2 = 1 + \sum_{i<j} a_i a_j (\sigma_i\sigma_j + \sigma_j\sigma_i)$$

ところで, $a_1^2+\cdots+a_n^2=1$ となるように $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ を選んでおいたのだから, $\sigma^2=1$ となり, この計算により,

$$\sigma_i\sigma_j=-\sigma_j\sigma_i \qquad (i\neq j)$$

となる.

次に, 4 次元の時空の場合を調べてみよう. まず, 次式を得る:

$$e=t\sigma_0+x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3.$$

$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ を Pauli 行列としてとると,

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}, \qquad \sigma_2=\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}, \qquad \sigma_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

となる. 時空の点 $e=t\sigma_0+x\sigma_1+y\sigma_2+z\sigma_3$ は 2×2 エルミート行列で次のように表される:

$$\begin{aligned} e &= t\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+x\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}t+x & iy+z\\ -iy+z & t-x\end{bmatrix}. \end{aligned}$$

この e の行列式が時空の距離である:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(e) &= \begin{vmatrix}t+x & iy+z\\ -iy+z & t-x\end{vmatrix}\\ &= t^2-x^2-y^2-z^2. \end{aligned}$$

このことにより, Lorentz 変換の群に対して簡単な説明をつけることができる.

ここでは, 2 次形式 $t^2-x^2-y^2-z^2$ を不変とする $\mathbf{R}^4=\{(t,x,y,z)\}$ の線形変換の構成を考えたい. エルミート表現を

$$e=\begin{bmatrix}A & W\\ \overline{W} & B\end{bmatrix}$$

とおく. ここで, A,B は実数, W は複素数であり, $\overline{W}$ は複素共役を表している. P を $\mathrm{Det}(P)=1$ を満たす複素 2×2 行列とする. このような行列の全体は $SL(2,\mathbf{C})$ とよばれている. $(PeP^*)^*=Pe^*P^*=PeP^*$ であるから, PeP^* はエルミート行列になる. さらに次が成り立つ:

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(PeP^*) &= \mathrm{Det}(P)\mathrm{Det}(e)\mathrm{Det}(P^*)\\ &= \mathrm{Det}(P)\mathrm{Det}(e)\mathrm{Det}(P)\\ &= \mathrm{Det}(e). \end{aligned}$$

したがって, $\mathcal{L}$ を Lorentz 変換群とするとき, $\pi : SL(2, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathcal{L}$ という 2 対 1 写像を示したのである.

この Lorentz 変換を含む群は, ここで考えている方向の変換

$$[A, B] \longrightarrow [K^{-1}A, KB]$$

をも含んでいるのである. これは次のように対応させることによって得られる:

$$[A, B] = [T+X, T-X] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad [K^{-1}A, KB] \longleftrightarrow \begin{bmatrix} K^{-1}A & O \\ O & KB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{K} & O \\ O & \sqrt{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{K} & O \\ O & \sqrt{K} \end{bmatrix}.$$

4 元数による表現.

Pauli 行列と 4 元数はたいへん関連が深い. 4 元数体においては, 3 つの独立な直交単位行列 i, j, k があり, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ である. ベクトル $1, i, j, k$ は 4 次元実空間 $\mathbf{R}^4$ の基底を構成しており, $\mathbf{R}^4$ に結合代数の構造が入ることになる. Pauli 行列と 4 元数体の間の変換は以下のように与えられる:

$$i \longleftrightarrow -\sqrt{-1}\,\sigma_1 = -\sqrt{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{bmatrix}$$

$$j \longleftrightarrow -\sqrt{-1}\,\sigma_2 = -\sqrt{-1}\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k \longleftrightarrow -\sqrt{-1}\,\sigma_3 = -\sqrt{-1}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ -\sqrt{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 \longleftrightarrow 1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad a + bi + cj + dk \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a - b\sqrt{-1} & c - d\sqrt{-1} \\ -c - d\sqrt{-1} & a + b\sqrt{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z & W \\ -\overline{W} & \overline{Z} \end{bmatrix}$$

上の同一視により, **単位 4 元数**は

$$SU(2) = \left\{ \begin{bmatrix} Z & W \\ -\overline{W} & \overline{Z} \end{bmatrix} \middle| \begin{array}{c} Z\overline{Z} + W\overline{W} = 1 \\ Z, W \text{は複素数} \end{array} \right\}$$

と同型になることがわかる.

このアプローチにより, 時空の点が 4 元数で表されることになる. さらに, 次のようにおくと, なおいっそう扱いやすくなる:

$$\sqrt{-1}\,T + iX + jY + kZ = p.$$

このとき, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} p\overline{p} &= (\sqrt{-1}\,T + iX + jY + kZ)(\sqrt{-1}\,T - iX - jY - kZ) \\ &= -T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2. \end{aligned}$$

ここでは, $\sqrt{-1}$ が i, j, k と可換となるような複素数上の 4 元数を用いていることに注意されたい.

$p\overline{p}$ が Lorentz 距離を表しているのだから, Lorentz 変換は 4 元数的には次のように表される:

$$\boxed{T(p) = gpg. \text{ ここで } g = t + \sqrt{-1}\,v,\ ||v||^2 - t^2 = 1}$$

$$\begin{aligned} T(p)\overline{T(p)} &= gpg\overline{(gpg)} \qquad \boxed{g\overline{g} = 1} \\ &= gpg\overline{g}\,\overline{p}\,\overline{g} \\ &= gp(\sqrt{-1}\,t + v)(\sqrt{-1}\,t - v)\overline{p}\,\overline{g} \\ &= gp(-t^2 + ||v||^2)\overline{p}\,\overline{g} \\ &= gp\overline{p}\,\overline{g} \\ &= (p\overline{p})(g\overline{g}) \\ \therefore\ \ T(p)\overline{T(p)} &= p\overline{p}. \end{aligned}$$

ここで, どのような状況のもとで時空の点になるのかをはっきりさせなければならない.

$$g = t + \sqrt{-1}\,v = t + v_1\sigma_1 + v_2\sigma_2 + v_3\sigma_3$$

であり, $g^2 = (t^2 + v{\cdot}v) + \sqrt{-1}\,(2tv)$ が実際に Lorentz 変換を表すならば, gpg は $p = \sqrt{-1}\,t + q$ (q は v の方向) に対して作用することになる. もし $q \perp v$ ならば, $gqg = q$ となる. 以上の議論を次節の鏡映の取扱いと比較してみてほしい.

10節　4元数体, Cayley数とベルト・トリック

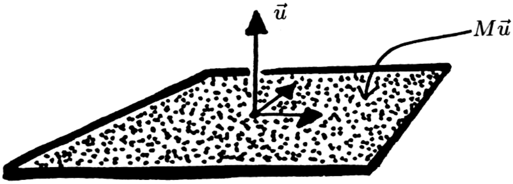
最初は, 4元数体を鏡映変換に反映させることによって展開しよう. それから, 紐トリックへ, またブレイドと紐のトポロジー的性質を織り込み, さらに代数へと進むことにしよう.

そこでまず, $\mathbf{R}^3$ **における鏡映 (reflection) の代数**から始める. $\vec{u} \in \mathbf{R}^3$ を単位ベクトルとする. $\mathbf{R}^3$ によって, 3次元ユークリッド空間を表す. したがって,

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^3 &= \{(x,y,z)|x,y,z\text{は実数}\},\\ \vec{u} &= (u_1,u_2,u_3),\end{aligned}$$

$\vec{u}$ が単位ベクトルとは, $||\vec{u}|| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2} = 1$ の意味.

この空間 $\mathbf{R}^3$ では内積 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ が定義されている. 各単位ベクトル $\vec{u}$ は, それと垂直な平面 $M\vec{u}$ を決定する:

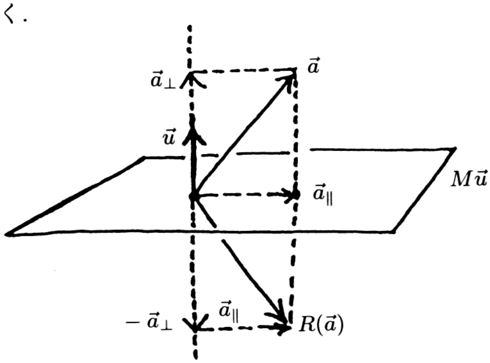


この平面 $M\vec{u}$ を鏡として用いるために, つまり, ベクトル $\vec{a}$ を $M\vec{u}$ について反射させるために, まず $\vec{a}$ を $M\vec{u}$ に垂直なベクトル $\vec{a}_\perp$ と $M\vec{u}$ と平行なベクトル $\vec{a}_\parallel$ に分解して $\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$ と書く.

すると, 鏡映は

$$R(\vec{a}) = -\vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$$

と表される.



また ($\vec{u}$ が単位ベクトルであるから),

$$\vec{a}_{\perp} = (\vec{a}\cdot\vec{u})\vec{u}$$

であり, したがって,

$$\vec{a}_{\parallel} = \vec{a} - (\vec{a}\cdot\vec{u})\vec{u}$$

であることがわかる. したがって,

$$\boxed{R(\vec{a}) = \vec{a} - 2(\vec{a}\cdot\vec{u})\vec{u}}$$

である. これは, 単位ベクトル $\vec{u}$ と垂直な平面に関する鏡映に対する特別な形式を与える.

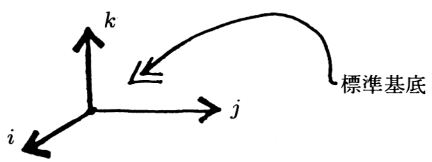
ここでは, **鏡映を 3 次元空間の点の代数構造によって表現したい**のである.

幾何を代数に変換するとき, 幾何学的な役割 (代数におけるちょっとした幾何) が変わることがある. 幾何において映されるものが, 代数においては鏡に相当する.

記号では,

$$R(X) = uXu$$

と表せる. ここで, X (これは幾何において**鏡によって作用されるもの**) は, そのどちら側にも u があって, **記法的には鏡**となる.



ここでは, uXu は u と垂直な平面に関する X の鏡像となってほしいので, 次が成り立つことが望まれる:

$$kkk = -k, \quad kjk = j, \quad kik = i.$$

この代数では結合律 (つまり, すべての a, b, c について, $(ab)c = a(bc)$) が成り立ち, また零でないベクトルは逆元をもつと仮定しよう. すると, $kkk = -k$ に k^{-1} を掛けることによって,

$$kk = -1, \quad kjk = j, \quad kik = i$$

を得る. さらに, 後の 2 つの等式に k を掛けることによって次を得る:

$$jk = -kj, \quad ik = -ki.$$

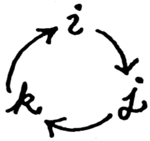
同じ議論が i および j に垂直な平面に関する鏡映にも適用することができる. し

たがって, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ が成り立ち, また実際, 同じ議論により任意の単位ベクトル u について $u^2 = -1$ となる.

$-1 \notin \mathbf{R}^3$ であるから, これはちょっと不思議に思えるかもしれない. 実際, ここでは, "スカラー" -1 を表す元 $(0,0,0,-1)$ をもつ $\mathbf{R}^4 = \{(x,y,z,t)\}$ を用いることが必要となることがわかる.

ところで, ij に関してはどうか? この計画によって影響されるのか? 与えられた仮定のもとでは影響はないが, これらの条件を満足するための一方法は, ベクトルの外積のパターンとしてよく知られている

$$ij = k$$
$$jk = i$$
$$ki = j$$



を使うことである. この代数

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

は, **Hamilton の 4 元数体** (Hamilton's Quaternions) である. これは, $\mathbf{H} = \mathbf{R}^4 = \{xi + yj + zk + t\}$ 上に構成される代数で, 結合律を満たし, また零でない要素は逆元をもつ. 実際,

$$q = t + ix + jy + kz,$$
$$\overline{q} = t - ix - jy - kz$$

と書けば, $q\overline{q} = \overline{q}q = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ である.

ところで, $ia + jb + kc \in \mathbf{R}^3$ の形をした要素は, (複素数における純虚数の類似で) **純 4 元数** (pure quaternion) といわれる.

$$X = iX_1 + jX_2 + kX_3, \qquad Y = iY_1 + jY_2 + kY_3$$

とすると, 4 元数積は次の公式で与えられる:

$$XY = -X_1Y_1 - X_2Y_2 - X_3Y_3 + \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{vmatrix} k - \begin{vmatrix} X_1 & X_3 \\ Y_1 & Y_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} X_2 & X_3 \\ Y_2 & Y_3 \end{vmatrix} i$$

$$\therefore\ XY = -(X \cdot Y) + (X \times Y).$$

ここで, $X \times Y$ は $\mathbf{R}^3$ におけるベクトルの外積である.

既に造ったように, -1 の純 4 元数としての平方根からなる 2 次元球面が存在することに注意されたい. つまり, もし $U \in \mathbf{R}^3$ とすると,

$$\begin{aligned} UU &= -U{\cdot}U + U \times U \\ \therefore\ U^2 &= -U{\cdot}U \\ \therefore\ U^2 &= -1 \quad \longleftrightarrow \quad U{\cdot}U = 1 \\ \therefore\ U^2 &= -1 \quad \longleftrightarrow \quad U \in S^2. \end{aligned}$$

ここで, S^2 は $\mathbf{R}^3$ において原点から単位距離にある点の集合を表す.

任意の 4 元数は, $a, b \in \mathbf{R}$ と $u \in S^2$ について, $a + bu$ の形に書ける. これは, $\mathbf{H}$ に一種の "球面回転 (spun)" 複素数のような外観を与える. というのは, $\mathbf{H}_u = \{a + bu | a, b \in \mathbf{R}, u$ は固定 $\}$ は $\mathbf{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbf{R}, i = \sqrt{-1}\}$ と同型であるからである. $\mathbf{H}_u$ における乗法は通常の複素数の乗法であるが, 異なる $\mathbf{H}_u$ の間の乗法は 4 元数の積公式に従っている.

4 元数の乗法のもう一つの重要な性質は, それが**ノルムを保存する**ことである. すなわち, $||q|| = q\overline{q}$ であって, $||qq'|| = ||q||\,||q'||$ が成り立つ. これは, もちろん, 簡単に確かめることができる:

$$\begin{aligned} ||qq'|| &= (qq')\overline{(qq')} \\ &= (qq')(\overline{q}'\overline{q}) \\ &= q(q'\overline{q}')\overline{q} \\ &= (q\overline{q})(q'\overline{q}') \\ \therefore\ \ ||qq'|| &= ||q||\,||q'||. \end{aligned}$$

ここでは, $\overline{qq'} = \overline{q}'\overline{q}$ という簡単に証明できる事実と, 乗法に関する結合律を使った.

4 元数がいかにして創られたかに関しては, 複素数 $\mathbf{C} = \{a + bi\}$ からスタートして, 新しい虚数 j ($j^2 = -1$) を加えて, $jZ = \overline{Z}j$ ($Z = a + ib, \overline{Z} = a - ib$) が成り立つようにし, 乗法が結合律を満たすようにしたものであると考えるのも一つの方法である. [すると, $k = ij$ で $k^2 = (ij)(ij) = i(ji)j = i(\overline{i}j)j = i(-ij)j = (i(-i))(jj) = (+1)(-1)\ \therefore\ k^2 = -1$ となり, 4 元数が常態にもどる.]

この手順はかなり危ない橋をわたっていることは, それを反復してみると明らかになる. **新しい要素 J を $\mathbf{H}$ につけ加えて, 新しい代数が結合律を満たし, 任意の $A \in \mathbf{H}$ について $JA = \overline{A}J$ となり, かつ J が逆元をもつようにしてみよ.** すると,

$$\begin{aligned} J(AB) &= (\overline{AB})J \\ &= (\overline{B}\,\overline{A})J \\ &= \overline{B}(\overline{A}J) \\ &= \overline{B}(J\overline{\overline{A}}) \\ &= \overline{B}(JA) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\overline{B}J)A \\
&= (J\overline{\overline{B}})A \\
&= (JB)A \\
J(AB) &= J(BA) \\
J^{-1}(J(AB)) &= J^{-1}(J(BA)) \\
(J^{-1}J)(AB) &= (J^{-1}J)(BA) \\
\therefore\ AB &= BA.
\end{aligned}
$$

これが任意の 4 元数 A と B に関して成り立たねばならないし, 一般に $\mathbf{H}$ においては $AB \neq BA$ であるから, 結合律は 4 元数体のこの拡大に関してはとても無理な要求であることがわかる.

ところで, 8 次元空間 $\mathbf{H} + J\mathbf{H}$ 上に構成され, $J^2 = -1, JZ = \overline{Z}J$ を満たす代数が実は存在し, **Cayley 数体**とよばれる. そこでは必然的に結合律が成り立たない. それでは, Cayley 数の乗法はどのように決めるのか? ここで Cayley 数余談をお届しよう.

Cayley 数余談

最初はちょっと抽象的な話から始める. まず, ノルム代数 $\mathcal{A}$ で考察することにしよう. ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ が与えられ, $\mathbf{R}^n$ には乗法構造 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ と共役の概念 $Z \mapsto \overline{Z}$ で $\overline{\overline{Z}} = Z$ となるものが備わっているものとする. ($\mathbf{R}$ 自身については, $\overline{r} = r$ である.) ユークリッドノルムは $||Z|| = Z\overline{Z}$ で与えられており, 乗法はノルムを保存する, つまり,

$$||ZW|| = ||Z||\,||W||$$

であると仮定する. (結合律を仮定することができないので, これは $||Z|| = Z\overline{Z}$ からは得られない.) そこで, **双線形形式**

$$[Z, W] = \frac{1}{2}(Z\overline{W} + \overline{Z}W)$$

を定義する. ($\overline{Z + W} = \overline{Z} + \overline{W}$ と仮定する.) 最後に, この代数上のノルムは

任意の X について　$[Z, X] = 0 \implies Z = 0$

が成り立つという意味で非退化 (non-degenerate) であると仮定する.

補題 10.1. $2[Z, W] = ||Z + W|| - ||Z|| - ||W||$.
証明. 容易. □

命題 10.2. (J.Conway[CON1])

(1) $[ac, bc] = [a, b][c]$
(2) $[ac, bd] + [ad, bc] = 2[a, b][c, d]$
(3) $[ac, b] = [a, b\bar{c}]$

ここで, a, b, c, d はこの代数 $\mathcal{A}$ の任意の元で $[a] = ||a||$ である.

証明.

$$
\begin{array}{c}
[(a+b)c] = [ac+bc] = [ac] + [bc] + 2[ac, bc] \\
\| \\
[a+b][c] = ([a] + [b] + 2[a, b])[c]
\end{array}
$$

$\Rightarrow [ac, bc] = [a, b][c]$, これで (1) が証明された.

(2) を証明するために, (1) において c を $(c+d)$ に置き換える:

$$
\begin{array}{ccccc}
[a, b][c+d] & = & [a(c+d), b(c+d)] & = & [ac+ad, bc+bd] \\
\| & & & & \\
[a, b]([c] + [d] + 2[c, d]). & & & &
\end{array}
$$

展開を続け, 項をまとめればよい.

(3) の証明のために, $2[c, 1] - c = (c \cdot \bar{1} + \bar{c} \cdot 1) - c = \bar{c}$ に注意し, (2) において $d = 1$ とおく. すると,

$$
\begin{aligned}
[ac, b] &= 2[a, b][c, 1] - [a, bc] \\
&= [a, b(2[c, 1] - c)] \\
&= [a, b\bar{c}].
\end{aligned}
$$

これで命題の証明を完了する. □

Conway の命題は, 次の性質

$$
\begin{array}{rcl}
[ab] & = & [a][b] \\
{[a, a]} & = & [a] \\
{[a, b][c]} & = & [ac, bc] \\
2[a, b][c, d] & = & [ac, bd] + [ad, bc] \\
{[ac, b]} & = & [a, b\bar{c}] \\
([a, bc] & = & [a\bar{c}, b], \quad [ac, b] = [c, \bar{a}b], \quad \text{等々})
\end{array}
$$

に加えて, 非退化性

$$
\boxed{\text{任意の } t \text{ について} \quad [Z, t] = [W, t] \implies Z = W}
$$

を, 乗法の特別な性質を探すために利用できることを示している. まず, 次を注視されたい:

(1) $\overline{\overline{x}} = x$

証明.

$$[x,t] = [1, t\overline{x}] = [1 \cdot \overline{\overline{x}}, t]$$
$$\therefore\ [x,t] = [\overline{\overline{x}}, t]$$
$$\therefore\ x = \overline{\overline{x}}.$$
□

(2) $\overline{ab} = \overline{b}\,\overline{a}$

証明.

$$[ab,t] = [a, t\overline{b}] = [\overline{t}a, \overline{b}]$$
$$\therefore\ [ab,t] = [\overline{t}, \overline{b}\,\overline{a}]$$
$$[ab,t] = [1(ab), t] = [1, t\overline{(ab)}] = [\overline{t}, \overline{ab}]$$
$$\therefore\ [\overline{t}, \overline{b}\,\overline{a}] = [\overline{t}, \overline{ab}]$$
$$\therefore\ \overline{b}\,\overline{a} = \overline{ab}.$$
□

ここで, H を $[\ ,\ ]$ が非退化であるような部分代数とし, $J \perp H$ となる J が存在すると仮定する. (ここで, $\perp$ は任意の $h \in H$ について $[h, J] = 0$ を意味する. すなわち, $h\overline{J} + J\overline{h} = 0$ であり, したがって (とりあえず $\overline{J} = -J$ という仮定のもとで) $J\overline{h} = hJ$ である. これは, 以前の拡張のアイデアであった. ここでは垂直性が幾何的に具体化されている.) $[J] = 1$ と仮定する.

定理 10.3. 上記の条件のもとで, $H + JH$ は与えられた代数 $\mathcal{A}$ の部分代数であり, $H \perp JH$ である. さらに, $a, b, c, d \in H$ とすると, 次が成り立つ:

$$(a + Jb)(c + Jd) = (ac - d\overline{b}) + J(cb + \overline{a}d).$$

注意. もし H が 4 元数体 $\mathbf{H}$ ならば, これは Cayley の乗法を明確に述べている.

証明. $J \perp H$ $(1 \in H)$ だから, $\overline{J} = 2[J, 1] - J = -J$ であることに注意する.

$$[a, Jb] = [a\overline{b}, J] \qquad (\forall a, b \in H)$$

$$\therefore\ H \perp JH.$$

また,

$$[Ja, Jb] = [J][a,b] = [a,b]$$

$$\therefore\ JH \text{は}\ H \text{と同型である}.$$

主張 1. $aJ = J\overline{a} \quad (\forall a \in H)$

証明.

$$[aJ, t] = [J, \overline{a}t] = 2[J, \overline{a}][1, t] - [Jt, \overline{a}]$$

$$([ac, bd] = 2[a, b][c, d] - [ad, bc])$$

$$\therefore\ [aJ, t] = -[Jt, \overline{a}] = -[t, \overline{J}\overline{a}] = [t, J\overline{a}] = [J\overline{a}, t].$$

□

主張 2. $(Jb)c = J(bc)$

証明.

$$[(Jb)c, t] = [Jb, t\overline{c}] = [\overline{b}J, t\overline{c}]$$

$$= -[\overline{b}\overline{c}, tJ] \quad (\text{上と同じように})$$

$$= [(\overline{b}\overline{c})J, t]$$

$$\therefore\ (Jb)c = (\overline{b}\overline{c})J = J\overline{(\overline{b}\overline{c})}$$

$$\therefore\ (Jb)c = J(bc).$$

□

主張 3. $a(Jb) = J(\overline{a}b)$

証明.

$$[a(Jb), t] = [Jb, \overline{a}t]$$

$$= -[Jt, \overline{a}b] \quad (\text{垂直性により})$$

$$= [t, J(\overline{a}b)]$$

$$\therefore\ a(Jb) = J(\overline{a}b).$$

□

主張 4. $(Ja)(Jb) = -b\overline{a}$

証明.

$$[(Ja)(Jb), t] = [Jb, (\overline{Ja})t] = [\overline{b}J, (\overline{Ja})t] = -[\overline{b}t, (\overline{Ja})J]$$

$$= -[(\overline{b}t)\overline{J}, \overline{Ja}] = -[(\overline{b}t)\overline{J}, \overline{a}\overline{J}] = -[\overline{b}t, \overline{a}][\overline{J}]$$

$$= -[t, b\overline{a}]$$

$$\therefore\ (Ja)(Jb) = -b\overline{a}.$$

□

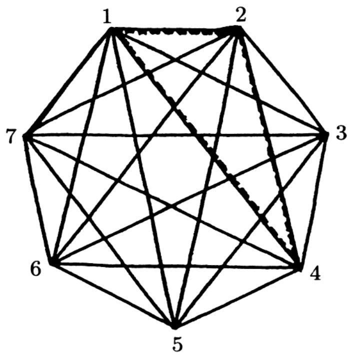
実数体 **R** から始めて, この構成法を繰り返して適用することにより,

R	$\hookrightarrow$	**C**	$\hookrightarrow$	**H**	$\hookrightarrow$	**K**
実数体		複素数体		4 元数体		Cayley 数体

を得る. 各段階で抽象的構造のある要素が失われる. **R** から **C** へ移るとき, 順序 (order) が消えてしまう. **C** から **H** へ移るとき, 可換性が消えてしまう. Cayley 数体 **K** では結合律が失われる. 最後に, この定理の過程を **K** 自身に適用するとき, その議論は単純に崩れてしまう. したがって, **R** ⊂ **C** ⊂ **H** ⊂ **K** は唯一の非退化ノルム代数の列である. (この事実は [HU] において初めて証明された.)

状況はこれよりももっと深い. ユークリッド空間上の (必然的にノルム的ではない) 多元体 (division algebra) でお目にかかることができ, それらの次元も 1, 2, 4, 8 であることがわかる. しかし, この結果は代数的トポロジーの理論に関する深い知識を必要とする (説明は [A1] を参照されたい).

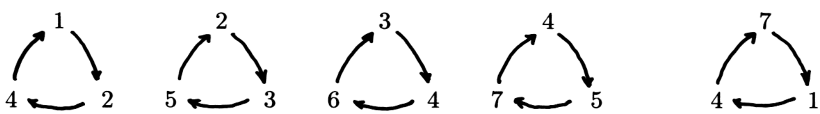
演習問題.



K の基底として, $\{1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ で次を満たすものが存在することを証明せよ:

$$e_i^2 = -1, \qquad e_ie_j = -e_je_i \quad (i \neq j)$$

かつ,



$$e_1e_2 = e_4 \quad e_2e_3 = e_5 \quad e_3e_4 = e_6 \quad e_4e_5 = e_7 \quad \cdots \quad e_7e_1 = e_3$$

$e_ie_{i+1} = e_{i+3}$ (添字は 7 を法とする)

これで Cayley 数に関する余談を終りにする.

回転と鏡映

これまでは, 4 元数体を鏡映の表現のために利用した. $R_u : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ を, 単位ベクトル $u \in S^2$ と垂直な平面に関する鏡映とすると,

$$R(p) = R_u(p) = upu$$

は鏡映の 4 元数版の公式である.

このことは, 枠 $\{i, j, k\}$ に関しては証明した. これを一般的に示すために, $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ を $\mathbf{R}^3$ における正規直交ベクトルの右手系の枠とする. すると,

($\vec{u}_i \cdot \vec{u}_j = 0\,(i \neq j), \vec{u}_i \cdot \vec{u}_i = 1, \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \vec{u}_3$ 等々を用いることによって) 4 元数として, $\vec{u}_1^2 = \vec{u}_2^2 = \vec{u}_3^2 = \vec{u}_1\vec{u}_2\vec{u}_3 = -1$ がわかる. したがって, この公式は任意の枠に関して, また任意の単位ベクトルについて, 成立するであろう.

本節のはじめに示したように, 鏡映は直接の公式

$$R(p) = p - 2(u \cdot p)u$$

によって与えられることも知っている. したがって, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} p - 2(u \cdot p)u &= upu \\ &= (-u \cdot p + u \times p)u \\ &= -(u \cdot p)u - (u \times p) \cdot u + (u \times p) \times u \\ \therefore \quad p - 2(u \cdot p)u &= -(u \cdot p)u + (u \times p) \times u \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \boxed{p - (u \cdot p)u = (u \times p) \times u}$$

これは, よく知られたベクトル 3 重積に関する公式の "鏡映による証明" である.

注意. ベクトルの外積が非結合的な乗法であることに注意することは重要なことである. つまり,

$$i \times (i \times j) = i \times k = -j, \qquad (i \times i) \times j = 0 \times j = 0$$

である. 4 元数代数の結合性はベクトルの外積に関する特別な関係を引き起こす.

ここで, 鏡映から回転に話題を移そう. **3 次元空間のどんな回転も 2 つの鏡映の合成で実現される.** もし 2 つの平面 M_1, M_2 が角度 θ で交わっているとすると, M_1 に関する鏡映に続いて M_2 に関する鏡映を行った合成の結果としての回転は, これら 2 つの平面の交線を軸とする角 2θ の回転である. 図 10.1 を見よ.

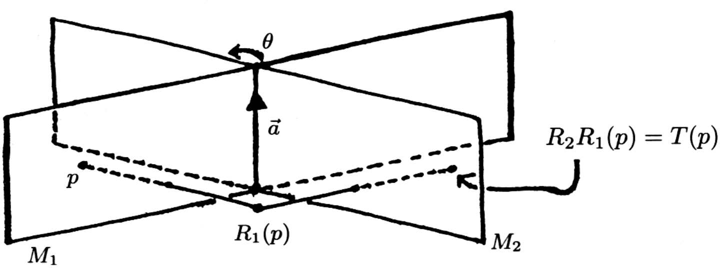


図 10.1 $T = R_2R_1$ **は** $\vec{a}$ **に関する角** 2θ **の回転**

さて, 2 つの鏡映の積の代数について試してみよう. $u, v \in S^2$ とすると, ベクトル $u \times v$ は, それぞれ, u と v に垂直なベクトルからなる平面 M_u と M_v の共通部分の軸である. したがって, $\theta = (u$ と vのつくる角$) = \cos^{-1}(u \cdot v)$ について, $R_v \circ R_u = T$ が $u \times v$ に関する角 2θ の回転であることが期待される. また, 次も成り立つ:

$$T(p) = R_u(R_v(p)) = u(vpv)u = (uv)p(vu).$$

そこで $g = uv = -(u \cdot v) + u \times v$ とおき, $vu = -(v \cdot u) + v \times u = +\overline{uv} = \overline{g} = g^{-1}$ に注意すると, $T(p) = gp\overline{g} = gpg^{-1}$ となる. ここで,

$$g = -\cos(\theta) - \sin(\theta)w, \qquad w = (u \times v)/||u \times v||$$

である. ここで,

$$gpg^{-1} = (-g)p(-g)^{-1}$$

であるから, 大域的なマイナス符号は無関係である. したがって, 次が成り立つ.

命題 10.4. 単位 4 元数 $u \in S^2$ について, $g = (\cos\theta) + (\sin\theta)u$ とする. このとき, $T(p) = gpg^{-1} = gp\overline{g}$ は写像 $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ ($\mathbf{R}^3$ は純 4 元数の集合) を定義し, T **は** u **を軸とする角** 2θ **の回転である.** □

さらにもっと抽象的にいえば, これは $\pi(g)(p) = gpg^{-1}$ によって定義される 2 対 1 の写像 $\pi : S^3 \longrightarrow SO(3)$ が存在することを示している. ここで, S^3 は $\mathbf{H} = \mathbf{R}^4$ におけるすべての単位長さの 4 元数の集合を表す. これは 3 次元球面

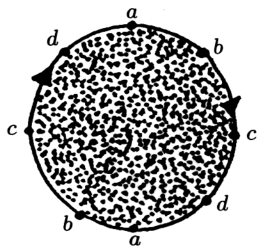
$$S^3 = \{ai + bj + ck + t \,|\, a^2 + b^2 + c^2 + t^2 = 1\}$$

である. S^3 の任意の元は, 元 $u \in S^2 \subset \mathbf{R}^3$ を用いて $g = e^{u\theta} = (\cos\theta) + (\sin\theta)u$ と表すことができる. 任意の 4 元数 $q, q' \in \mathbf{H}$ について $||qq'|| = ||q||\,||q'||$ であるから, S^3 は乗法に関して閉じていることがわかる. したがって, S^3 は群であり, これは S^3 上の Lie 群構造である. $SO(3)$ は, $\mathbf{R}^3$ 上の向きを保存する直交線形変換のつくる群であり, したがって, $\mathbf{R}^3$ の回転のつくる群である.

写像 $\pi : S^3 \longrightarrow SO(3)$ は, $\pi(g) = \pi(-g)$ であるから, 2 対 1 である. **トポロジー的には,** $SO(3)$ **は** S^3 **において対心点を同一視して得られる等化空間である.** トポロジストの会話では, この事実は次のようにいわれる: $SO(3)$ は $\mathbf{RP}^3$ と同相である; $\mathbf{RP}^3$ = 実 3 次元射影空間 = $\mathbf{R}^4$ においてその原点を通る直線からなる空間 = 3 次元球面 S^3 で対心点を同一視して得られる空間.

注意. 一般に, $\mathbf{RP}^n$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ においてその原点を通る直線からなる空間であり, 2 重被覆射影 $\pi : S^n \longrightarrow \mathbf{RP}^n$ が存在する. 歴史的には, 射影空間という言葉は射

影幾何からやってきた. したがって, $\mathbf{RP}^2 = S^2/$(対心点の同一視) は, **円盤** D^2 **からその境界上の点の対心点の同一視 (つまり, 中心に関して対称である点どうしの同一視) によって得られるもの**と同相である.



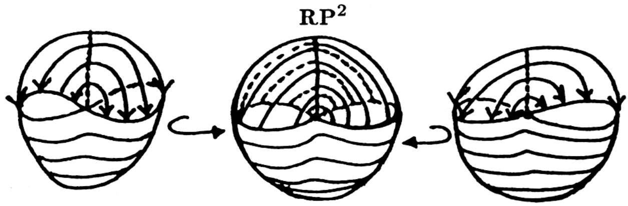
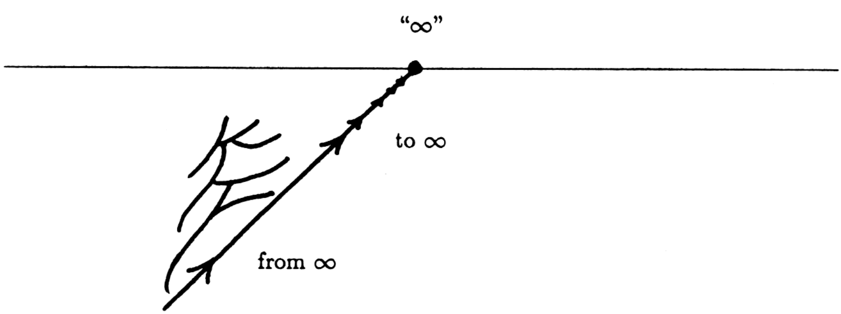


図 10.2

これは奇妙な空間であるが, 射影幾何において, **平面に無限遠点の円周をつけ加えることによる平面の完備化**として自然に発生する. この完備化においては, 原点を通る任意の光線に沿って外に向かって旅をすると, ∞ を通り抜けてその光線の負の方向から戻ってくることになる.



演習問題. $SO(3) \cong D^3/\sim$ を直接証明せよ. ただし, D^3 は 3 次元球体を表し, $\sim$ はその境界上の点の対心点の同一視を表す. [ヒント: D^3 の半径を π とする. $\vec{v} \in D^3$ に対して, $\vec{v}$ に関する $||\vec{v}||$ ラジアンの (右手系の) 回転を対応させよ.]

ちょっとの間, 射影平面 $\mathbf{RP}^2$ に戻ろう. これは, 球の表面とかドーナツの表面のような閉曲面であるが, この曲面は特異点をもたないようには 3 次元空間内に埋め込めない (ことが証明される). もし円盤の境界を, 対心点の同一視によって, 縫い合わせようとすると, 難しさのいくつかは自ずから現れる:



この縫い合わせのプロセスを 2 つの区間を同一視することから始めると, 上のようにメービウスの帯 $\mathcal{M}$ ができる. 射影平面において, 無限遠点を通り抜けて戻ってくると, ひねりを伴って戻る. 3 次元射影空間においては, 同じプロセスはあなたの利き腕を入れ換えるであろう. このような考察の原点はおそらくメービウスの帯であろう. メービウスの帯は, 無限から捉えられ, 有界な空間にもたらされた産物なのである.

メービウスの帯 $\mathcal{M}$ から射影平面 $\mathbf{RP}^2$ を完成させるには, 円盤をその境界円周に沿ってメービウスの帯の唯一の境界成分に縫い合わせるとよい. (図 10.3)



図 10.3　$\mathbf{RP}^2$ を造るための指示

この表現方法 $\mathbf{RP}^2 = \mathcal{M} \cup D^2$ は, $\mathbf{RP}^2$ のトポロジーの研究に対してとてもよい図を提供してくれる. 特に, $\mathbf{RP}^2$ 上のループ α で, それ自身は 1 点に縮まないが, $\alpha^2 =$ "α上を 2 度辿る曲線" は 1 点に縮むものを, みわけてみよう. このループ α は帯 $\mathcal{M}$ の中心線であり, α^2 は $\mathcal{M}$ の境界である ($\mathcal{M}$ の境界に沿って一周すると, $\mathcal{M}$ を 2 度まわる). 曲線 α^2 は 1 点に縮む. なぜならば, それは縫い合わせた円盤 D^2 の境界と同一視されるからである. (α は基本群 $\pi_1(\mathbf{RP}^2)$ の生成元であり, $\pi_1(\mathbf{RP}^2) \cong \mathbf{Z}_2$ である.)

同じ効果が $\mathbf{RP}^3$ において, したがって $SO(3)$ においても起こる. $SO(3)$ 上の**ループ α で, それ自身は 1 点に縮まないが, α^2 は 1 点に縮むものが存在する.** (北極とよばれる) $\vec{n}$ を軸とする角 θ の回転を $r(\theta, \vec{n})$ とすると, このループは $\alpha(t) = r(2\pi t, \vec{n})$ となるようにとれる. 各 $\alpha(t)$ は回転で, $\alpha(0) = \alpha(1) =$ 恒等写像

であることに注意してほしい.

与えられたこのような回転のループ α について, t が 0 から 1 までを動くに従って, $\alpha(t)$ の作用の像を明確にすることにより, その幾何とトポロジーを調べることができる. そのために, $\alpha : S^2 \times [0,1] \longrightarrow S^2 \times [0,1]$ を

$$\widehat{\alpha}(p,t) = (\alpha(t)p, t)$$

によって定義する. $S^2 \times [0,1]$ が, 外側にある大きな 2 次元球面 S^2 と内側にある小さな S^2 の間にある 3 次元の環状領域として, 目に見えるならば (図 10.4 を見られたい), $\widehat{\alpha} : S^2 \times [0,1] \longrightarrow S^2 \times [0,1]$ の作用は, 帯 $B \subset S^2 \times [0,1]$ の像を考察することによって説明することができる. ここで, A は北極を通る S^2 上の弧であり, $B = A \times [0,1]$ である. $\alpha(t)$ は北極に関する $2\pi t$ 回転であるから, この帯は $\widehat{\alpha}$ によって 2π だけ捻られる. また, $\widehat{\alpha}^2$ は恒等写像に変形できるという事実から, $\widehat{\alpha}^2(B)$ (= 4πだけ捻った帯) をその端を固定したまま $S^2 \times [0,1]$ の中で変形して, **そのすべての捻りを取り除くことができる.**

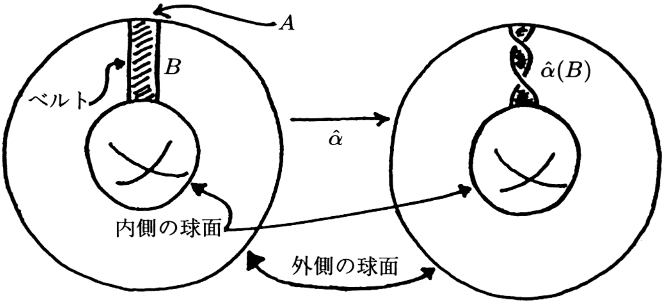


図 10.4

これは, $SO(3)$ のトポロジー的構造を基礎にした "理論的な予言" である. 実際, この予言は, 図 10.5 で示されたように "経験的に証明" することができる. これは, トポロジスト達には**ベルト・トリック** (belt trick) として, 物理学者達には **Dirac の紐トリック** (Dirac string trick) として知られているものである.

紐トリックと言われるもう一つのゆえんはこれである. 部屋の中央にたくさんの紐で床や天井や壁につながれ釣り下げられた球を想像していただきたい. 球を 2π だけ回転させると紐は絡まり, 4π の回転をさせると見かけ上は紐はさらに絡まる. しかし 4π の回転については, すべての紐は, 壁とか球面とのつなぎ部分を取り除くことなく, また球を動かすことなく, 絡みがなくなってしまう.

スピンをもつ粒子は, 周囲に紐がくっついたこの球のようなものである. その振幅は 2π 回転のもとで変化し, 4π 回転のもとでもとに戻る. Feynman [FE1] と比

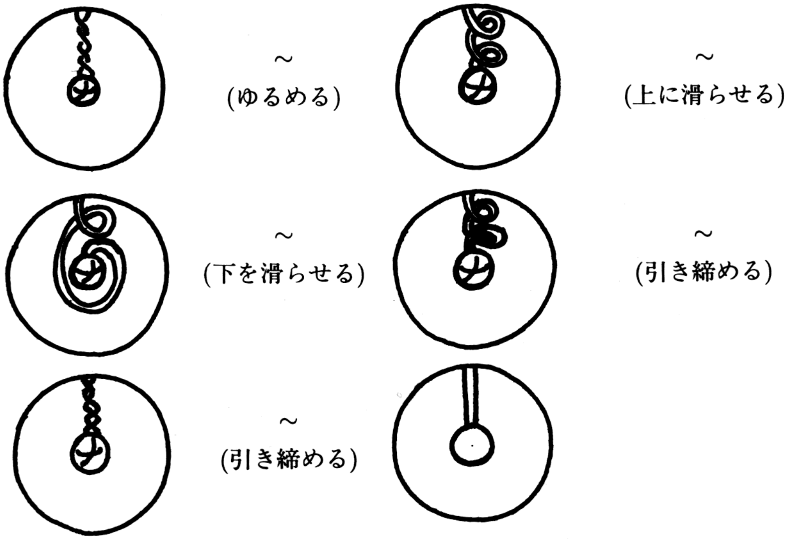


図 10.5

較されたい.

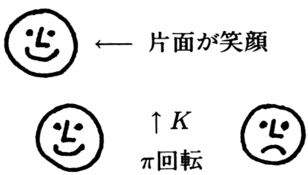
4 元数群

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

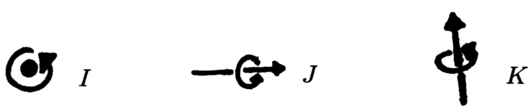
の構造は, Klein の 4 元群 (Klein 4–group)

$$I^2 = J^2 = K^2 = 1, \qquad IJ = JI = K$$

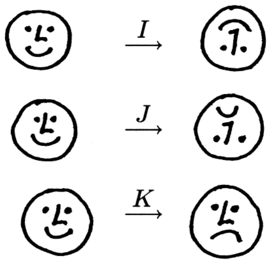
の円盤–表現に紐をつけることによって, 目に見えるようにすることができる. これを見るために, 片面が笑顔でもう片面が苦い顔を描いた円盤を用意する.



そこで, I でこのページに垂直な軸に関する π 回転を表す. J を水平な軸に関する π 回転とし, K を鉛直な軸に関する π 回転とする.



すると, これらの作用をこの円盤に適用して, 次を得る:



また, $I^2 = J^2 = K^2 = 1$ と $IJ = JI = K$ が成り立つことも容易にわかる. ただし, これらの等式は, この円盤に対する作用の結果が等しいという意味である.

ここでこの円盤に紐を取り付け, あやつり人形を作ると, 2π 回転はもつれた紐を残す. i, j, k を前と同じ特別な回転とし, これらをあやつり人形に適用してみる.

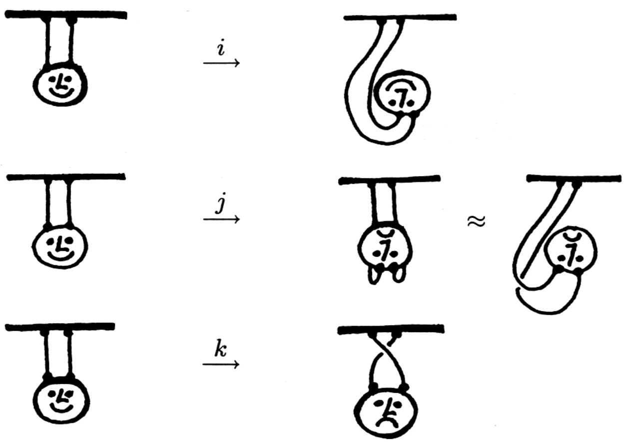
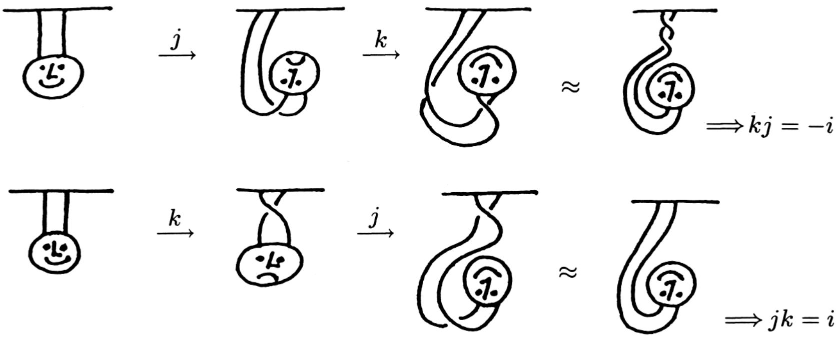


図 10.6

既に見たように, 紐の 2π 捻りは存在するので, k^2 はもはや 1 ではない. 同じことが i^2 と j^2 についてもいえる. したがって, 紐の $(\pm 2\pi)$ 捻りを -1 と同一視し, またベルト・トリックにより $(i^2)^2 = (j^2)^2 = (k^2)^2 = 1$ だから, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ とおく. もし $\pm 2\pi$ 捻りが -1 ならば, $\pm\pi$ 捻りを $\pm\sqrt{-1}$ と同一視することができる. また, これは 3 つの実在の元 i, j, k のすべてに対してなされる. さらに, $\bar{i} = -i$, $\bar{j} = -j$, $\bar{k} = -k$ はすべて, 回転を逆にするか, 交差を交換するか, あるいは紐に $\pm 2\pi$ 捻りを加えるかのいずれかを施すことによって得られることに注意する.

残りの 4 元数の関係も同じように表現される:



したがって, あやつり人形は実際に 4 元数の関係を再現する. このような方法による図形的な状況は以前に取り扱った図式代数に似ており, そこでは別の紐トリックが Temperley-Lieb 代数における関係を産みだした.

紐トリックの可能な拡張に関するもう一つのコメントは, Cayley 数との関係の中に現れる. これまでに見たように, Cayley 数の乗法構造は, $i, j, k, -1$ の間の積を与えて, J を加えて $Jz = \bar{z}J, J^2 = -1$ となるように定めた. **Cayley 数の紐トリックによる解釈は存在するか?**

命題 10.4 への回帰

命題 10.4 へ戻ろう. これは, $\mathbf{R}^3 = \{xi + yj + zk | x, y, z \text{は実数}\}$ の回転を 4 元数を用いていかにして表現するかを示している. u を $\mathbf{R}^3$ における単位長さの 4 元数とするとき, $g = e^{u\theta} = (\cos\theta) + (\sin\theta)u$ について, $T(g) = gp\bar{g}$ によって定義される写像 $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ は u を軸とする角 2θ の回転である. この表現の魅力の一つは, 2 つの回転の合成の軸と回転角を計算できることである. いま, 2 つの回転 $g = e^{u\theta}$ と $g' = e^{u'\theta'}$ が与えられたとすると, $T_{g'}(T_g(p)) = g'gp\bar{g}\overline{g'} = (g'g)p\overline{(g'g)}$. したがって, $T_{g'} \circ T_g = T_{g'g}$.

これは, $g'g$ を $e^{u''\theta''}$ の形に書き換えたとすると, u'' がこの合成の軸であり, $2\theta''$ が回転角であることを意味する. 例えば,

$$g = e^{k\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k$$

は, k を軸とする $\pi/2$ 回転である. そして,

$$g = e^{j\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j$$

は, j を軸とする $\pi/2$ 回転に対応する.

$$g'g = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}j\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}k\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1+j)(1+k)$$

$$= \frac{1}{2}(1+j+k+jk)$$

$$= \frac{1}{2}(1+j+k+i)$$

$$\therefore\ g'g = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{i+j+k}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\therefore\ g'g = e^{((i+j+k)/\sqrt{3})\pi/3}.$$

したがって, 直交する軸 j と k に関する 2 つの $\pi/2$ 回転の合成は, 対角軸 (i, j, k と等角な直線) の周りの $2\pi/3$ 回転である. 図 10.7 は, 回転する立方体を描くことによって, これを直接的に説明している.

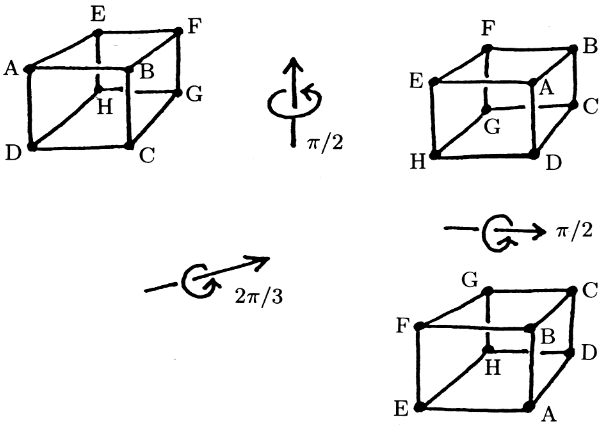


図 10.7

これで, 4 元数, Cayley 数, 結び目そして紐の解説に関する本節を終る. これらの構造が, 空間における鏡映の代数的構造のモデルを探すことによって, 自然に発生することを示した. このモデルにおいて, 幾何は代数の中に映し出され, 映された幾何的な点は, 鏡となる平面の表現に対する記法的な鏡となる: すなわち, u を鏡となる平面に垂直な単位ベクトルとするとき, $R(p) = upu$.

エピローグ. 本節は, ノルム代数に対する鏡映からスタートして, 4 元数体, 紐トリック, そして鏡映に戻るという, 長い遠足であった. 4 元数体およびスピンと特殊相対性におけるその役割にも触れた (第 II 部の第 9 節). Cayley 数の物理学における役割はいまだわかっていないが, 相対性よりはるか前に創案された 4 元数は, 相対性や電磁気学やスピンの数学に完全に適合している.

演習問題 [SI]. $\vec{\nabla} = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$ とし, $D = \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial t} + \vec{\nabla}$ とする. ここで, i, j, k は 4 元数体を生成し, -1 の根である $\sqrt{-1}$ は i, j, k と可換である. $E = E_x i + E_y j + E_z k, H = H_x i + H_y j + H_z k$ を $\mathbf{R}^3$ 上の体とし, $\psi = H + \sqrt{-1}E$ とする.

(i) 方程式 $D\psi = 0$ は, 複素化された 4 元数体において, 真空の Maxwell 方程式と一致することを示せ.

(ii) この言葉で, 非真空の Maxwell の方程式を決定せよ.

(iii) これらの方程式を用いて, Maxwell 方程式の相対論的不変性を証明せよ.

(iv) 非線形場の方程式 ([HAY], [STEW]) $D\psi = \frac{1}{2}\psi\sqrt{-1}\psi^*$ を研究せよ. ただし, $\psi^* = H - \sqrt{-1}E$ である.

(v) K_1 と K_2 を i, j, k の線形結合とし, $K = K_1 + \sqrt{-1}K_2$ を定数とする. 方程式 $D\psi = K\psi$ は Dirac の方程式 [DIR] と同値であることを示せ.

$$\Psi = \vec{H} + \sqrt{-1}\,\vec{E}$$

$$D = \sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial t} + \nabla$$

$$\boxed{D\Psi = \frac{1}{\sqrt{-1}}\rho + \vec{J}}$$

$$\equiv$$

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla\cdot\vec{E} = \rho\ ,\ \nabla\cdot\vec{H} = 0\\ \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\nabla\times\vec{E}\\ \frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{J} = \nabla\times\vec{H}\end{gathered}}$$

11節　4元数の実演

前節で議論したように, Dirac の紐トリック ([FE1],[BAT]) は電子のスピンのとらえどころのない物理的／数学的性質を説明している. (通俗的に考えられる実験において) 電子の周りを旅行する観測者は, 電子の波動関数が観測者の 1 回転に対してその位相 (phase) を切り替えていることを発見するであろう. この効果についての議論に関しては [AH] を見られたい. ここで第 10 節の内容のかなりの部分を反復し, 4 元数の実演者として紐トリックの応用を続ける.

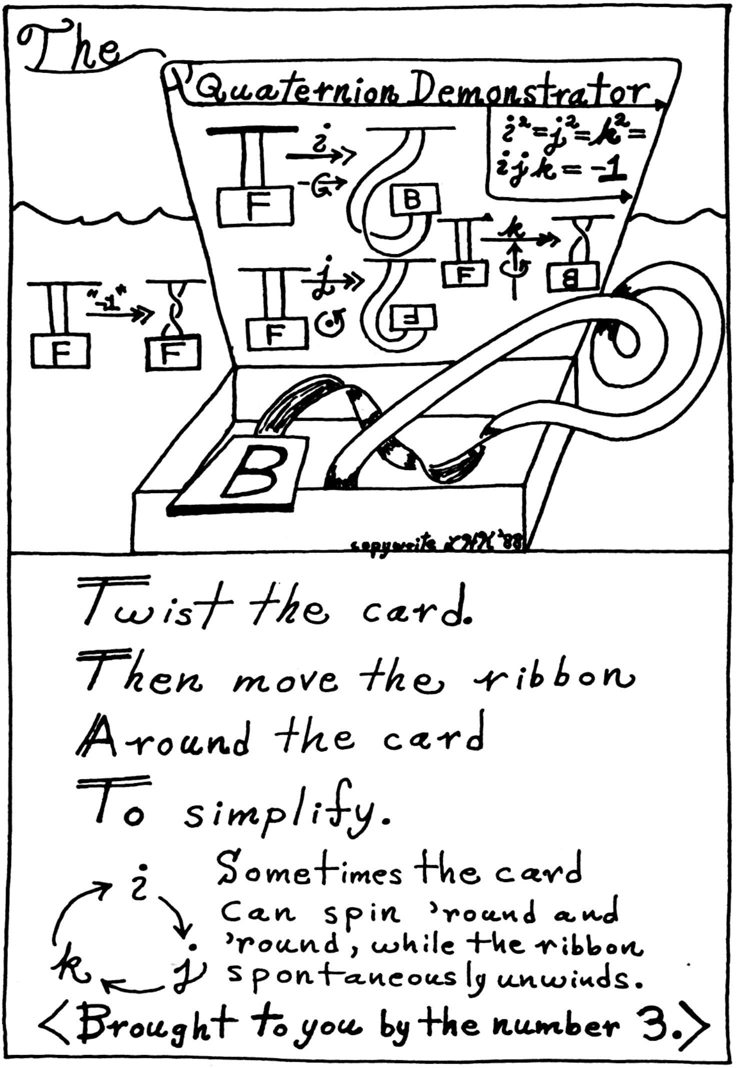
量子力学において根本となる事実は, 2π 回転は観測者をスタートしたところには決して連れ戻さないということである. それにもかかわらず, 電子のスピンの場合には (より一般的に 1/2 スピンについては), 4π 回転は観測者を最初のステイトに戻すのである. これらの事実は, それは 3 次元空間の回転の波動関数の空間へのユニタリー表現のために必要な用語で理解され得るのであるが, 3 次元空間における運動の言葉で直接に述べるとき, とても神秘的に思える. これらの事態を目に見えるようにするために, Dirac は紐またはベルトのみを用いて, この現象のトポロジー的な類似である単純な証拠を発見した. これは, **ベルト・トリック** (Belt Trick) として, トポロジスト達にはよく知られている. 実際, とてもよく似た運動として, **皿トリック** (Plate Trick; または, フィリピンのワインダンス (Philippine Wine Dance)) が数百年前から知られている. ([BE] の 122 ページを見られたい.)

このトリックは, ベルトの 4π 捻りがその両端を固定したまま (トポロジー的な) 全同位によって取り除けることを示している. ベルトの両端を固定したままであることは, それらを 2 つの球面に付けることによって説明した. ベルトはこれらの球面の外部で動く. このトリックは, 実際のベルトを使って, 次のように簡単に実行することができる; 協力者にベルトの一端を持ってもらい, 自分は両手でベルトの他端を持ち, ベルトが先の端の周りを通り抜けるようにする.

ベルト・トリックは, 3 次元空間の向きを保存する回転のつくる空間 $SO(3)$ の基本群が位数 2 の元をもつという事実を説明していることも, またよく知られている. 逆に, これは, $SO(3)$ は単位の長さの 4 元数の全体 $SU(2)$ によって 2 重に被覆されるという事実と同値である.

本節の目的は, ベルト・トリックと群 $SU(2)$ を詳細に探究することである. ベ

ルト・トリックの自然な一般化がいかにして 4 元数群のトポロジー的／力学的模型となるか, また, $SU(2)$ の部分群が 3 次元空間においてある対象にベルトを付けることによってどのように目に見えるようになるかを示そう. これにより, ベルト・トリックは対称群と $SU(2)$ に関する定理 (ベルト定理) へと一般化される. ベルト定理は新しい結果である.



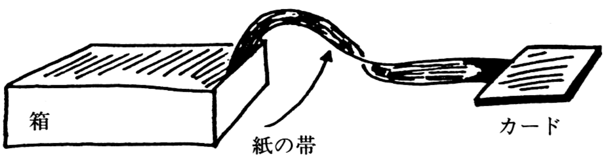
最後に, ベルト・トリックのコンピュータグラフィック模型をいかにして作るかを示す. この模型は $\pi_1(SO(3))$ の生成元とその逆元のホモトピーを直接目に見えるようにしたものである.

4 元数の実演器

4 元数群の力学的／トポロジー的実演を創案するために, 次の指示に従っていただきたい.

1. ボール紙の箱, 小さな正方形のボール紙のカード, そして約 1 フィートの長さで 1 インチ幅の紙の帯を用意せよ.
2. 帯の一端をボール箱に貼り付け, 帯のもう一端をカードに貼りつけよ.

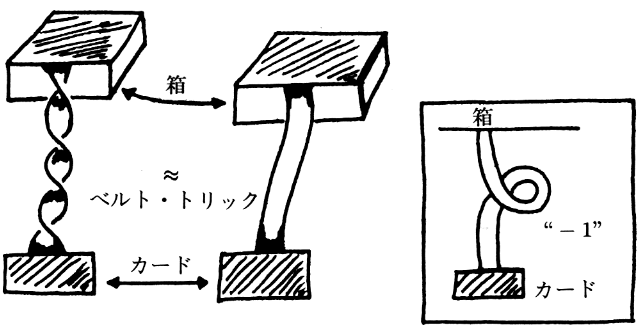
実演器は下に示したようになるはずである.



4 元数を構成する前にベルト・トリックをやってみて, それから −1 の平方根を構成してみるのも役に立つ. −1 のいくつかの平方根 (空間における各主要方向に対して 1 つ) が出現した後で, 4 元数が創り出されることがわかるであろう.

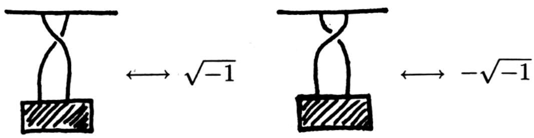
ベルト・トリック

ベルト・トリックを実演するために, 実演器のボール箱をテーブルの上に置き, カードを取り出し, 捻りのないベルトから始める (紙の帯をベルトとよぶことにしよう). カードを 720 度捻り, 第 10 節でやったようにベルト・トリックを実演せよ.



マイナス 1(-1)

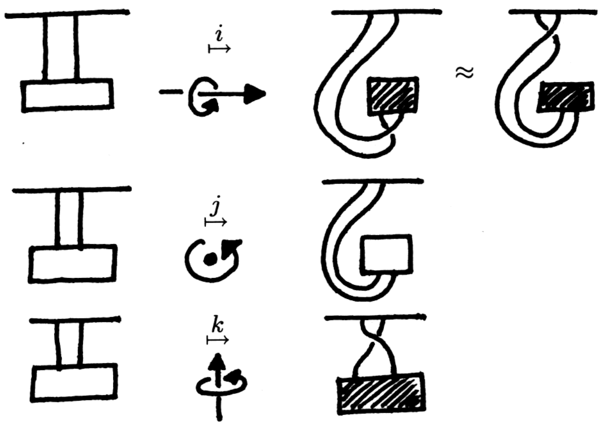
ベルト・トリックは 720 度の捻りを消してしまうので, **180度の捻りは -1 の平方根の類似品である.** 180 度の捻りを 4 回施すと (ちょっとトポロジーの助けがあれば) 初めの状態に戻る. そうだとすると, **360度の捻りは -1 の類似品にちがいない.** もちろん 360 度の捻りは, 右か左かどちらに捻るかを尋ねるであろう. しかし, ベルト・トリックは, 360 度の捻りは一通りしか存在しないことを示している. 左手系と右手系の捻りは, 互いに変形で移り合えるのである.



ベルトを 360 度捻る行為は, -1 を掛けることを表す.

-1 のいくつもの平方根

-1 の平方根はいくつも存在する. カードを任意の軸の周りに 180 度回転してみよ. これを 4 回行うとベルト・トリックが誘導され, スタートの状態に連れ戻される. 特に, 下に示す 3 つの互いに直交する軸に関する回転を考察されたい.

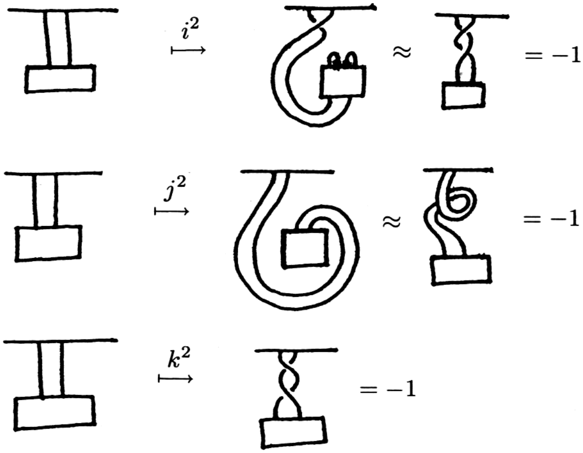


4 元数群

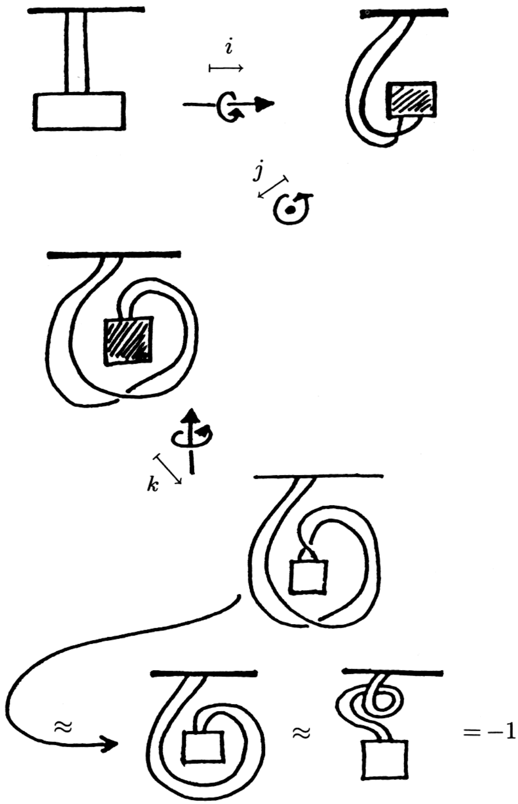
-1 のこれら 3 つの基本的な根を i, j, k とラベル付けすると,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

となる. これらは, 4 元数群の定義関係式である.



i^2
≈
$= -1$
j^2
≈
$= -1$
k^2
$= -1$



i
j
k
≈
≈
≈
$= -1$

$$\boxed{ijk = -1}$$

したがって, 4 元数の単純で機械的な実演器が約束どおり構成された.

ベルト定理

前記の実演器は, より一般的な結果の特別な場合である.

G を $SO(3)$ の任意の部分群とする. $SU(2)$ を単位 4 元数の集合とみなす:

$$SU(2) = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \text{ は実数}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

$p : S^3 = SU(2) \longrightarrow SO(3)$ を, $p(g)(v) = gvg^{-1}$ によって定義される 2 重の準同型写像とする. ここで, 3 次元ユークリッド空間を $ai + bj + ck$ (a, b, c は実数) の形をした 4 元数の集合とみなし, v をこの 3 次元ユークリッド空間の点とする.

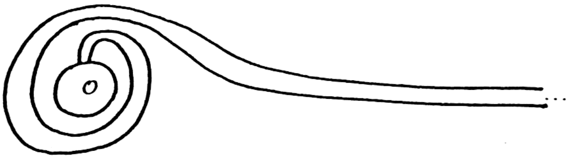
すると, 原像 $\widehat{G} = p^{-1}(G)$ は $SU(2)$ の部分群であり, G の位数の 2 倍を位数にもつ. $\widehat{G}$ は G の **2 重化群** (double group) とよばれる. 例えば, Klein の 4 元群 K (つまり, 3 次元空間における正方形の対称変換の群) の 2 重化群は, $SU(2)$ において i, j, k によって生成される 4 元数群 H である.

これまでに, 4 元数群は, Klein の 4 元群 K からその対称変換が K を生成する正方形に帯を付けることによって現れることを示した. 帯を付けることによって, すべての回転は値が 2 倍となり (2π は非自明で, 指数 2 である), その結果得られる回転の群は, 帯に表示された符号と対になって, 4 元数群と同型になる.

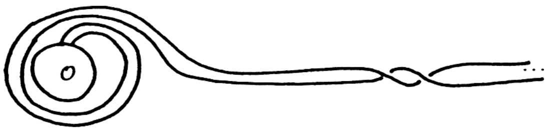
ベルト定理. A を 3 次元空間に埋蔵された物体とし, $G(A)$ によって A を保存するような回転からなる $SO(3)$ の部分群を表す; $G(A) = \{s \in SO(3) | s(A) = A\}$. すると, 2 重化群 $\widehat{G}(A) \subset SU(2)$ は, A に帯を付け, 上に述べた処方に従うことによって実現される. すなわち, A の回転を実行し, 帯の状態のトポロジー的な目録を作る. A の 2 つの回転が **^–同値** (^–equivalent) であるとは, それらが A 上では等しく, またそれらが帯の上でも同じ状態を生み出すときをいう. すると, **A の回転の ^–同値類の集合は, 2 重化群 $\widehat{G}(A)$ と同型である.**

ベルト定理の証明. $\pi : SU(2) \longrightarrow SO(3)$ を前節で述べた被覆準同型写像とする. G を物体 $A \subset \mathbf{R}^3$ 上の対称群とし, 元 $\widehat{g} \in \widehat{G} \subset SU(2)$ に対して, $g = \pi(\widehat{g})$ とする. また, β で A に貼り付けた帯を表す. β のもう一方の端は, この議論の目的のために, “無限遠に貼り付けられている” と仮定する. すなわち, A は一端が A に貼り付いた無限に長い帯で留められている. A を捻ると帯にカールが送られる. 空間における A の各位置は帯をカールさせるが, ベルト・トリックにより A の 2π 回転と 4π 回転とを比較することができ, それらは帯の “無限遠”の方で 2π 捻りだけ異なることがわかる. すなわち, g および g に 2π 回転を施したものに対して, (A, β) の局所的な配置は同じになるようにできるが, A から十分にはなれた帯の

静止部分では後の場合に余分な捻りがある.



対



この結果, A の空間における配置の集合の 2 重化として (A, β) の配置の集合を得る. $\mathcal{S}$ を配置の本来の集合とするとき, $\widehat{\mathcal{S}}$を (A, β) の配置の集合としよう. すると, $\mathcal{S}$ は G と 1 対 1 に対応し, したがって $\widehat{\mathcal{S}}$ は $\widehat{G}$ と 1 対 1 に対応する. この後半の対応が群の同型であることは, 容易にわかる. □

ベルト・トリックのプログラミング

以下で示すプログラムは, 3 次元空間における 2 つの同心球面の間に張り渡されたベルトを説明する. 最初に大きい球面の北極から小さい球面の北極へ, 捻りのない状態で張り渡されたベルトの, 回転のもとでの像が描かれるであろう.

このベルトを**原始ベルト**とよぼう. 回転の軸を選ぶと, このプログラムは, 原始ベルトからこの軸に関する $2\pi t$ 回転によって得られるベルトを, その ***t*–殻** (t–shell) で描く. この t–殻 $(0 < t < 1)$ は, $t = 0$ と $t = 1$ における 2 つの境界球面と同じ中心をもつ球面である. したがって, 一番上 $(t = 0)$ では, ベルトも動かない. ベルトは軸の周りに回転するが, 底 $(t = 1)$ (一番内側の同心球面) では動かない.

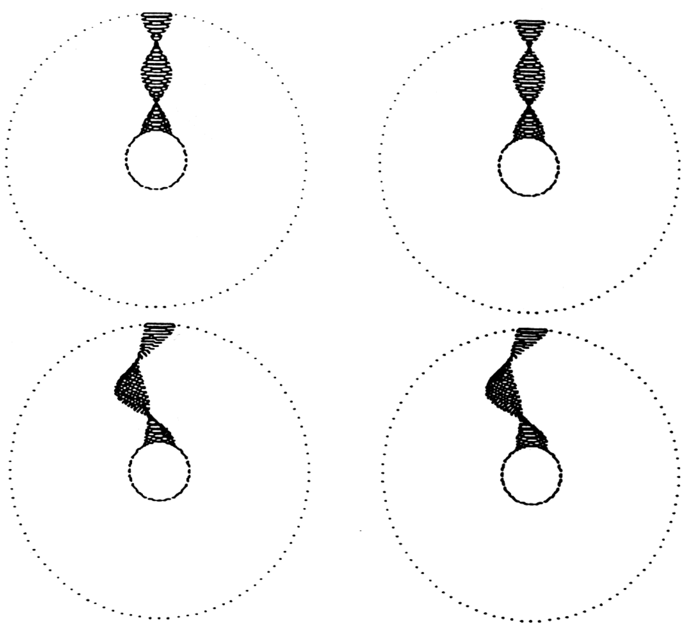
軸の選択の度に, 1 つのベルトの像を得る. $u_1 = 0, u_2 = 1, u_3 = 0$ をもつ軸は, ベルトに右手系に 2π 捻りを与える. 軸を $u_1 - u_2$ 平面の中で π だけ回転すると, ベルトは内側の球面の周りを動くような変形を受けて, 最後には 2π だけ逆の捻りをもって最初の位置に戻る.

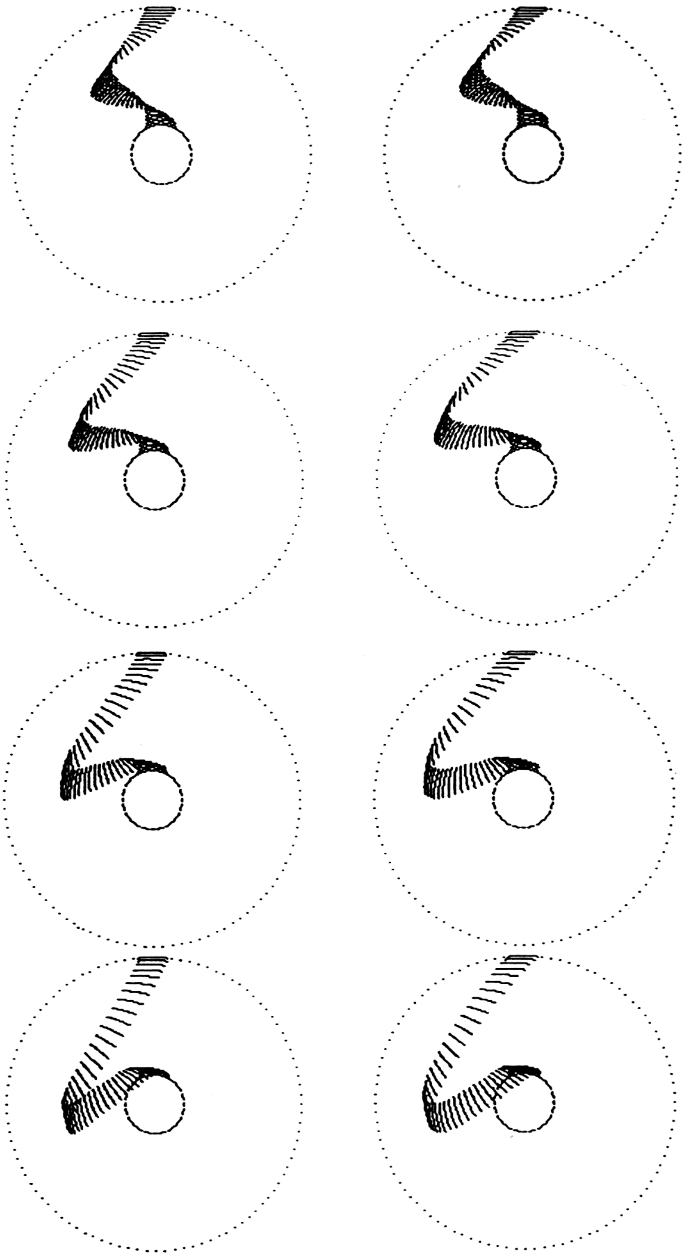
変形の一連の図 (プログラムを載せた後の立体図の対) は, このような軸に関してプログラムを走らせることによって得られたものである. プログラムそのものは, 4 元数を用いて回転を実行する. したがって, 4 元数を説明するのに 4 元数を用いたことになる!

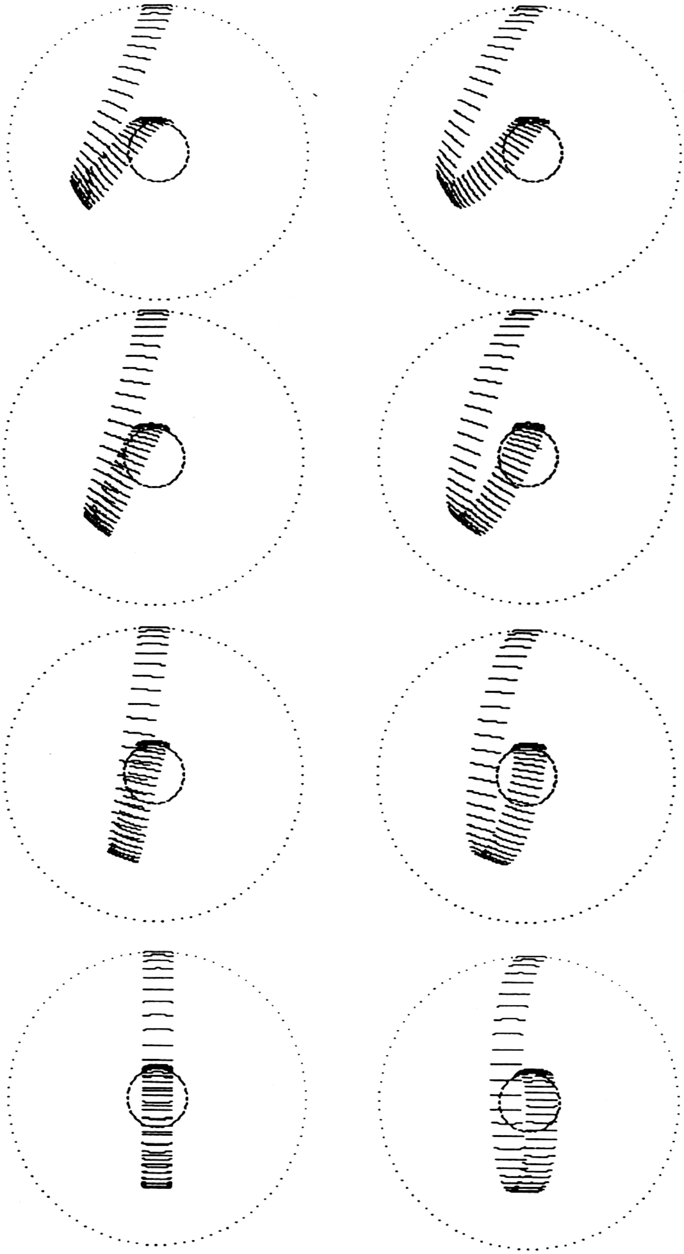
```
  10 PRINT"DIRAC STRING TRICK"
  15 PRINT"COPYRIGHT(1989)L.H.KAUFFMAN-KNOTS INC."
  20 PRINT"INPUT AXIS U1i+U2j+U3k"
  25 PI=3.141592653886
  27 U1=0:U2=1:U3=0:'DEFAULT AXIS
  30 INPUT"U1";U1:INPUT"U2";U2:INPUT"U3";U3
  40 U=SQR(U1*U1+U2*U2+U3*U3)
  50 U1=U1/U:U2=U2/U:U3=U3/U
  60 PRINT"THE TWISTED BERT!":CLS
  65 'SOME CIRCLES
  70 FOR I=0 to 100
  75 A=COS(2*PI*I/100):B=SIN(2*PI*I/100)
  80 PSET(120+100*A,125-100*B)
  90 PSET(120+20*A,125-20*B)
  95 PSET(370+100*A,125-100*B)
  97 PSET(370+20*A,125-20*B)
 100 NEXT I
 105 'DRAW BELT
 110 FOR I=0 TO 50
 120 FOR J=0 TO 20
 130 X=-10+J
 140 R=100-I*(8/5)
 150 Y+SQR(R*R-X*X)
 160 Z=0
 170 P1=X:P2=Y:P3=z
 180 IF I=0 OR I=50 THEN 210
 190 TH=(PI/50)*I
 200 GOSUB 2000:X=Y:Y=Z:Z=W
 210 PSET(120+X,125-Y)
 215 PSET(370+X+.2*Z,125-Y)
 220 NEXT J
 230 NEXT I
 235 A$=INKEY$:IF A$=""THEN 235
 237 GOTO 10
 240 END

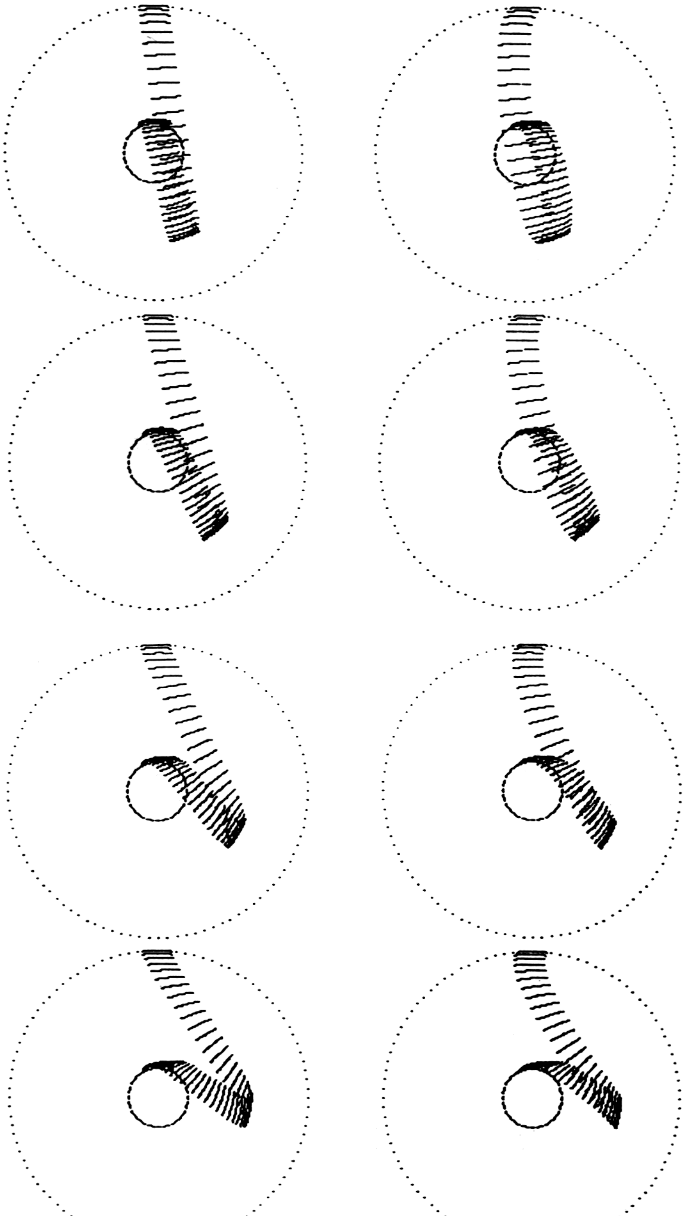
1000 'THE QUATERNION SUBROUTINE!
1020 'INPUT A+Bi+Cj+Dk
1040 'INPUT E+Fi+Gj+Hk
1060 X=A*E-B*F-C*G-D*H
1070 Y=B*E+A*F-D*G+C*H
1080 Z=C*E+D*F+A*G-B*H
```

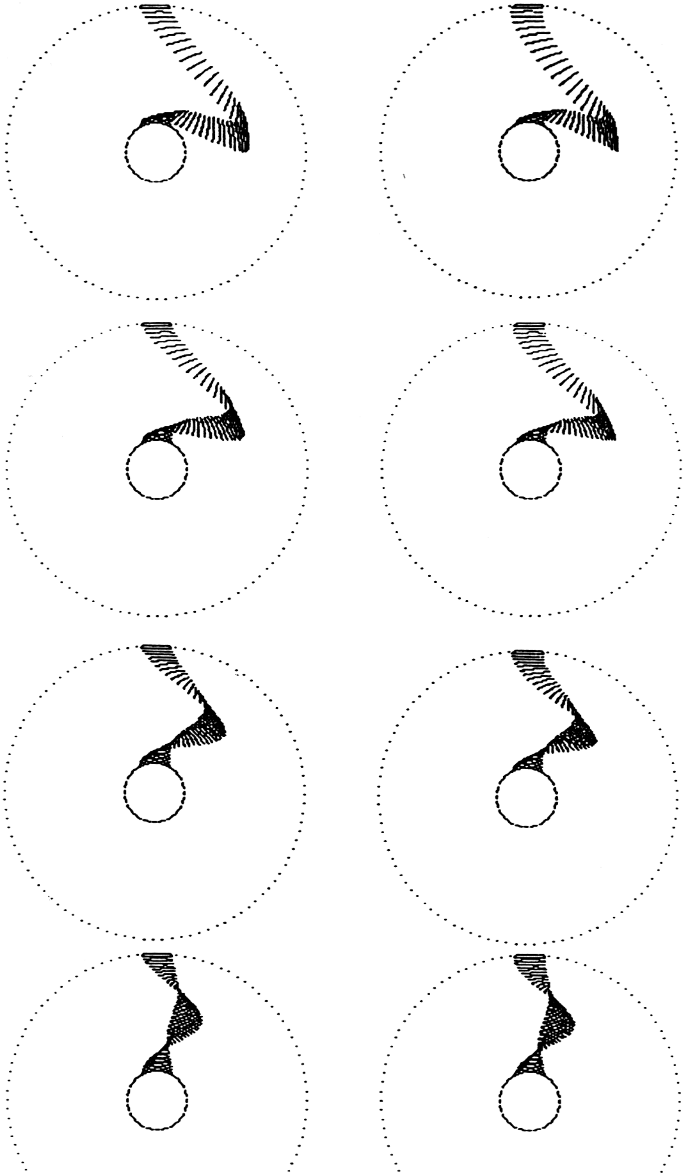
```
1090 W=D*E-C*F+B*G+A*H
1100 RETURN
2000 'ROTATION ROUTINE
2020 'INPUT AXIS U1i+U2j+U3k
2030 'INPUT ANGLE TH=(1/2)rotation angle
2040 'INPUT POINT P1i+P2j+P3k
2050 P=COS(TH):Q=SIN(TH)
2060 A=P:B=Q*U1:C=Q*U2:D=Q*U3
2070 E=0:F=P1:G=P2:H=P3
2080 GOSUB 1000:'QMULT
2090 E=P:F=-B:G=-C:H=-D
2100 A=X:B=Y:C=Z:D=W
2110 GOSUB 1000:'QMULT
2120 RETURN
```











4 元数的な腕

4 元数, 量子力学, 量子心理学 [O], 量子論理, そして好戦的芸術に関する途方もない会話の中で, Wing Chun と筆者と Eddie Oshins は, 4 元数実演器による実演はただ一人の人間の手だけでやれることを発見した. まず, 右腕を, 体に垂直に直接外側に, 手のひらを上にして, 保つ. その腕を 180 度回転させる. これが i である. 次に, 手が体を指すまで, 肘をおり曲げる. これが j である. 次に, その手を突き出すが, その途中では, 初めに手のひらが下を向くように動き, それから腕が再び完全に伸びて体から離れて手のひらが上を向くまで動かす. これが k である. 全体の動きは, 腕を 360 度捻ることになる. このことから, $ijk = -1$ である.

12節 スピン・ネットワークの Penrose 理論

Roger Penrose の論文 [PEN4] “Combinatorial Quantum Theory and Quantized Directions” の序文の引用から始めよう. スピンネットについては, 論文 [HW] を参照してほしい.

> “従来の場の理論によると, 角運動量は ($\hbar/2$ を単位とする) 整数値のみをとり, 角運動量の合成の (確率論的) 規則は本来組合せ的である. ...
> 大きな角運動量の極限において, 角運動量に対する量子の規則は, 空間内の方向の幾何を定めるのではないかと期待される. この方向はたくさんの自転する物体によって決まると想像される. そう考えれば, 例えばある物体から他の物体へ電子が投げ出されたとき, 方向軸間の角度というものは, 全運動量が増加, あるいは減少する確率の言葉で定義されるはずである. このようにして方向の幾何が築き上げられるであろう. そして問題は, この幾何が, 我々の知っている空間や時間の幾何と一致するかどうかという点である.”

Penrose のスピン・ネットワークは, 角運動量と $SL(2)$ に対する計算を容易にするためにもち出されたものである. おそらく, 群論的な動機をあげ, 形式的な構造を作り上げることが, この理論にたどり着く最も直接的な方法であろう.

スピノルが 2 つの複素数からなるベクトルであり, ψ^A $(A = 1, 2)$ で表されることを思い出してもらいたい. $SL(2)$ の元 U は, スピノルに次のように作用する:

$$(U\psi)^A = \sum_B U^A_B \psi^B.$$

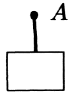
共役スピノルは, 次の式で定義される:

$$\psi^*_A = \varepsilon_{AB}\psi^B.$$

(ε_{AB} は標準的なイプシロンであり, $\varepsilon_{12} = 1 = -\varepsilon_{21}, \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$. Einstein の規約を本節を通じて用いる.) このとき, 自然な $SL(2)$ 不変な内積

$$\psi\psi^* = \psi^A \varepsilon_{AB} \psi^B$$

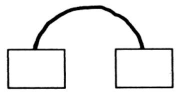
をもつ. 内積を図形表示で表すために, まず次のようにおく:

$\psi^A \longleftrightarrow$ 

すると, 添字が下につく場合は次のようになる:

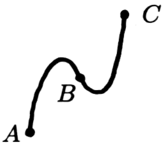
$\psi^*_B \longleftrightarrow$ B 

この結果, 内積は下の図で表される:

$\psi\psi^* \longleftrightarrow$ 

ここで, キャップ A  B はイプシロン行列 ε_{AB} を表している.

残念ながら (むしろ幸運なのかもしれないが), この記法ではトポロジー的な不変量にはならない. というのは, もしも  $\longleftrightarrow \varepsilon_{AB}$,  $\longleftrightarrow \varepsilon_{AB}$ ならば, 次の図のようになってしまうからである:



$\longleftrightarrow \varepsilon_{AB}\varepsilon^{BC} \longleftrightarrow -\delta^C_A \longleftrightarrow -$ 

ここで, δ^C_A は Kronecker のデルタを表す. 次のように, -1 の平方根 $\sqrt{-1}$ を掛けることによって, 状況が改善される.

A  B $\longleftrightarrow \sqrt{-1}\,\varepsilon_{AB}$

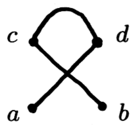
C  D $\longleftrightarrow \sqrt{-1}\,\varepsilon^{CD}$

これで図形表示上トポロジー的な不変量になるのだが, $SL(2)$ 不変なテンソルを, 新しい枠組みに移さなければならない. 例えば, この新しいループの値は

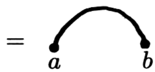
A  B $= (\sqrt{-1})^2 + (-\sqrt{-1})^2 = -2$

となり, ここから負の次元のテンソルという名前が出てくる.

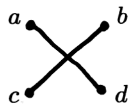
このように定めても，さらに等式



$$= -\varepsilon_{cd}\delta^c_b\delta^d_a = -\varepsilon_{ba} = \varepsilon_{ab}$$



を得るために，各交差にマイナスの符号を付けなければならない．このとき，定義から，



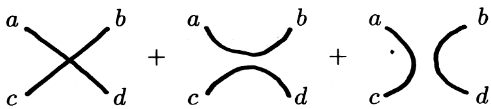
$$= -\delta^a_d\delta^b_c$$

となる．このような約束のもとで，次の基本的なバイノル等式が得られる：



$$= 0.$$

証明.



$$= -\delta^a_d\delta^b_c + \varepsilon^{ab}\varepsilon_{cd}(\sqrt{-1})^2 + \delta^a_c\delta^b_d$$
$$= (\delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c) - \varepsilon^{ab}\varepsilon_{cd} = 0.$$

□

ブラケット (第 I 部) の愛好者としては，次の関係式





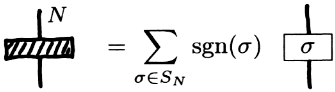
$$= -A^2 - A^{-2}$$

を用いたトポロジー的な一般化の可能性を知っているが，これは次の節にまわすことにしよう．

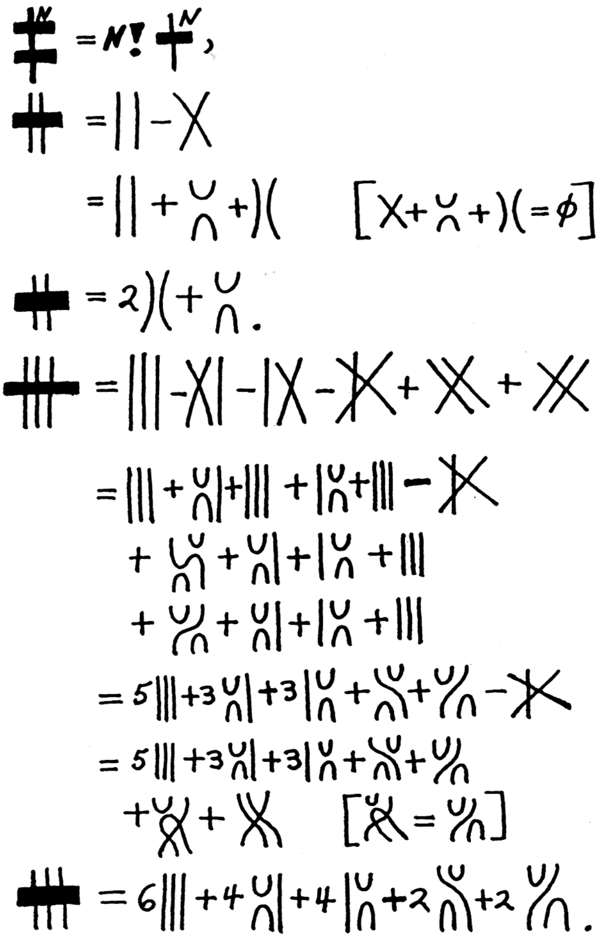
次に重要なスピン・ネットワークの要素として，**反対称化作用素** (antisymmetrizer) があげられる．これは線の束に対応する図形和であり，次の図のように表される．ここで N は線の本数を表している．



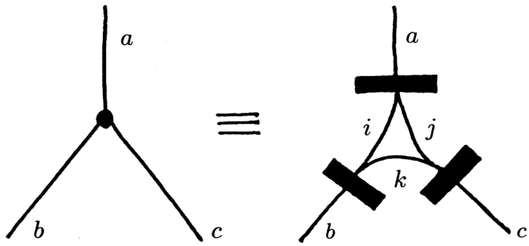
反対称化作用素は, 次式で定義される:



ここで σ は S_N (N 個の異なるものの置換の集合) のすべての置換を動き, 箱の中の σ は, ブレイド射影図としてこの置換を図形的に表したものである. したがって, 次の図のようになる:

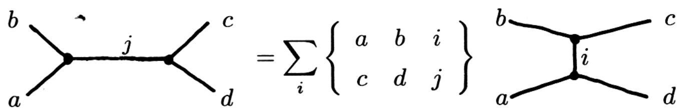


この反対称化作用素というのは, Clebsch-Gordon 係数, $3j$ シンボル, $6j$ シンボル, そして他の角運動量の計測理論に対して, スピン・ネットワークを計算するための基本的な要素なのである. 反対称化作用素を用いて, 3 本の辺の出る頂点に対し, 次のように定義する:



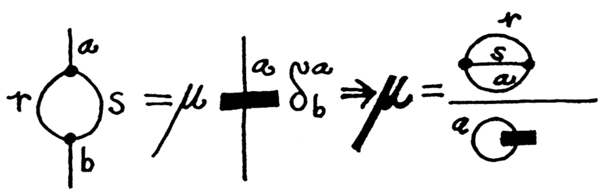
ここで, a, b, c は正整数であり, 等式 $i+j=a$, $i+k=b$, $j+k=c$ が正整数の中で解をもつものとする. 線分上の相互作用において, スピンが上のように割り当てられていると考える. この頂点は, スピン b とスピン c をもつ粒子が相互作用してスピン a を生み出すという量子力学のスピン・ネットワークの類似物なのである.

最終的に, $6j$ シンボルは組み替え (re-coupling) の式

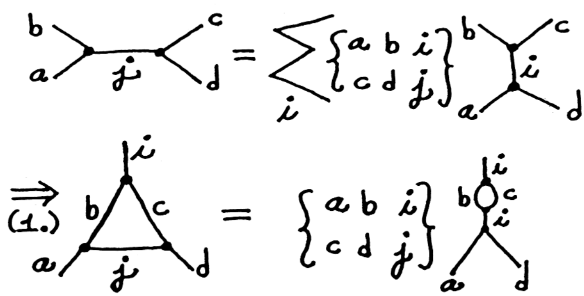


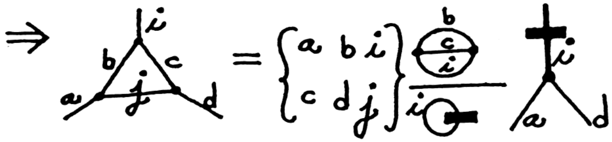
で定義される. この式の (組み替え) 係数を得るために, 次のように図形的に話を進めていく:

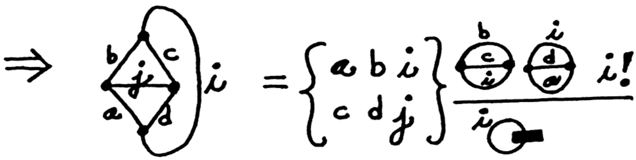
1.

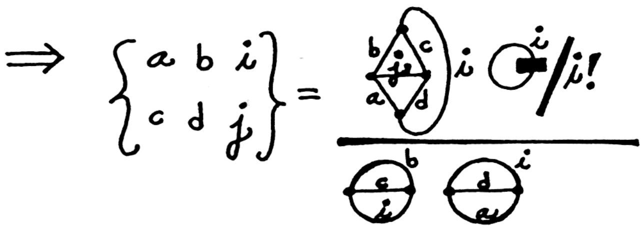


2.



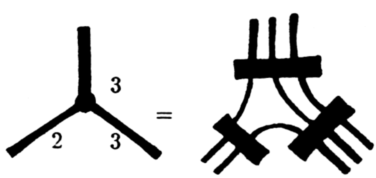




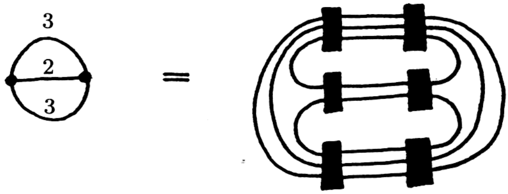


最後の式により, $6j$ シンボルは, いくつかのある小さなネットにおけるスピン・ネットワークの計算で決定される.

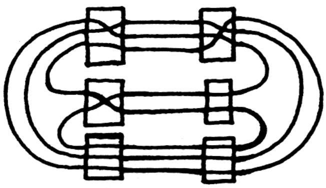
この定式化によって, スピン・ネットワークを用いて示そうとしている事柄が理解できるであろう. 3 本の辺の出る頂点をもつグラフ (3 価のグラフ) があり, 各頂点が許容するように線分に対してスピンが割り当てられている. 各頂点には, 巡回的に順序が与えられており, この順序を表すように平面に埋め込まれている. どこの頂点にも付かない端点がないようなネットワークでは, 反対称化作用素がたくさんの異なる接続の仕方を暗示することを除いては, ブラケットのように計算できる. 例えば,



これは, $(2!)(3!)^2 = 72$ の局所的な状態に展開される. 反対称化作用素を展開していく規則において, 符号は重要である. ネットワーク上の閉じたループには, 各々 (-2) の値が与えられる. したがって, 次の図



に対して, ステイト



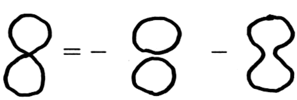
は, (4 つの交点があるので) 置換の符号は $(-1)^4$ であり, 2 本のループの値は (-2) であるから, $(-1)^4(-2)^2$ という値を与えられることになる. 通常, スピン・ネットワークの便利な点は, 3 価グラフの自己交差を無視する点にある. よって, 閉じたスピン・ネットワーク G のノルム $||G||$ は, 次の式で与えられる:

$$||G|| = \sum_{\sigma}(-1)^{\chi(\sigma)}(-2)^{||\sigma||}.$$

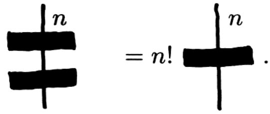
ここで, σ は反対称化作用素の箱を特別なつながりに置き換えるという意味でのステイトを表し, $\chi(\sigma)$ は箱の中のすべての交差数を意味している. $||\sigma||$ はもちろん閉じたループの個数である.

ブラケットと同様にして, バイノル展開式  を用いて計算することもできる. すると,

$-2 =$  ,

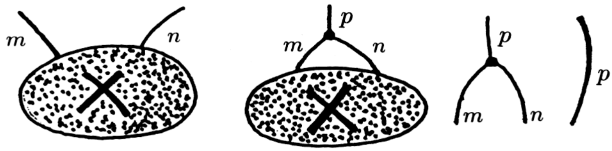
 $= -(-2)^2 - (-2) = -4 + 2 = -2.$

反対称化作用素は, 次の式も満足することにも注意する:

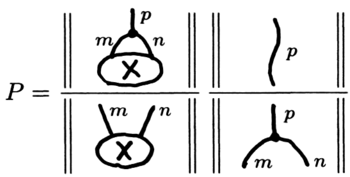


スピン–幾何定理

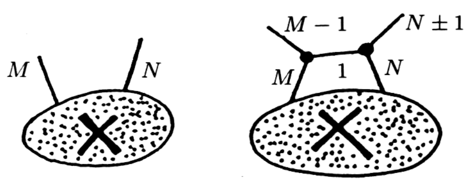
Penrose は, 時空に対する限りなく組合せ的な土台として, スピンネット・ワークを定式化しており, さらに, 次のように述べている [PEN4]:

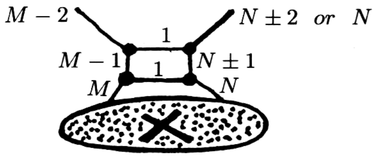
> "宇宙の分割が, m と n に番号付けられた自由な端点をもつネットワークによって表されていると考えてみよう. 粒子や, またはこれら 2 つの自由な端点により表される構造が組み合わされて, 新しい構造を形成していると仮定する.
>
> 
>
>
> 許容できる p という数を任意にもってきたとき, この新しい構造の角運動量が p となる確率がなんであるか知りたいのである."

そして Penrose は, この確率として, 次の式を採用したのである:

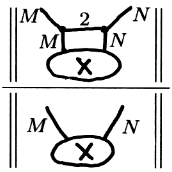


ただし, 自由な端点をもつネットワークのノルムは, そのネットの 2 つのコピーを互いに付けたもののノルムである. ($\psi\psi^*$ の類似になっている.) そして, さらに続く:

> "次のような大きな角運動量 M, N をもつ複雑な 2 つの物体の状況を考えてみよう.
>
> 
>
>
> 物体の軸間の**角度**を, 各々 $N+1, N-1$ の起こる相対的な可能性の言葉で, すなわち, 上の実験のようにして定義する. 知らなくてもよい確率の部分を除くために, 次のようにもう 1 回実験を繰り返すことを思い描いてみる.



もし, 2 度目の実験によって与えられる確率が本質的に最初の実験結果の影響を受けなければ, 物体の軸間の角度 θ は矛盾なく定義されたことになり, この確率によって決定される. すると, 次の式が得られることになる:



$$\doteqdot \frac{1}{2}\cos(\theta).$$

さらに, このことにより, **上のようにして得られた角度が 3 次元ユークリッド空間内の角と同様の法則を満たすことを示すことができるのである**."

これが, スピン–幾何定理である.

ベクトル組合せ係数の計算

ここでは, 角運動量の標準的な問題が, どのようにスピン・ネットワークの言葉に言い換えられるかについて述べる. J_1, J_2, J_3 を, $SU(2)$ の Lie 環に対する標準的な生成元とする. (第 II 部 第 9 節と比較せよ.)

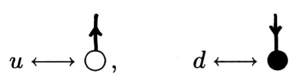
$$J_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$J_+ = J_1 + iJ_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J_- = J_1 - iJ_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を上への, あるいは下への作用素とすると, $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ に対して, 次が成り立つ:

$$J_3 u = \left(\tfrac{1}{2}\right) u, \quad J_3 d = \left(-\tfrac{1}{2}\right) d, \quad J_+ d = u,$$

$$J_+ u = 0, \qquad J_- u = d, \qquad J_- d = 0.$$

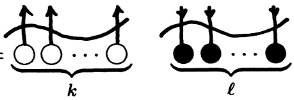
ここで, u と d を図形的に次のように定める:



 を**対称化作用素** (symmetrization) とする．すると， $= \| +$  となる．また，

$$\widetilde{J} = (J \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) + (1 \otimes J \otimes 1 \otimes \cdots) + \cdots$$

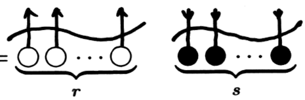
とおき，

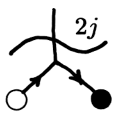
$V(k,\ell) =$ 

とおくと，対応するテンソル積において，次が成り立つ：

$$J_3(V(k,\ell)) = \left(\frac{k-\ell}{2}\right) V(k,\ell).$$

これから，固有値 $\{-m/2,\cdots,m/2\}$ $(m=(k+\ell)/2)$ をもつ $s\ell(2)$ の既約表現が得られる．特に，$m=(r-s)/2$, $j=(r+s)/2$ に対して，次のように書く：

$|jm\rangle =$ 

$|jm\rangle =$ 

すると，$J_3|jm\rangle = m|jm\rangle$ が成り立ち，上へあるいは下への作用素は，これらの張り縄の周りを動き回ることになる．

ベクトル組合せ係数，あるいは**組み合わせると 0 になるような 3 つのスピンに対する確率振幅**を与えるような Wigner 係数を計算したい．これは次のように表される：

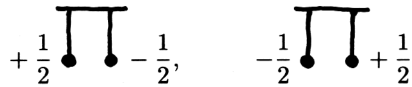
$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}.$$

この確率振幅を計算するために，**積ステイト** $|j_1m_1\rangle|j_2m_2\rangle|j_3m_3\rangle$ **をつくり，反対称化作用素を用いてスカラーに簡約する**ことを考える．

問題． 上にあげたテンソルをスカラーに簡約するために，なぜイプシロン ($\prod_{a\ b} = \varepsilon_{ab}$) (すなわち，反対称化作用素) を施すのか．

答． 組み合わせて 0 にするためには，スピンを保つことが必要になる．したがって，可能性は次の 2 つである：

↑ (時間の矢)

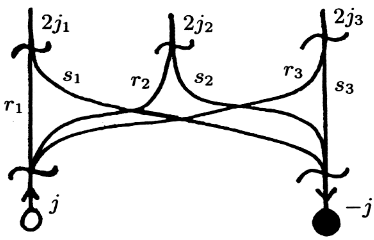


さらに, 上の 2 つの差は波動関数の形の差であることを思い出してほしい. つまり, 符号の変化

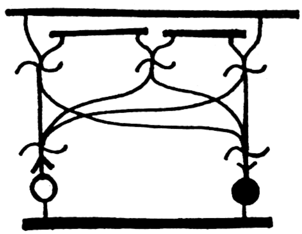
$$\prod_{a\,b} = -\prod_{b\,a}$$

は, スピン $\left(\frac{1}{2}\right)$ 粒子の周りを回るときの変化に対応している (第 II 部の第 9,10,11 節と比較せよ).

全スピンが 0 となる 3 つのスピンの構造を表す図形表示は, 次のようになる:



すなわち, 省略型で書けば, 次のようになるものを計算したい:

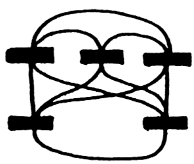


$$\begin{pmatrix} m_k & = & (r_k - s_k)/2 \\ k & = & 1,2,3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}$$

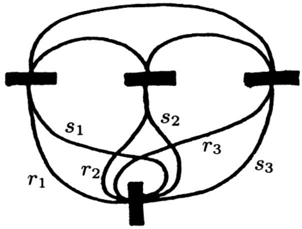
これをスピン・ネットワークに移すためには, $\coprod$ を $\sqrt{-1}\coprod = \bigcup$ に, $\prod$ を $\sqrt{-1}\prod = \bigcap$ に置き換え, **対称化作用素を** (交点にマイナスの符号を付けるという操作によって) **反対称化作用素に換える**. したがって,

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix} =$$



このようにして, ベクトル組合せ係数の計算は, スピンネットの計算に置き換えられる.

$$\left(\begin{array}{l} j_k = \dfrac{r_k + s_k}{2} \\ k = 1, 2, 3 \end{array}\right)$$



$$\left(\begin{array}{l} m_k = \dfrac{r_k - s_k}{2} \\ k = 1, 2, 3 \end{array}\right)$$

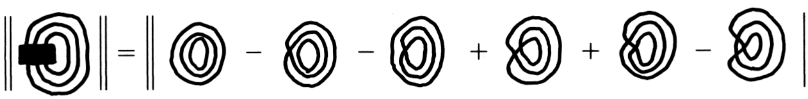
計算の組合せ的手法は, [HW] を見てほしい.

彩色的手法

ここでは, スピンネットの計算に対する, Moussouris による彩色的方法の要約を述べる. 閉じたネットワークのノルム $||G||$ を次のように定義したことを思い出してもらいたい:

$$||G|| = \sum_{\vec{\sigma}} \mathrm{sgn}(\vec{\sigma})(-2)^{||\vec{\sigma}||}.$$

ここで, $\vec{\sigma}$ は各反対称化作用素を特定したネットワークの“ステイト”である. $\mathrm{sgn}(\vec{\sigma})$ は反対称化作用素での置換の符号積であり, $||\vec{\sigma}||$ は $\vec{\sigma}$ におけるループの個数である. 例えば,



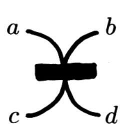
$$\begin{aligned} &= (-2)^3 - (-2)^2 - (-2)^2 + (-2) + (-2) - (-2)^2 \\ &= -8 - 4 - 4 - 2 - 2 - 4 \\ &= -24. \end{aligned}$$

ここの言葉では, ネットワークとそのステイト展開式を同義語として考えていることに注意してほしい.

計算を簡単にするために, 多項式 $P_G(\delta)$ を次のように定義しておく:

$$P_G(\vec{\sigma}) = \left(\sum_{\vec{\sigma}} \mathrm{sgn}(\vec{\sigma})\delta^{||\vec{\sigma}||}\right) \Big/ \prod e!.$$

ここで, $\prod e!$ は G の辺に付けられた重複度の階乗の積である. a, b, c, d を線分の重複度とするとき, 紐状のネットにおいて, 辺は次のようなパターンで反対称化作用素の箱に入っていく:



$\prod e!$ はこの重複度の階乗の積, もちろん, 標準的なスピン・ネットワークにおいては, $\delta = -2$ であった.

$\delta = N$ (負の整数) とすると, これらの紐は "カラー" $\mathcal{I} = \{1, 2, \cdots, N\}$ という添字集合からラベル付けられたものと見なせる. すると, 零でないステイトは個々の紐の状態の N 色の色付けに対応し, その色分けにおいては, 箱に入る各々の紐に対して, 同じ色で出ていく紐は正確に 1 つであるとする. (この状況設定において, N は反対称化作用素に入るものの重複度の最大値以上であることを注意しておく.)

したがって, 箱に与えてある重複度を 1 つ選ぶと, 結果として得られたグラフのサイクルの個数を数えることができ, **箱を共有するサイクルは, 異なる色分けがされていると決めておく.**

ステイト $\vec{\sigma}$ に対して, $\vec{\sigma}$ におけるタイプ i のサイクル数を $c_i(\vec{\sigma})$ で表す (同じ色分けをうけることが可能であるように, サイクルをタイプ分けするものとしている). このタイプの分類ができるのは, 次の事実による: $P_G(\delta)$ **のステイト和において, 与えられたサイクル数の集合をもつ項はすべて同じ符号をもつ.**

証明. 符号は, 箱の中における交点の数の偶奇性である. 異なるサイクル間の全交点数は偶数である. (スピンネットでは, 箱以外の交点は数えないことを思い出してもらいたい.) したがって, 箱の中の交点の偶奇性の合計は, 箱の外の異なるサイクル間の "にせもの" の交点の偶奇性に一致する. にせものの交点の数は,

$$\sum_{e_i \cap e_j} e_i \cdot e_j - \sum_{\text{自己交差サイクル}} c_k^2.$$

よって, 全体としての偶奇性は $\{c_k\}$ によって定まる. □

サイクルの各色分けに対して, 和の中の項の数は $\prod e!$ に等しくなる. 以上より, 次の定理が得られる.

定理 12.1. ($\delta = N$: 正整数に対して) 紐状のネット G のループ多項式 $P_G(\delta)$ は, 次の式で与えられる:

$$P_G(\delta) = \sigma \sum_{\{c_i\}} \varepsilon K(\{c_i\}, \delta).$$

ここで,

$$\sigma = (-1)^{\sum_{e_i \cap e_j} (e_i \cdot e_j)}, \qquad \varepsilon = (-1)^{\sum c_k \cdot c_k} \quad (c_k \cdot c_k \text{は自己交差数})$$

であり, $K(\{c_i\}, \delta)$ は, $\{c_i\}$ サイクルの配置において許容される色分けの数を表している. また, すべての負でないサイクル数 $\{c_i\}$ にわたって和をとるものとし, 各辺について $e_i = \sum c_j$ が成立しているものとする. ここで, c_j は e_i を通るすべてのサイクルである.

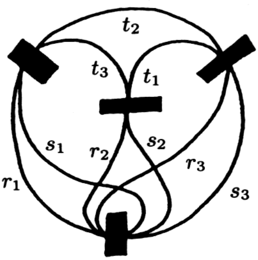
注意. $P_G(\delta)$ は, 正整数値における計算によって δ の多項式であることがわかっているのだが, $\delta=-2$ における評価式も許している. 正整数値において整数値が得られる多項式は, 負整数値においても整数値が得られるのであるから, $P_G(-2)$ に対しても整数値が得られるのである. 実際, 次の式が用いられる:

$$\begin{bmatrix} N \\ K \end{bmatrix} = \frac{N(N-1)\cdots(N-K+1)}{K!}$$

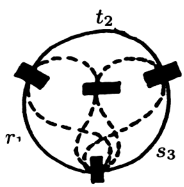
$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} -N \\ K \end{bmatrix} = \frac{(-N)(-N-1)\cdots(-N-K+1)}{K!} \in \mathbf{Z}$$

ここで, $(-N)! = (-1)^N(2N-1)!/(N-1)!$ ということも注意しておく.

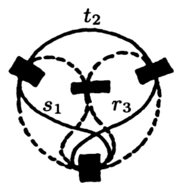
例題. 上の定理を用いた例をあげてみよう. G を次の図のようなネットワークとする.



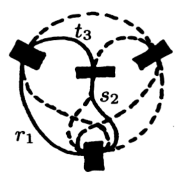
このネットには, 次に示すように, 9 本の辺, 4 つの箱, 6 つのサイクルがある.



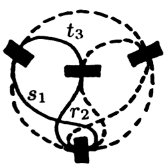
c_1



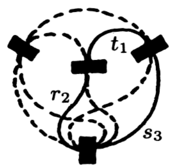
c_2



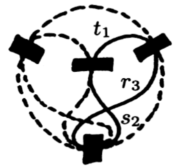
c_3



c_4



c_5



c_6

したがって, 次の式が得られる:

$$
\begin{array}{lll}
t_1 = c_5 + c_6 & s_1 = c_2 + c_4 & r_1 = c_1 + c_3 \\
t_2 = c_1 + c_2 & s_2 = c_3 + c_6 & r_2 = c_4 + c_5 \\
t_3 = c_3 + c_4 & s_3 = c_1 + c_5 & r_3 = c_2 + c_6
\end{array}
$$

ここで, $\pi = s_1r_2 + s_1r_3 + r_3s_2 + c_2 + c_4 + c_6$ とおけば, $(-1)^\pi$ は対応するステイトの符号となる. 上の等式を $z = c_1$ とおいて, すべての c_i に対して解いてみると, 次のようになる:

$$
\begin{array}{ll}
c_1 = z & c_4 = t_3 - r_1 + z \\
c_2 = t_2 - z & c_5 = s_3 - z \\
c_3 = r_1 - z & c_6 = t_1 - s_3 + z
\end{array}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
\pi &= s_1r_2 + s_1r_3 + r_3s_2 + (t_2 - z) + (t_3 - r_1 + z) + (t_1 - s_3 + z) \\
&= s_1r_2 + s_1r_3 + r_3s_2 + t_1 + t_2 + t_3 - s_3 - r_1 + z.
\end{aligned}
$$

ここで, $K(\{c_i\}, N)$ は, N 個の物体を G の箱へ, 各箱へ c_i 個ずつ分配する方法の数に等しくなる. したがって, $J = \sum c_i = t_1 + t_2 + t_3$ とおくと,

$$
K(\{c_i\}, N) = \frac{N!/(N-J)!}{c_1!\,c_2!\,c_3!\,c_4!\,c_5!\,c_6!}.
$$

彩色の和は, すべての c_i に対して非負整数を与える z の全体にわたってとるものとする.

よって $N = -2$ のとき, $N!/(N-J)! = (-2)(-3)\cdots(-J-1) = (-1)^J(J+1)!$. そこで, $q = \pi - z$ とおくと, 次のようになる:

$$
\begin{aligned}
&(\pi e!)P_G(-2) \\
&= (-1)^q(J+1)!\sum_z \frac{(-1)^z}{z!(t_2-z)!(r_1-z)!(t_3-r_1+z)!(s_3-z)!(t_1-s_3+z)!}
\end{aligned}
$$

演習. この例題のネットワーク G は, 本節の最初の部分で述べたスピン

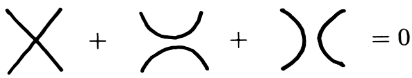
$$
\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}
$$

に対する組み替えネットワークから得られたものであった. j と m の言葉でこの計算を表し直し, それを角運動量に関する何らかの本にのっている Clebsch-Gordon 係数の計算結果と比較してみてほしい.

13節　Q–スピン・ネットワークとマジック編み

前節では, Penrose のスピン・ネットワークの定式化と解説を簡単に行った. このスピン・ネットワークの構造は, 量子力学的な角運動量の考えの簡略化の過程で得られたのであるが, これが考え出された当時はこれを理論化するのは奇異に感じられていた.

スピン・ネットワークの理論の土台は, 非常に簡単なバイノル等式



であり, これはブラケット多項式の等式



の特別な場合であることも知っている (簡単のため, ブラケット ⟨　⟩ をはずしてある). ブラケット多項式の理論では, ループの値は $\delta = -A^2 - A^{-2}$ であり, $A = -1$ のときバイノル (binor) になっている. 既に第 I 部 (第 9 節) でブラケットと $\sqrt{q} = A$ のときの量子群 $SL(2)_q$ との関係については説明した.

したがって, ブラケットの等式を土台に, Penrose のスピンネットを q–スピンネットに拡張できる可能性があることは, 読者にも明らかであろう. 本節では, 最初の段階はこの方針で進み, 拡張の本質であろうと著者が考えていることを概説する. 最初の段階においても, q–スピン・ネットワークを興味深く感じるであろう. 例えば, 自然に拡張すると, 反対称化作用素が "マジック編み" を導き, Temperley-Lieb 代数 (第 I 部 第 16 節を見よ) の特別な射影作用素を実現することがわかる. さらに, q–スピン・ネットワークを用いて, Turaev-Viro の 3 次元多様体の不変量を導く ([TU2],[LK19],[LK20]).

q–スピンネットの手法をはじめる前に, この理論の計画, 量子力学と相対論の関係など, 基本的な考え方を述べておきたい. このことは次の**ネットワーク設計**の中で述べる. ネットに直接関心のある読者は, 初めをとばして, **q-スピンネット**という標題へ進んでも差し支えない.

ネットワーク設計–前幾何学としての区別

時空の組合せ的モデルを作るとはどういう意味なのか? ネットワーク, グラフ, 形式的な関係, 連結構造のフーガなど, いろいろ思い浮かべるかもしれない. しかし, この冒険の基本となることは, 時空が拡がっていくという物の見方あるいは立脚点であろう. 構成, 説明, また論理が, ある概念を表す以前の段階, すなわち, **区別** (distinction) の概念なのである. 日常の言葉で多種多様に用いられ, 不思議な循環性をもつこの概念を説明する. なぜなら, 見学者がいなくては見ることができなく, 話手がいなくては話すことができないからである. 区別を論ずる者は, 区別の影響で他者と異なってくる. 区別とは, それ自身で理解が必要な概念なのである. 幸運にもいくつか例はある: 相違を明確にする; 平面に円を描く; 部屋の輪郭を描く; 素数の集合の元を示す等々. これから区別の構造や明快さや作用を表す枠組みについて話していくことにする.

空間や時空に対して用いる特別なモデルが, 区別の奇妙な塔なのである. 空集合から正整数を (実際, 空であることから空集合を創り出せ), 整数から有理数を, 有理数列の極限から実数を創り出すことを考え, さらに, 座標空間, 距離空間, 解釈のすべての意味論に至り, さらに, Minkowski の時空, Lorentz 群へ至る. もちろん, この話を他の方法で知りたいという欲求があるのも当然のことである. ([F12], [KVA], [LK17], [SB2] を参照のこと.)

いくつか説明方法がある. 話が横道にそれてしまう危険があるが, いかにして **Lorentz 群が区別との関係の中に自然に発生するか**, について述べてみたい. 通常の会話, 思考, 行動の世界の中で, 私達は暗黙の内に Lorentz 群を用いている. 第 II 部 第 9 節の Minkowski 平面における光束円錐座標で, Lorentz 変換が $\mathcal{L}[A,B] = [KA, K^{-1}B]$ の形をとっていたことを思い出してほしい. ここで, K は 2 つの慣性構造の相対的な速度から得られる零でない定数である. 実際, 時間と空間の座標 (t,x) に対して, 対応する光束円錐座標は $[t+x, t-x]$ である (光の速度を 1 とおいておく). したがって, $(t-x)$ は光シグナルが放射される時間として, また $(t+x)$ は点 (t,x) の事象で反射された後にシグナルを受け取る時間として, 解釈できる.

$1 = [1,1], \sigma = [1,-1]$ として, $[t+x, t-x] = t{\cdot}1 + x\sigma$ と書くと, 標準的座標と Pauli 代数を見い出すことができる. すなわち, 光束円錐座標系で,

$$[X,Y][Z,W] = [XZ, YW],$$
$$[X,Y] + [Z,W] = [X+Z, Y+W]$$

と定義するのが自然である. よって, $\mathcal{L}[A,B] = [K, K^{-1}][A,B]$ となり, Lorentz 変換はこの代数において積となる. この代数構造で, $\sigma^2 = [1,-1][1,-1] = [1,1] = 1$ となり, 空間の任意の方向に対して一様な代数的記述をするために, 任意の単位方

向に対して $\sigma^2 = 1$ とする. これは, 必然的に Clifford 代数構造を伴う [LK17]. 例えば, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を 3 次元空間内の直交する単位方向とし, 関係

$$\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x, \qquad \sigma_x\sigma_z = -\sigma_z\sigma_x,$$
$$\sigma_y\sigma_z = -\sigma_z\sigma_y, \qquad \sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1$$

を満たすとすると, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ と可換なスカラー a, b, c に対して,

$$(a\sigma_x + b\sigma_y + c\sigma_z)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

となる. よって, 任意の単位方向は 2 乗すると 1 になる.

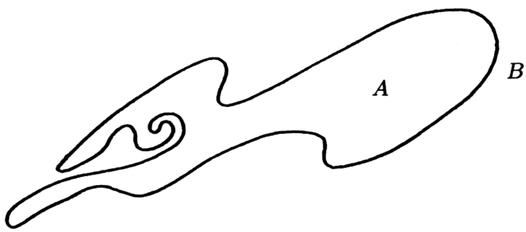
このような考えによって, エルミート 2×2 行列 H:

$$H = \begin{bmatrix} T + X & Y + \sqrt{-1}Z \\ Y - \sqrt{-1}Z & T - X \end{bmatrix} = T + X\sigma_x + Y\sigma_y + Z\sigma_z,$$
$$||H||^2 = \mathrm{Det}(H) = T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2$$

として, 時空の点の極小 Pauli 表現が得られる.

これらのことは, すべて光束円錐座標や相対論の原理からのみ得られる. この構造の下にもぐり込み, その構造がどのような区別から築き上げられてきたかを見てみようと思う ([LK30] を見よ).

そこで, 再び出発点から始める. A と B のラベルが付いた区別が与えられているとする.



この区別を $[A, B]$ とする. A, B を区別の両側の**計算値**と考える. (時空のシナリオにおいては, 区別は [**後, 前**] の形をとっており, 数的な時間が計算値となっている.) いま, 他の観察者が $[A', B']$ という計算値を与えたとする. 零でない ρ と λ で $A' = \rho A, B' = \lambda B$ と表す. すると,

$$[\rho, \lambda] = \sqrt{\rho\lambda}\,[K, K^{-1}].$$

ここで, $K = \sqrt{\rho/\lambda}$ である. よって,

$$\boxed{[A', B'] = \sqrt{\rho\lambda}\,[KA, K^{-1}B]}.$$

以上より, **スカラーの要素を除くと, 任意の区別の数的な変換は Lorentz 変換になってしまう.** この意味で, 任意の計算値において Lorentz 群が作用するのである. Lorentz 群は, (値をもつ) 区別の概念に沿って即座に現れてくる.

Pauli 代数自体がその最初の区別の際に正しいかどうかをもっとよく見てみるべきである. もう一度 A, B というラベルの付いた区別を考える. 最も原始的な計算値, すなわち, $+1$ と -1 をおいてみよう. すると, 計算値の空間は, $+1$ か -1, 印を付けるかつけないかの原始的な区別からなる. 印が付いていない方が -1, 付いている方が $+1$ を表すものとする.



$\longleftrightarrow [-1,+1]$



$\longleftrightarrow [+1,-1]$

どのような場合でも, 次の 2 つの基本的な作用がある:

(1) 内側, 外側の個々の状況の**変化** (change).

(2) 両側の相対的状況の**変換** (interchange).

変化を 2 つの作用 $p[A,B] = [+A,-B]$ (内側の変化), $q[A,B] = [-A,+B]$ (外側の変化) で表す. **変換**は $\Phi[A,B] = [B,A]$ で与える. すると, $pq[A,B] = [-A,-B] = -[A,B]$ となり, $pq = -1$ あるいは $q = -p$. よって, -1 は両側の状況の変化の作用を表している. 簡単のために, $\overline{p}$ で $-p$ を表すことにする. もちろん, 1 は恒等的作用である. 以上より, $1, p, \Phi$ と $p\Phi$ が得られた. $p\Phi$ については, $p\Phi[A,B] = [+B,-A]$ となる. よって,

$$(p\Phi)^2 = -1.$$

(これまで見てきた) 区別は, 自発的に -1 の平方根と, 2 乗すると 1 になるような 3 つの元 $(1, p, \Phi)$ を生み出した. 特別な可換である元 $\sqrt{-1}$ を導入することによって (もし, 存在するなら, なぜ複製しないのか?), $\sigma_x = p$, $\sigma_y = \Phi$, $\sigma_z = \sqrt{-1}\,p\Phi$ が得られ, 事象 $T + Xp + Y\Phi + Z\sqrt{-1}\,p\Phi$ は次のエルミート行列に対応する:

$$H = \begin{bmatrix} T+X & Y+\sqrt{-1}\,Z \\ Y-\sqrt{-1}\,Z & T-X \end{bmatrix}$$

$$= T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + X\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + Y\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sqrt{-1}\,Z\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

実際, 次の 2×2 行列

$$1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\qquad p=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\qquad \Phi=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

が, 左側からの積としての作用素の表現であり, $p\Phi=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ となる. こうして, **時空は区別の作用素環から直接に出現する.**

事象の基本的なエルミート表現は, 区別のアイディアから直接に発生する. さらにこの見方から, 4 次元空間は

$$[T+X,T-X]=T+\sigma X \quad と \quad Y+\sqrt{-1}\,Z$$

とに奇妙に分割されることがわかる.

$$T+Xp+(Y+Z\sqrt{-1}p)\Phi$$

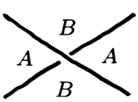
という形において, この分割は, **作用という面からみると**, 区別の**一方の側**だけを考えることと**両側**を考えることの間にある.

手法を別にして, 重要な点は, 時空というものがこの世の私達の存在の根底から出てくる基本的な概念だということである. とりあえずこのこととは少し離れて, 時空が q–スピンネットの中にどのように現れるかを見ていくことにしよう. 実は, 初めから構成しているのであって, すぐに示すことができる.

特に, 公式

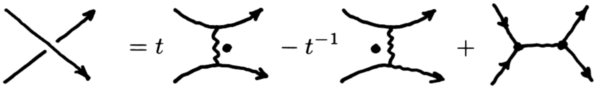


は, 順序のついた対 $[A,A^{-1}]$ で書くという, 結び目理論の方法としては新しい見方として現れる. (また, $[A,A^{-1}]$ は光束円錐座標における Lorentz 変換となる.) ここで, 交差点は区別 $[A,B]$ を示していると考える:

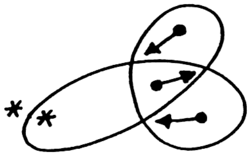


$\longleftrightarrow [A,B]$

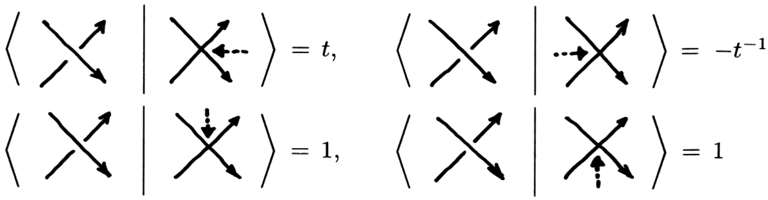
この段階では, 2 つの分離  と  は, Pauli 代数に関連する代数構造をもつには至らない. しかし, Conway-Alexander 多項式の FKT 模型 [LK2] においては, その代数構造をもつのである ([LK3],[LK9] を参照のこと). そしてこの FKT 模型においては, 次が成立した:



ここで, 点はステイト・マーカーの存在を表す. 絡み目射影図のステイトは, 選ばれた 2 つの隣合う領域には指針がなく (∗ 印がついている), 残りの領域では, 領域から頂点への指針の選択に含まれている:



ステイトにおいて, 各頂点は 1 つの指針を受け取る形になっている. また, 頂点の重みは次のようになる:



(負の符号の交差点では, t と t^{-1} が入れ換わる.)

(ステイト模型の直接の比較によって) 次の式が容易に示される:

$$\nabla_K(2i) = i^{w(K)/2}\langle K\rangle(\sqrt{i}).$$

ここで, $\nabla_K = \sum_S \langle K|S\rangle$ は, ステイト模型を用いた Conway-Alexander 多項式であり, $w(K)$ は K の捻り数 (writhe), $\langle K\rangle$ はブラケット多項式である (第 I 部第 3 節).

例題.



K S_1 S_2 S_3

$$\begin{aligned}
\nabla_K &= \langle K|S_1\rangle + \langle K|S_2\rangle + \langle K|S_3\rangle \\
&= (t)(-t^{-1}) + (-t^{-1})(-t^{-1}) + (t)(t) \\
&= -1 + t^{-2} + t^2 \\
\nabla_K &= (t - t^{-1})^2 + 1 \\
\nabla_K &= z^2 + 1 \\
\nabla_K(2i) &= -3.
\end{aligned}$$

演習問題. K の捻り数を $w(K)$ として, 次の等式を証明せよ:

$$\nabla_K(2i) = i^{w(K)/2}\langle K\rangle(\sqrt{i}\,).$$

時空の代数として取り扱うには, 次のようにすればよい: $P =$  $, Q =$  とおく. すると, ステイト模型の定式化における除外の原理により, $P^2 = P$, $Q^2 = Q$, $PQ = QP = 0$, $P + Q = 1$. したがって, P と Q を光束円錐の生成元

$$P = \frac{1+\sigma}{2}, \qquad Q = \frac{1-\sigma}{2} \qquad (\sigma^2 = 1)$$

とするとき,

A  $- A^{-1}$  $= AP - A^{-1}Q \equiv [A, A^{-1}]$

という式が時空の代数と一致する.

結局, 時空の基本概念は, ブラケット (Jones) と Conway-Alexander 多項式の定式化の中に直接現れていることを見てきたのである. q–スピン・ネットワークを構成する上で, この現象を心に留めておくことは有用であろう.

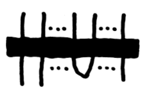
q–スピン・ネットワーク

最初の課題は, 標準的理論の反対称化作用素の一般化である. それらは, ある意味で, 図式

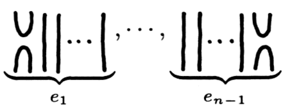


$= n!$


で表される射影作用素であり, 反対称性によって

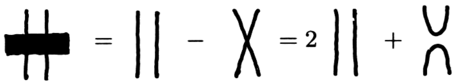
 $= 0$

であるから, これらは Temperley-Lieb 代数の自明でない生成元 $e_1, \cdots, e_{n-1}$:

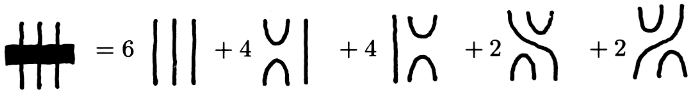


を打ち消してしまう. この注意は, (バイノル等式を用いる) 反対称化作用素の拡張

形は, Temperley-Lieb 代数の特別な射影作用素であることを意味する. 例えば,



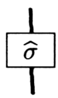
同様に,



適当な一般化をすれば, 一般 Temperley-Lieb 代数の中に, これらの作用素が生まれることをみよう.

バイノル等式の代わりに, ブラケットの等式 
を用い, ループの値は $\delta = -A^2 - A^{-2}$ とする. q–**スピン・ネットワーク**とは (以下に定義されるように), 反対称化作用素として, 指定された特別な曲線の交差点をもつ絡み目の図形表示以外のなにものでもない. したがって, q–スピン・ネットワークは, それ自身のブラケット多項式を計算することになるのである.

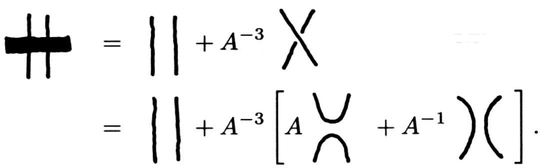
q–対称化作用素 (q–symmetrizer)  を, 次の式で定義する:

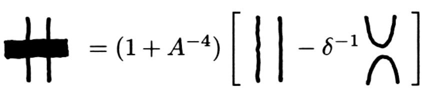
 $= \sum_{\sigma \in S_n} (A^{-3})^{T(\sigma)}$ 

ここで, $T(\sigma)$ は σ を恒等的にするための互換の最小数, $\hat{\sigma}$ は負の交差点だけで σ を表したときの最小のブレイドである. 負の交差点だけで表すとは, すべての交差点がブレイドの方向に対して下の図のような形をしていることである.



例題 1.



したがって,  ここで, $\delta = -A^2 - A^{-2}$ である. $1 - \delta^{-1} e_1$ を, 第 I 部 第 16 節で述べた元 f_1 とみなすことができる. これが最初の Temperley-Lieb 射影作用素である.

量子の階乗 (quantum factorial) $[n]!$ を次の式で定義する:

$$\boxed{[n]! = \sum_{\sigma \in S_n} (A^{-4})^{T(\sigma)}}.$$

演習問題. 以下のことを示せ.

$$[n]! = \sum_{\sigma \in S_n} (A^{-4})^{T(\sigma)} \quad \Longrightarrow \quad [n]! = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - A^{-4k}}{1 - A^{-4}} \right).$$

上の例題においては, $[2]! = 1 + A^{-4}$ より,

 $= [2]! f_1.$

第 I 部 第 16 節において, Temperley-Lieb 射影作用素が次の式で定義されたことを思い出そう:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} f_0 & = & 1 \\ f_{n+1} & = & f_n - \mu_{n+1} f_n e_{n+1} f_n \\ \mu_1 & = & 1/\delta \\ \mu_{n+1} & = & 1/(\delta - \mu_n) \end{array} \right\}.$$

よって, 次が成り立つ:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 - \delta^{-1} e_1 \\ f_2 &= 1 - \mu_2(e_1 + e_2) + \mu_1 \mu_2 (e_1 e_2 + e_2 e_1) \\ \mu_1 &= 1/\delta \\ \mu_2 &= \delta/(\delta^2 - 1). \end{aligned}$$

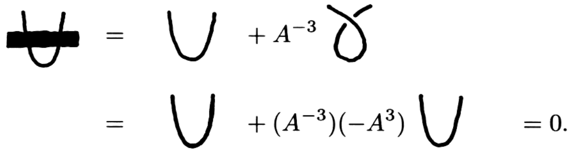
定理 13.1. $\delta = -A^2 - A^{-2}$ とすると, Temperley-Lieb 代数の元 f_n は q–対称化作用素と同値である. 特に, 次の式が成立する:

$f_{(n-1)} = \dfrac{1}{[n]!}$ 

証明. f_n は次の式で特徴づけられる:

$$f_n^2 = f_n, \quad e_i f_n = f_n e_i = 0 \quad (i = 1, \cdots, n-1).$$

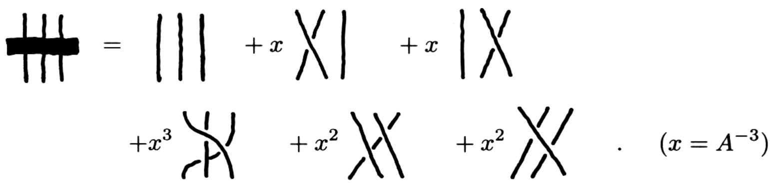
q–対称化作用素が $e_1, \cdots, e_{n-1}$ を打ち消してしまうことは, 下の $n = 2$ の例によってわかる:



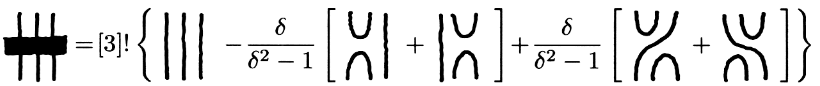
よって, 証明された. □

これらの一般的な反対称化作用素の構成を強調してきたのは, 第 I 部第 16 節で述べた Lickorish によるブラケットを用いた 3 次元多様体の不変量の構成における結び目理論的な中心要素を, それらが明確にするからなのである. すなわち, この 3 次元多様体の不変量は, 実際に q–スピン・ネットワークの計算値なのである.

例題 2.

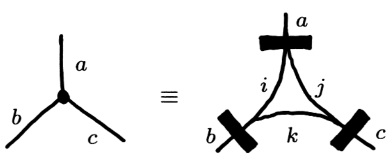


したがって,



演習問題. この式を, 直接ブラケットの展開式を用いて, 証明せよ.

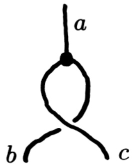
ここまでくると, q–スピンネットに対する 3 価の頂点を, 反対称化作用素の代わりに q–対称化作用素を用いて, 次のように定義できる:



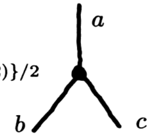
$$i + j = a$$
$$j + k = c$$
$$i + k = b$$

組み替えの理論を直接に調べることにより, この論理構成から q–角運動量を定義し, さらに 3 次元多様体の不変量を作り出すことができる. この仕事に関しては [LK19],[LK20] を参照されたい.

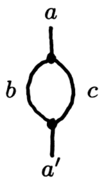
演習問題.



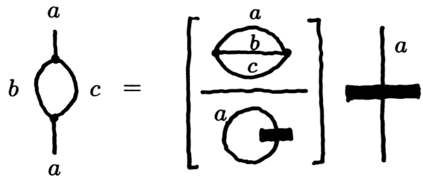
$$= (-1)^{(b+c-a)/2} A^{\{b(b+2)+c(c+2)-a(a+2)\}/2}$$



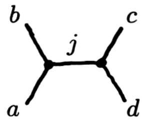
演習問題.



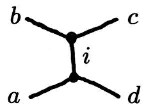
$= \emptyset \quad (a \neq a'),$



演習問題.



$$= \sum_i \left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\}$$



が与えられたとき, 次 (Elliot-Biedenharn 等式) が成立することを示せ:



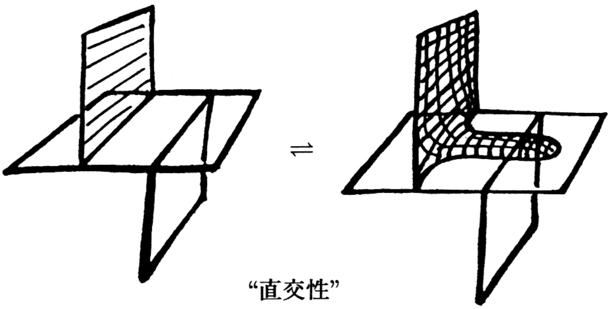
$$\left\{ \begin{matrix} b & c & j \\ d & f & i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} g & a & k \\ b & j & f \end{matrix} \right\} = \sum_{\ell} \left\{ \begin{matrix} g & a & \ell \\ i & d & f \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ell & a & k \\ b & c & i \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} k & c & j \\ d & g & \ell \end{matrix} \right\}.$$

演習問題.(直交性)

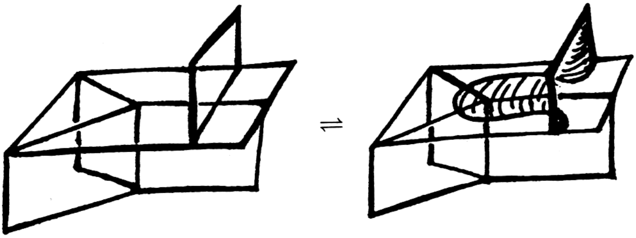
$$\sum_i \left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & a & k \\ b & c & i \end{matrix} \right\} = \delta_{jk}.$$

演習問題. 論文 [TU2] を読破せよ.

この論文で Turaev と Viro は, $q-6j$ シンボルを含むステイトの和を用いて, 3 次元多様体の不変量を構成している. [LK20] において (Sostenes Lins との共著であるが), 著者はこのアイデアを q–スピン・ネットワークの組み替え理論に基づく理論に移す方法を示している. 双方のアプローチの根底にあるトポロジーは, 次に示す **Matveev 移動** [MAT] によっている.



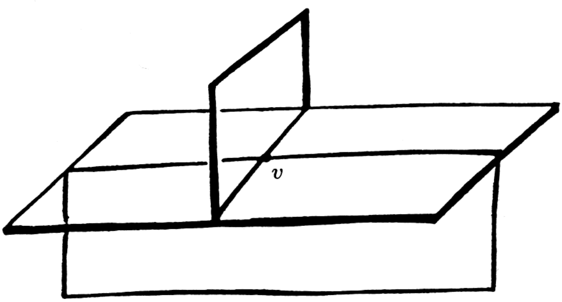
“直交性”



“Elliot-Biedenharn”

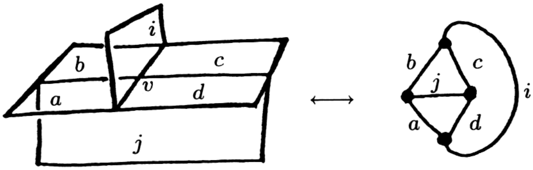
Matveev 移動

これらは, 3 次元多様体の区分的線形な同相写像を生成する特別な芯 (スパイン; spine) の移動である. この芯において, 次の図のような典型的な頂点は, 4 つの隣合う 1 単体, 6 つの隣合う 2 単体に現れる. 各 1 単体は, 3 つの 2 単体に接続している.

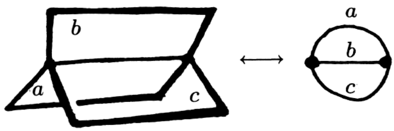


整数 $r \geq 3$ に対して, **色の集合**を $C(r) = \{0, 1, 2, \cdots, r-2\}$ とする. 3 次元多様体 M のレベル r のステイトとは, $C(r)$ の色を M の芯の各 2 次元の面に割り当てることである.

M のステイト S が与えられたら, 次の図のように, 各頂点における面の色が辺の色となるような四面体の図を割り当てる:



各辺には, 3 つ組の色に対応する $q-3j$ シンボルを対応させる:

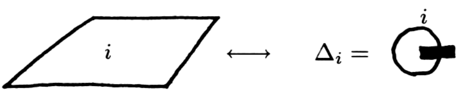


$\equiv \theta(a,b,c)$

そして, 各面には, $x=-A^2$ としたときの Chebyshev 多項式

$$\Delta_i = (x^{i+1} - x^{-(i+1)})/(x - x^{-1})$$

を割り当てるのである.



$\longleftrightarrow \quad \Delta_i = \quad /[i]!.$

ここで, 添字はその面の色である.

そこで, $A = e^{i\pi/2r}$ に対して, $I(M,r)$ を次のように定義する: レベル r の各ステイトについて, 頂点と面の計算値を掛け, 辺の計算値で割ったものを求め, レベル r のすべてのステイトにわたってこれの総和をとる. **ここでのステイトの計算値は, 許容できるもので, かつ零ではないものとする.** すなわち, もしステイト S において辺が 0 の計算値をもつならば, このステイトは総和からはずされるのである. r が与えられたとき, 辺の計算値は確かに $a+b+c \leq 2r-4$ のときに零ではない.

$$I(M,r) = \sum_S \frac{\prod_v \mathrm{TET}(v,S) \prod_f \Delta_{S(f)}}{\prod_e \theta(S_a(e), S_b(e), S_c(e))}$$

ここで, $\mathrm{TET}(v,S)$ は, ステイト S の頂点 v における四面体の計算値を表す. $S(f)$ は面 f の色であり, $S_a(e), S_b(e), S_c(e)$ は, 芯の辺に対応する 3 つ組の色を表している.

これは, [LK20] で用いた Turaev-Viro 不変量の式である. $I(M,r)$ が Matveev 移動で不変であることは, 直交性と Elliot-Biedenharn 等式により得られる. q–スピンネットは, この話題に対して別の基本的なアプローチを提供しているのである.

[TU5] において, Turaev は次の定理を公表している:

定理 (Turaev). $|M|_q$ を Turaev-Viro 不変量, $Z_q(M)$ を $SU(2)_q$ に対する Reshetikhin-Turaev 不変量とする. このとき, 次が成り立つ:

$$|M|_q = Z_q(M)\overline{Z_q(M)}.$$

ここで, $\overline{Z_q(M)}$ は複素共役を表している. □

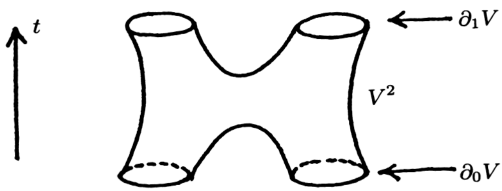
$Z_q(M)$ は, 第 I 部第 16 節で述べた手術不変量と同一視することができるので, (勇敢な) 読者には $I(M,r) = |Z_q(M,r)|^2$ を証明することを勧める.

演習問題. 論文 [HAS] を読破せよ. この著者は, 量子重力と $6j$ シンボルの半古典的極限の関係を示唆している. この論文と, q–スピン・ネットワークの関係を調べよ. また, 論文 [MOU],[CR3] のアイデアと比較してみよ.

14 節　結び目とストリング†

もつれた (knotted) ストリング (string) について, いろいろ思索するのは自然なことである. 本書を書いている今の段階では, そういった思索は, あくまで推論でしかない. それにもかかわらず, この分野にはいくつかのすばらしい考え方の組合せがあり, それらは, 結び目理論と物理学の双方に反映されている. ([ROB], [ZA], [Z2] を見よ.)

そもそも, 幾何学的対象としてのストリングは, 時空の中に埋め込まれた曲面のことである. 話の都合上, その時空は 4 次元であると仮定しよう. (少しあとで, 結び目を 10 次元空間内のスーパーストリングと関係づけることを考えることになる.) 4 次元に埋め込まれた曲面は, それ自身もつれる (knotted) ことができる. 例えば, ユークリッドの 4 次元空間で, もつれている 2 次元球面が存在する. しかしながら, トポロジーで最も興味深い事柄は, 時空に埋め込まれたストリング相互作用をもつ頂点 (string interaction vertex) について考えることである. 抽象的には, 頂点 (vertex) とは, 下図に示したような 4 つ穴のあいた球面のことである.



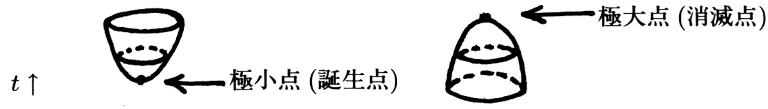
それゆえ, 4 値頂点 (four-vertex) とは, 2 つの 1 次元のストリング (紐) が, $t=0$ で 2 つの穴をもち, $t=1$ でも 2 つの穴をもつ種数 0 の曲面をなぞりながら, 相互作用する過程とみなすことができる. ここで, V^2 でこの曲面を表すことにする. いま, 時空を $\mathbf{E}^4 = \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} = \{(x,t)\}$ とし, 次のような埋め込み $F: V^2 \longrightarrow \mathbf{E}^4$ を考える: $\partial_0 V \hookrightarrow \mathbf{R}^3 \times 0$, $\partial_1 V \hookrightarrow \mathbf{R}^3 \times 1$. ここで, $\partial_0 V$ と $\partial_1 V$ は, 上の図中に示してあるように, 各々 2 つの円周からなる部分的な境界である. 埋め込みは滑らか (smooth) であるとし, それは次のことを意味するものとする:

†訳注: 本節では, 「4 次元空間内の曲面を, 3 次元超平面で連続的に裁断して取り扱う」という方法 (motion picture method という) が本質的な役割をはたしている. この話題については [KSS]* で詳しく論じられているので, 参照されたい.

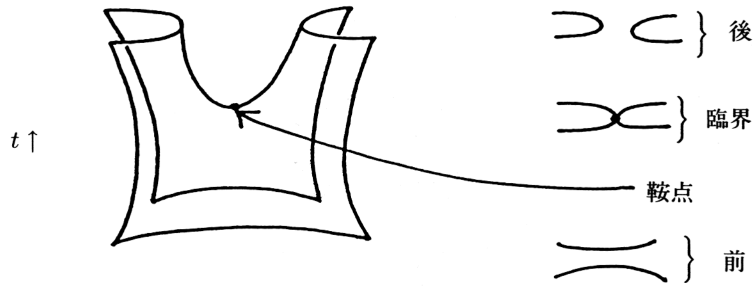
(i) 有限個の例外を除いたすべてのレベル $F(V^2) \cap \{(x,t)|t$ 固定$\} = F_t(V)$ は, 円周の集合の $\mathbf{R}_t^3 = \{(x,t)|x \in \mathbf{R}^3\}$ への埋め込み (つまり, 絡み目) である.

(ii) 臨界 (critical) レベルは特異点を伴い, その特異点は, **極小点** (minima; 誕生点 (birth)), **極大点** (maxima; 消滅点 (death)), **鞍点** (saddle points) のいずれかである.

レベル t_0 での誕生点, つまり極小点においては 1 点が突然現れる. その点は, t_0 のすぐ上のレベルではもつれていない円周となる. 消滅点, つまり極大点では, 円周が点へと縮まっていき, そこより高いレベルでは消えてしまう.



鞍点においては, 下図のように 2 つの曲線が接して, 離れていく.



曲線の向きについては, いつも目を配っておきたい. 実際, 向き付けられた鞍点およびその前後では, 次のような列が現れる.



標準的な頂点が生じる要件は, 次のようである:

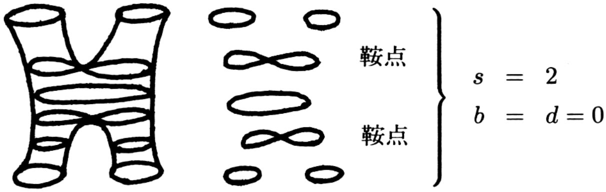
(i) 2 つの結び目から始める.

(ii) 誕生点, 消滅点および鞍点の列を経過した後, 最後は 2 つの結び目で終る.

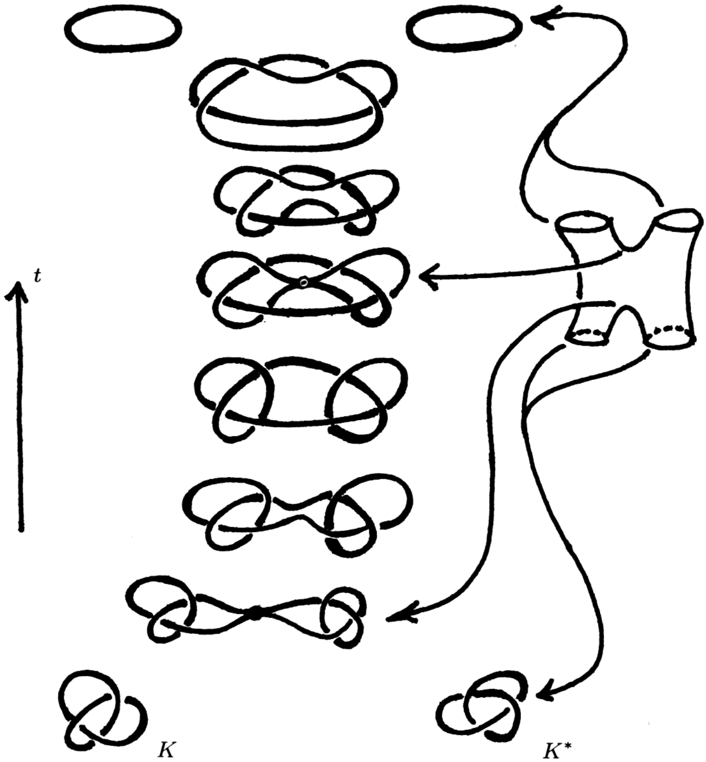
(iii) このようにしてつくられた曲面の種数は 0 である.

(曲面が連結である限り, 最後の条件は, $s = b + d + 2$ という条件と同値である. ここで s は鞍点, b は誕生点, d は消滅点の個数をそれぞれ表す.)

例えば, 2 つのもつれていないストリングに対しては, 頂点は次のように見える.



驚くべきことには, 2 つのもつれた紐は, このように埋め込まれた 4 頂点で相互作用し, まったく異なる結び目の組を生成することができる. 例えば, 三葉結び目とその鏡像は, 互いに消しあって, 2 つの平凡な結び目を生成する.

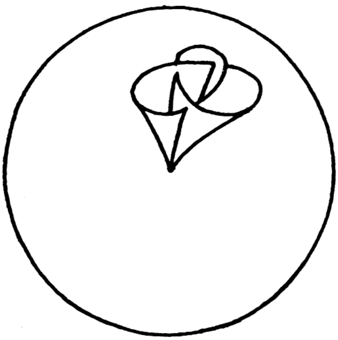


一般に, 結び目とその鏡像の組は, このようにして解けてしまう. ある結び目については, それらはスライス結び目 (slice knot) とよばれているものだが ([FOX1] を見よ), 平凡な結び目と作用して消えていってしまう. 一般的に, この種のもつれ

たストリングの相互作用からなる大きな現象があり, これに付随するトポロジー的問題は, 3 次元と 4 次元の接点の中心的な研究課題である. この数学的構造は, もつれたストリングのあらゆる理論において, 引き継がれていくであろう.

さて, もつれたストリングに対する根本的な難点は, スーパーストリングは必然的に 10 次元の空間に存在するのだが, 時空 (space-time) におけるストリングの埋め込みに関して, もつれるという現象を説明するに足る十分に詳細な理論がいまのところないということである. その上さらに, 1 次元の曲線と 2 次元の曲面は, $\mathbf{R}^{10}$ においては, 常にもつれていない (平凡である). 安易な逃げ道は, 4 次元の時空における対象のようにストリングを研究することは有益である, と宣言してしまうことである.

難しいやり方としては, スーパーストリングに, もつれるという概念を組み入れる方法を見つけるというものがある. きちんとした裏付けのない考えであるが, 一つのアイデアがある. たくさんの結び目や絡み目が, 代数的特異点の近傍境界として表されることを思い出そう ([MI]). 例えば, 右手系の三葉結び目は $\mathbf{C}^2$ における特異多様体 (singular variety) $Z_1^2 + Z_2^3 = 0$ の近傍境界である. すなわち, $K = \{(z_1, z_2) | z_1^2 + z_2^3 = 0$ かつ $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} = \mathcal{L}(K) = V(z_1^2 + z_2^3) \cap S^3$ である.



この代数的状況において, $\mathbf{R}^{10}$ 内の単位球面の中にある 7 次元多様体へと, K を "懸垂する (suspend)" ことができる.

$$\Sigma^7(K) = \mathcal{V}(z_1^2 + z_2^3 + (z_3^2 + z_4^2 + z_5^2)) \cap S^9,$$

$$\Sigma^7(K) \subset S^9 \subset \mathbf{R}^{10}.$$

$\Sigma^7(K) \subset \mathbf{R}^{10}$ をストリングと見なすのは少々抵抗がある. 結び目に付随するこの 7 次元多様体の振動モード (vibrational modes) を考慮するため, 理論を書き直す必要がある. 多様体 $\Sigma^7(K)$ は, 直交群 $O(3)$ による自然な作用をもち ((z_3, z_4, z_5) に作用する), $\Sigma^7(K)/O(3) \cong D^4$ である. ただし $K \subset S^3 \subset D^4$ で軌道型 (orbit

type) の包含関係を表すものとする. このようにして, $\Sigma^7(K)$ から (D^4 としての) 時空と結び目を再生することができる. この構成は, たいへん一般的であり ([LK] 参照), **任意の**結び目 $K \subset S^3$ を $O(3)$ 多様体 $\Sigma^7(K) \subset \mathbf{R}^{10}$ と関連づけることができる. こうして, この絡み目多様体 (link-manifold) の構成は, 結び目理論とスーパーストリング理論の接点を与える手段となり得る.

多様体 $\Sigma^7(K)$ はたいへん興味深い. 例えば, $\Sigma^7(3,5)$ は Milnor のエキゾチック 7 次元球面である [MI]. ここで $(3,5)$ はトーラス結び目の $(3,5)$ 型, つまり, トーラスの緯線方向に 5 回巻きつく間に経線方向に 3 回巻きつくような結び目を表す. それゆえ, $\mathbf{R}^{10}$ 内のエキゾチック微分可能球面の振動モードについて考慮しているのである.

エキゾチック性を言及することは, スーパーストリング理論との別の関連を思い起こさせる. [WIT4] において Witten は, 10 次元と 11 次元の多様体のエキゾチック微分構造と関連のあるスーパーストリング理論における大域的アノマリーを研究している. [LK22] において, 筆者はこれらのアノマリーとエキゾチック多様体の特殊な構成法の関係について研究している. この構成法は, 今述べた絡み目多様体 (link manifold) と代数多様体 (algebraic variety) の構成も含んでいるが, それは, それらの 11 次元での化身なのである.

10 次元については, エキゾチック 10 次元球面が平行化可能な多様体 (parallelizable manifold) の境界とはなり得ないことから, 状況は異なってくる. この観点から見ると 「**このような非常にエキゾチックな球面**は$\pi_{n+k}(S^k)/\mathrm{Im}(J)$ で分類される」 ということを指摘しておくことは有益である. ここで, $\pi_{n+k}(S^k)$ は球面 S^k の (安定な) ホモトピー群, $\mathrm{Im}(J)$ は J準同型

$$J : \pi_n(SO(k)) \longrightarrow \pi_{n+k}(S^k)$$

の像を表す. 非常にエキゾチックな球面は, ホモトピー論のもっともわかりにくい領域に存在している. これに関する話の完全な議論は [KV] にある. 上の J準同型は, Dirac の紐トリックを思い出させる. その最も単純な場合は,

$$J : \pi_1(SO(3)) \longrightarrow \pi_4(S^3)$$

の場合である. 構成法自体は, 第 11 節の 「ベルト捻りの幾何」 とまったく同様であり, ここでは $\pi_4(S^3) \cong \mathbf{Z}_2$ の生成元を構成する. これを確認するために, まず J を定義しなくてはならない. $g : S^n \longrightarrow SO(k)$ は $\pi_n(SO(k))$ の元を表すものとする. これより, $g^*(a,b) = g(a)b$ とすることで, $g^* : S^n \times S^{k-1} \longrightarrow S^{k-1}$ を得る. 任意の写像 $H : X \times Y \longrightarrow Z$ に付随して, 写像 $\widehat{H} : X * Y \longrightarrow S(Z)$ が存在する. ただし $X * Y$ は X の点と Y の点を結合するすべての線分からなる空間を表すものとし, $S(Z)$ は Z と 2 点の結合によって得られる Z の**サスペンション**

(suspension) を表すものとする. 一般に, $S^n * S^{k-1} \cong S^{n+k}$ かつ $S(S^{k-1}) \cong S^k$ となる. したがって, g^* は写像 $\widehat{g}^* : S^{n+k} \longrightarrow S^k$ を誘導し, これは $\pi_{n+k}(S^k)$ の元となる. この g と $\widehat{g}^*$ の関係が J 準同型である.

$\pi_1(SO(3))$ の場合には, S^2 の北極点をひとまわりするループを表すような $g : S^1 \longrightarrow SO(3)$ がある. 写像

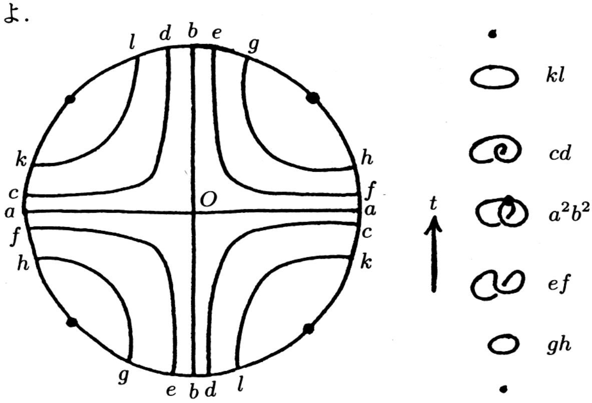
$$g^* : S^1 \times S^2 \longrightarrow S^2$$

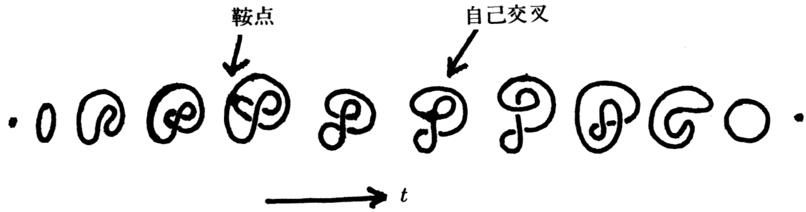
は, $\widehat{g}^* : S^1 * S^2 \longrightarrow S(S^2)$, したがって, $\widehat{g}^* : S^4 \longrightarrow S^3$ を誘導する. この元は, $\pi_4(S^3)$ を生成する. ベルト・トリックにおいても, 同じアイデアを用いた (結論は別であるが). $g : S^1 \longrightarrow SO(3)$ は $g : I \longrightarrow SO(3)$ を引き起こす. ここで, I は単位区間で, $g(0) = g(1)$ である. そして, $g^*(t,p) = (g(t)p, t)$ より, $g^* : I \times S^2 \longrightarrow I \times S^2$ を定め, g^* を $0 \times S^2$ と $1 \times S^2$ の間で, 延ばしたベルトを捻るために用いた. 720° 捻ったベルトが端を動かさずに元通りに直せるという事実は, 実際に $\pi_4(S^3) \cong \mathbf{Z}_2$ を視覚化したものである.

J準同型の像のなかにある $\pi_{n+k}(S^k)$ の元は, 平行化可能な多様体の境界となるエキゾチック球面 (例えば, 7 次元と 11 次元の Milnor 球面のように) と対応をつけることができる. それゆえ, もつれた紐の概念や, 高次元の異常性, ベルト・トリック, それに球面のホモトピー群の複雑さの間に関連がつく.

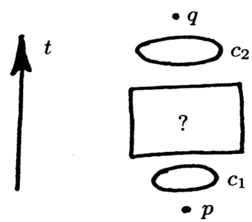
演習問題 14.1. 任意の結び目 K は, その鏡像 K^* と作用して, $3+1$ 次元時空に埋め込まれた種数 0 のストリング頂点を用いることにより, 2 つの平凡な結び目を生じることを示せ.

演習問題 14.2. **射影平面** (projective plane) $\mathbf{P}^2$ は, 定義によると, 2 次元球面 S^2 ($S^2 = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x^2+y^2+z^2 = 1$) の対心写像 $T : S^2 \longrightarrow S^2$, $T(x,y,z) = (-x,-y,-z)$ による商空間である. トポロジー的に言うと, これは, 円板 D^2 から, その境界の対心点を同一視して得られるものと同じである. 次の図のように, $\mathbf{P}^2$を分解してみよ.

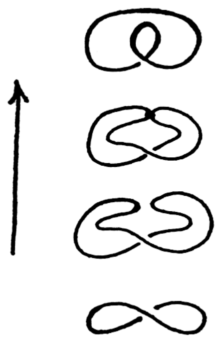




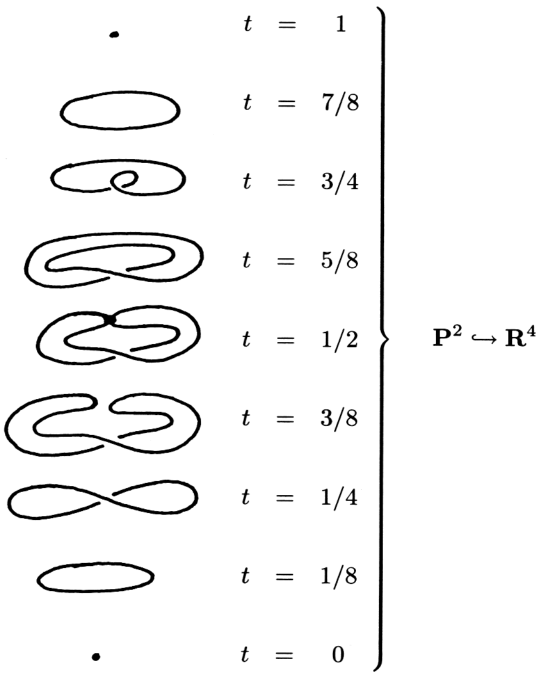
この図において, 円板の境界上の互いに同一視される点は, 同じ記号で表した. それゆえ, c, d を端点とする 2 つの弧は, $\mathbf{P}^2$ の中で円周を形成している. e, f を端点とする弧も同様である. また, a, a または b, b とラベル付けされた弧も, それぞれ円周をつくる. したがって, 点 p, q 以外では, この図は $\mathbf{P}^2$ の互いに交わらない円周への分解を与えていることがわかる. (ただし, 円周 a, b が θ で交わっていることを除く.) それゆえ, 下図のように, $\mathbf{P}^2$ を, 点 p を誕生点とし, p が次第に円周 c_1 になり, c_1 は鞍点を特異点として通り, 別の円周 c_2 となり, c_2 が q で消滅するというように想像することができる.



しかし, どのようにして, 円周が自分自身と鞍点を作り, また 1 つの円周となるのだろうか? その答えは, 捻り (twist) の中にある.

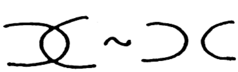
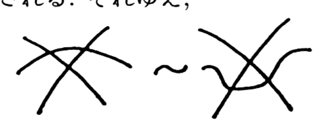


このアイデアによって, $\mathbf{P}^2$ を $\mathbf{R}^4$ の中に次のようにして埋め込むことができるのである:



上図の各レベルは, $0 \le t \le 1$ なる t に対し, 交わり $\mathbf{P}^2 \cap (\mathbf{R}^4 \times t)$ を表している. $t = 0$ には誕生点 (最小点 (minimum)) がある. t が $1/4$ から $3/8$ へと変化するにつれて, 曲線は全同位 (ambient isotopy) で $t = 3/8$ における捻れた形になるように変化していく. この $\mathbf{R}^4$ における全同位のトレースは, 特異点をもたないことに気をつけよう. 鞍点は $t = 1/2$ で生じる.

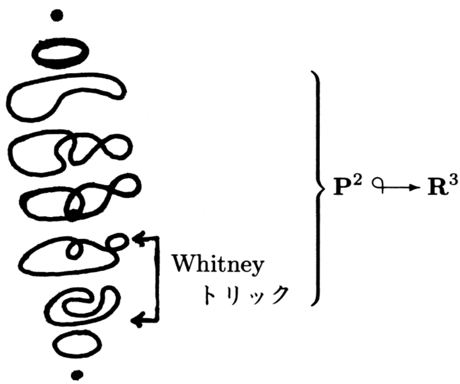
この $\mathbf{P}^2$ の $\mathbf{R}^4$ への埋め込みと対応して, $\mathbf{P}^2$ の $\mathbf{R}^3$ への**はめ込み** (immersion) が存在する. $\mathbf{R}^3$ への曲面のはめ込みとは, その像との自己交差をもち得る写像のことであるが, その自己交差は, すべて局所横断的 (locally transverse) な曲面の交わり, つまり $\mathbf{R}^3$ で x–y 平面と x–z 平面が交わっているような形のものである. はめ込みは, 各レベルが曲線の平面へのはめ込み (特異点をもってもよい) となっているレベルの列を与えることによって表すことができる. レベルの積み重ね全体が, $\mathbf{R}^3$ 内の曲面を表現している. 平面から平面に動かすのに, 全同位を使わずに, **正則ホモトピー** (regular homotopy) を使ってみよう. 正則ホモトピーは, II 型と III 型の Reidemeister 移動の射影で生成される. それゆえ,

 と 

は基礎的な正則ホモトピーである. Whitney のトリックは, 正則ホモトピーの基本的な例である:

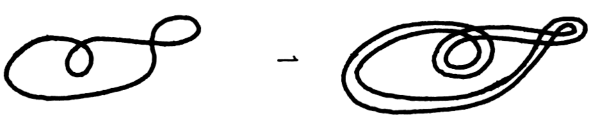


Whitney のトリックの助けを借りることによって, $\mathbf{P}^2$ の $\mathbf{R}^3$ へのはめ込みを得ることができる.

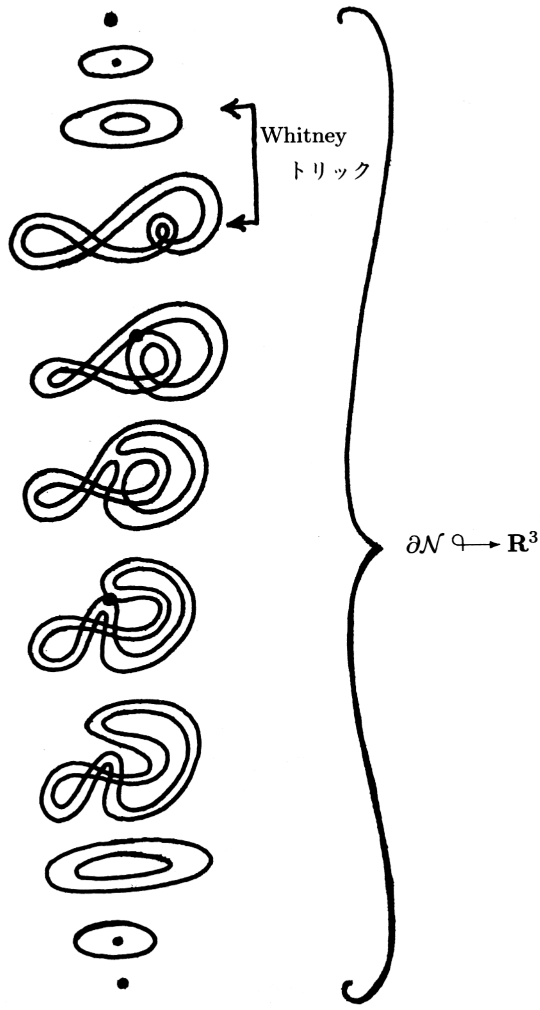


問題. 上記のはめ込みは, 各レベルが, その原像にある極小点, 極大点, 鞍点, または**正則同位** (regular isotopy) のいずれかから得られているような, $\mathbf{P}^2$ の $\mathbf{R}^4$ への埋め込みによって被覆されている, と考える人もあるだろう. そうではないことを証明せよ.

上で示したこのはめ込み $\mathbf{P}^2 \looparrowright \mathbf{R}^3$ は, 法束 (normal bundle) をもつ. これは, $\mathbf{R}^3$ 内の曲面に対する短い法線からなる $\mathbf{P}^2 \looparrowright \mathbf{R}^3$ の近傍をとることによって得られる. この法束 $\mathcal{N}$ は, 各レベルの曲線を, 次のようにその曲線を太らせたもので置き換えることによって構成することができる:



$\mathcal{N}$ の境界 $\partial\mathcal{N}$ は, したがって, はめ込み $\mathbf{P}^2 \looparrowright \mathbf{R}^4$ の一種の二重化版 (doubled version) として現れる.



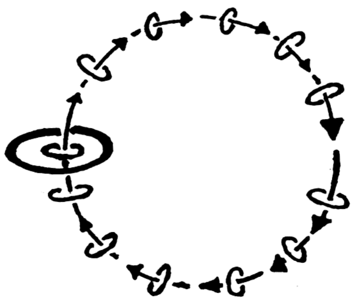
問題. $\mathcal{N}$ の境界 $\partial\mathcal{N}$ は 2 次元球面 S^2 に同相であることを示せ. その結果, 誘導されるはめ込み $\partial\mathcal{N} \looparrowright \mathbf{R}^3$ は, S^2 の $\mathbf{R}^3$ へのはめ込みとなる. 法束は (正から負の法線方向に) 対称性をもつので, このはめ込み $\alpha : S^2 \looparrowright \mathbf{R}^3$ を**反転する**ことができる. 別の言い方をすれば, 正と負の法線を入れ換えることによって, この 2 次元球面を簡単に裏返すことができるということである. はめ込みと正則ホモトピーによって, 標準的に埋め込まれた $S^2 \subset \mathbf{R}^3$ を裏返すことができるかということは, それほど明らかなことではない. それにもかかわらずこれは可能なので

ある ([FRA]). この反転は, **上で述べたはめ込み** $\alpha : S^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ **が** S^2 **の標準的な埋め込みに正則ホモトープである**ということの結果として導かれる.

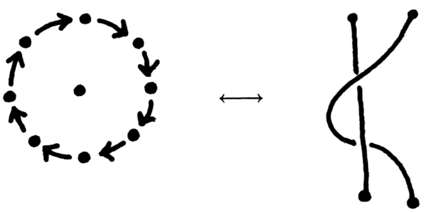
ここで, この最後の命題を一連の図を用いて証明せよ. 反転を 4 次元空間に持ち上げることにより, もつれたストリングを積み上げた一連の図において, 球面の裏返しについて考察せよ.

演習問題 14.3. 4 値頂点の相互作用を受けることができるような結び目の組をみつけることによって, もつれたストリングの相互作用の別の例を調べよ.

演習問題 14.4 (運動群 (motion group)). Dahm と Goldsmith は, Artin のブレイド群を $\mathbf{R}^3$ 内の結び目と絡み目の運動群 (motion group) へと一般化した. ([G] とその参考文献を見よ.) この一般化のアイデアは, 平面上の異なるいくつかの点の配列空間 (configuration space) の基本群としてのブレイド群に基づいている. 点の編み込み (braiding) を考えられるのと同様に, 3 次元空間の結び目と絡み目の配列空間の閉道 (closed path) を調べることができる. このような運動の最も単純な例は, 1 つの絡まっていない円周が他の円をくぐり抜けるとき, つまり下図に示したようなときである:



これはちょうど, 1 点が他の 1 点の周りを動くときと類似している.



$\mathbf{R}^3$ 内の n 個の互いに交わらない円周に対する運動群 (motion group) は, 群 $\mathrm{Aut}(n) = \mathrm{Aut}(F(X_1, \cdots, X_n))$ ($X_1, \cdots, X_n$ を自由生成元とする自由群の自己同型群) の部分群で, ($n = 2$ のとき, つまりストリングが 2 本のときには) 以下のよ

うな T と E と S で生成されるものに同型であることがわかる:

$$\begin{array}{rclcrcl} T(x_1) & = & x_1^{-1}, & \qquad & T(x_2) & = & x_2, \\ E(x_1) & = & x_2, & & E(x_2) & = & x_1, \\ S(x_1) & = & x_2 x_1 x_2^{-1}, & & S(x_2) & = & x_2. \end{array}$$

Imbo と Brounstein [IM2] は, $\mathbf{R}^3$ 内の 2 本の平凡なストリングに対する運動群を計算し, それは,

$$\langle T, E, S \,|\, T^2 = E^2 = (TE)^4 = TST^{-1}S^{-1} = (TESE)^2 = 1 \rangle$$

であることを示した. これは, (ボゾン・フェルミオン以外の) 奇妙な統計性を示唆している ([IM1], [LK28]).

問題. この結果を証明し, かつ, n 本のストリングの場合に拡張せよ.

演習問題. 論文 [JE] を読んで, これらのアイデア (絡んだりもつれたりした量子化された流れとしての基本粒子) を最近の進展に照らし合わせて, その意味を理解せよ. ([RA] と比べてみよ.)

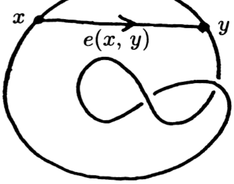
15 節　DNA と量子場の理論

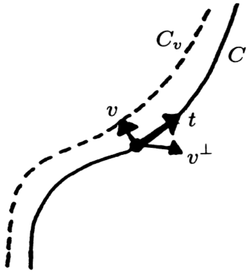
結び目理論と DNA の研究のかかわりを考えるとき, 空間曲線の絡み (linking), 捻れ (twisting) および捻り (writhing) の関係を明らかにした James White [W] の定理は最も有用なものの一つである. 絡み数やより高い位数の不変量を, トポロジー的量子場の理論における経路積分のように Witten [WIT2] 流に書き換えたのち, これらが新たな視点からはどのように見えたかを示すことは, 大事なことである. 本節ではその関係について簡単に述べる. まずは, White の定理を思い出すことから始めよう.

C を空間曲線で単位法線ベクトル $v, v^{\perp}$ と単位接線ベクトル t をもつものとする (C 上の各点で, v と $v^{\perp}$ は互いに, さらにそれぞれ t とも直交しており, 滑らかに変化する座標系 $\langle v, v^{\perp}, t\rangle$ を形成している). C_v を, $0 < \varepsilon \ll 1$ のとき εv の先端が描く曲線とする. この C_v と C の絡み数を, $\mathrm{Lk} = \mathrm{Lk}(C, C_v)$ で表す. 枠付き曲線 C の**総捻れ数** (total twist) Tw とは $\mathrm{Tw} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int v^{\perp} \cdot dv$ で定義されるものである. 与えられた点 $(x, y) \in C \times C$ に対して, $x \neq y$ のときに $e(x, y) = (y - x)/|y - x|$ と定義する. ただし, x が y に近づくとき, $e(x, y) \longrightarrow t/|t|$ (t は x における C の単位接ベクトル) となる. このとき e は $C \times C$ のすべての点で定義可能であり, したがって e は $e: C \times C \longrightarrow S^2$ とみなせる. $d\Sigma$ で S^2 上の面積要素を表すとき, 曲線 C の (空間における) **捻り数** (writhe) を次の式で定義する:

$$\mathrm{Wr} = \frac{1}{4\pi}\int_{C\times C} e^{*}d\Sigma = \frac{1}{4\pi}\int_{z\in S^2} Cr(z)dz.$$

ここで $Cr(z) = \sum_{p\in e^{-1}(z)} J(p)$ とし, さらに e の Jacobi 行列式の符号に従って $J(p) = \pm 1$ とする.





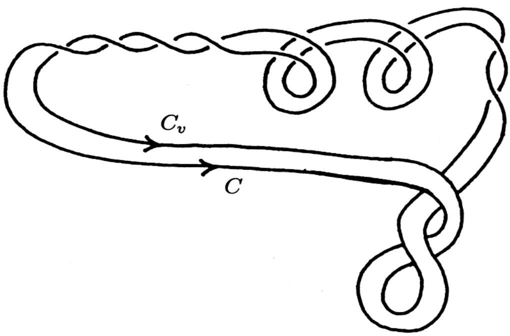
これまでの話から容易にわかるが, この (空間における) 捻り数は (結び目の図形表示のように) 平面のごく近くに埋め込まれた曲線の捻り数 (交差の符号の和) と一致する.

以上の定義を用いると, White の定理は,

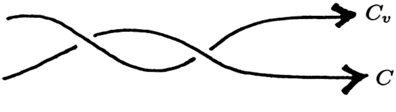
$$\mathrm{Lk} = \mathrm{Tw} + \mathrm{Wr}$$

と表すことができる. 3 次元空間内の可微分曲線についてこの等式が成り立つことは明らかである. ただし, 捻り数は曲線のみによっており, 座標にはよらないことに注意する. 2 つの微分幾何学的量 (総捻れ数と捻り数) を加えると, 絡み数, すなわち組 (C, C_v) のトポロジー的不変量が得られる.

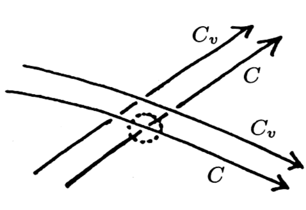
White の定理の平面版, つまり絡み目の正則な図形表示に関する White の定理についても述べておかねばならない. C と C_v を下図の例のような平行な曲線とする:



2 つの曲線に関して捻れ数が考えられるが, これは一方の曲線において他方との交差点ごとに $\pm(1/2)$ を加えることで計算されるものである.



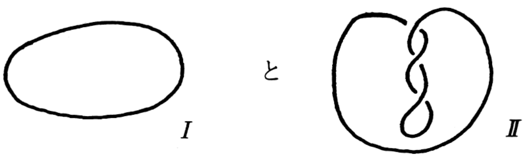
絡み数を求める際には図形表示における交差点で考えるが, そこには C の捻り数も含まれる. $w(C)$ を計算するとき, 例えば



では (+1) を加えることになる．したがって $\mathrm{Wr}(C)$ を C の交差点の符号の和とすると,

$$\mathrm{Lk}(C, C_v) = \mathrm{Tw}(C, C_v) + \mathrm{Wr}(C)$$

となる．正則な図形表示に対するこの簡単な公式が, DNA の研究においては非常に有用である．というのも, 顕微鏡写真に写った DNA は二重の閉曲線の正則表示の状態になっているからである．電子顕微鏡写真を見ると, DNA の超らせん構造や自己交差は見えるが, **捻れを目にすることはできない．同じ**種類の環状 DNA が 2 つの状態になっていた場合は, 絡み数の不変性から捻れ数が推測できる．例えば, 同じ種類の DNA で次のような 2 つについて考える．



左側の場合は $\mathrm{Wr}_I = 0$ であり, 右は $\mathrm{Wr}_{II} = -3$ である．すると,

$$\mathrm{Lk}_I = \mathrm{Wr}_I + \mathrm{Tw}_I = \mathrm{Tw}_I, \qquad \mathrm{Lk}_{II} = \mathrm{Wr}_{II} + \mathrm{Tw}_{II} = -3 + \mathrm{Tw}_{II}.$$

$\mathrm{Lk}_I = \mathrm{Lk}_{II}$ であるから, $\mathrm{Tw}_{II} = \mathrm{Tw}_I + 3$. I は曲がりくねっていないので, DNA を幾何学的立場からみると捻れ数が推定できる．$\mathrm{Tw}_I = 500$ とすれば, $\mathrm{Tw}_{II} = 503$ であることがわかる．

このように DNA の研究者は, 直接観察することができない量を White の公式を用いて推測し, その過程における DNA のトポロジー的かつ力学的変換を理解する．DNA の化学的な環境は捻れに影響を及ぼし, その結果, 分子は捻れが減少 (ほどけ気味の DNA) するか, あるいは増加 (よじれ気味の DNA) して, 超らせんとなる．

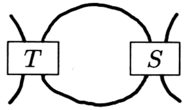
それに加えて, トポイソメラーゼのような酵素による作用と組換え——これは絡み数に影響を与える—— という, 幾何学的かつトポロジー的に煩雑な操作も考慮しなければならない ([BCW]). 酵素による変形とは DNA の鎖を一ヵ所で切断し, 切れ目を別の鎖が通過したのち, 切れ目をもと通りにつなぐという, 既知の交換操作  $\mapsto$  を行うことである．組換えが起こるにはまず, **基質** (substrate) で, その特定の部分が捻れて, 組換えされるべき部分が互いに向き合っている**対合複合体** (synaptic complex) になる．すると最も単純な組換えでは, 2 つの部分を次の図ような交差で置き換えて, 新しい (絡んでいてもよい) 二重鎖ができる．



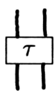
(生物学の用語では絡み目をカテナンという.) 当然のことながら, このような過程において多くの異なる結び目や絡み目が生成される. 最も単純な過程では, 組換えが起きる前, 基質を変形した対合複合体は 2 つのタングルの和として表すことができる. ここで

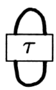
$T =$  , $S =$  , $R =$ 

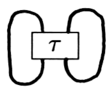
とするとき, **タングル和** (tangle addition) を

$T + S =$ 

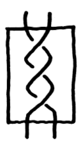
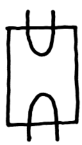
で定義し, さらに任意の 4 端タングル τ 対し, その**分子** (numerator) $N(\tau)$, および**分母** (denominator) $D(\tau)$ を次のように定義する:

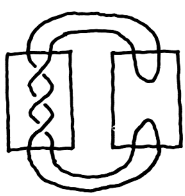


, 

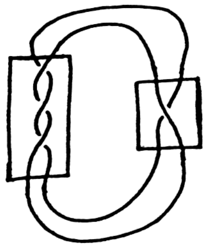
$= N(\tau)$, 

$= D(\tau)$.

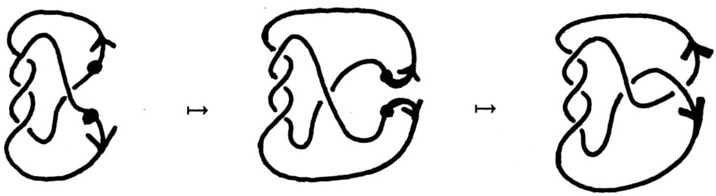
 $= T$,  $= S$

$N(T + S) =$  .

これは対合複合体である. 組換えが行われると

$N(T+R)=$ 

となる. **2 度目**の組換えが起こると $N(T+R+R)$ となる:



基質　　対合複合体　　$N(T+R+R)$

さらに, **3 度目**では $N(T+R+R+R)$ が生じる.



以上をまとめると次のようになる:

$N(T+S)\cong$  平凡な結び目

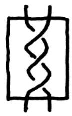
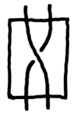
$N(T+R)\cong$  Hopf 絡み目

$N(T+R+R)\cong$  8 字結び目

$N(T+R+R+R)\cong$  Whitehead 絡み目

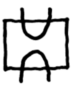
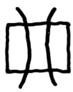
T_n3 リゾルベースを用いた実験 ([CSS]) で, N.Cozarelli と S.Spengler はこれらの生成物 (Hopf 絡み目, 8 字結び目, Whitehead 絡み目) は部位特異組換えを 3 回

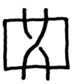
行う間に現れることを発見した．タングル理論の立場からこの過程の模型を作る際に，D.W.Sumners [S] は，T **と** R **は酵素によって決まるもので，基質** S **の幾何学的情報には無関係である**ということを仮定した．そして，この仮定のもとで，組換えを 3 回行う間に先にあげた生成物が得られる条件を結び目理論を用いて求めた．$S =$  ならば，

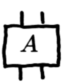
$T =$  かつ $R =$ 

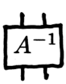
である．これは，生物学で相互作用の原因となる構造を結び目理論を用いて推論するという，特筆すべき科学的な応用である[†]．

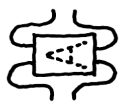
この結果はどのようにもたらされたのか．その鍵は Sumners がこの問題をいわゆる**有理**結び目や**有理**絡み目のみに制限し，この絡み目の同値類を含むタングルの計算法を構成したことにある．有理タングルは，トポロジー的には拡張有理数，すなわち $Q^* = Q \cup \{1/0 = \infty\}$ 内の値で特徴づけられる．Q^* の元は $\alpha \in N \cup \{0\}$ (N は自然数)，$\beta \in \mathbf{Z}$ で，$\gcd(\alpha, \beta) = 1$ とするとき，β/α という形をしている．有理タングル自体は，組換えによく似た反復操作で得られる．すなわち，

 $= \quad 0,$  $= \quad \infty$

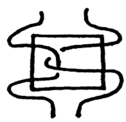
 $= \quad 1,$  $= \quad -1$

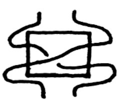
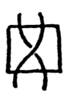


$\Longrightarrow$ 

$=$  (π による回転)．

タングルの像は左上と右下を結ぶ対角線を軸に 180° 回転すると得られる．したがって，

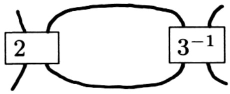
$2 =$ , $2^{-1} =$  $=$ 

$(-1)^{-1} =$  $=$  .

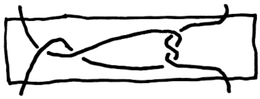
[†]訳注: 結び目理論の高分子科学への応用については，D.W.Sumners [S2]* に，Sumners 自身による解説も含めて，いくつかの話題が収められている．

有理数は, 連分数展開して得られるタングルに対応している. 例えば,

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} =$$



$=$



2 つの有理タングルがトポロジー的に同じというのは, その 2 つが Q^* で同じ値をとるということ ([ES] 参照) であるから, このカテゴリーにおいて部位特異的組換えの起こる可能性を計算することができる. ここに我々は, 分子操作と結び目理論的操作, さらに結び目や絡み目から得られる**トポロジー的な情報**がうまく調和している舞台を手にいれた!

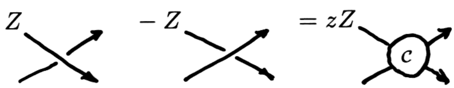
このことからすぐに次のような一般的問題: **結び目や絡み目から得られるトポロジー的な情報の特徴はなにか?** が考えられる. 生物学的に考えると, この情報から組換えがどのように生じたのか, あるいは細胞の組成物がどのように構成されたのかがわかる. 本書の立場からみると, このような情報は自然に量子統計学の枠組みに組み込まれている. 一般化されたスケイン関係で, 最も簡単なものは第 I 部第 17 節で紹介した. それは $\mathcal{L}$ を Chern-Simons ラグランジアン, $\langle K|A\rangle$ を Wilson のループ, すなわち,

$$\langle K|A\rangle = \mathrm{tr}\left(\mathbf{P}\exp\left(i\oint_K A\right)\right)$$

とするとき, 一般化された経路積分

$$Z_K = \int dA e^{(ik/4\pi)\mathcal{L}}\langle K|A\rangle$$

から



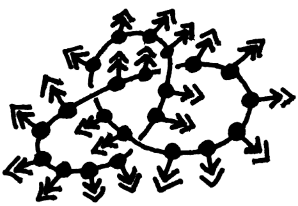
として得られた. ただし, C はゲージ場理論における Lie 代数の表現に Casimir 作用素を差し込むことを表している. 交差の交換という情報の基本的な変化は, トポロジー的量子場の理論の枠組み全体に及ぶ. さらに, この視点は概念的に大きな進歩である. というのは, これによって結び目の情報からその特徴がわかり始めたからである.

この考え方は分子生物学にはどのように影響を与えたのだろうか．しかし，まだそれを語ることのできる時期ではない．これまでDNAの研究で用いられたトポロジー的な模型は，生物学的には簡素化された非常に単純なものである．トポロジー的な情報の構造と，非常に複雑な細胞の構造やその繰り返しとの関係は，いうまでもなく，コード化されたDNA列との間にさえもどのような関係があるのかまだよくわかっていない．なおその上に，生物学は，場の理論の物理学的背景や，分子自体に関する今日の量子力学における基礎的な部分とも関係が見い出されている．

この点で，Witten の汎関数積分は，生物学と量子場の理論を強く結びつけている．そこで，Wilson のループ $\langle K|A\rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{P}\exp(i\oint_K A))$ の性質を思い出そう．この量は “探知機 (detector)” の個数，それは (3次元空間で定義された) ゲージ・ポテンシャル A から選び出した行列の無限個の積に近づく，と同じであると考えられる．各探知機は空間内の点 x で $(1+iAdx)$ という形の行列に対応する．


探知機

ひとつひとつの探知機を，“アンテナ”  と，近くのコドン (codon) に差し込むための足 (—○—) をもった，小さなコドンと考えたい．このコドンの集合を結び目の上に置いていく．



K 

すると，場を計るために必要な要素と形式 $\langle K|A\rangle$ が得られる．その2つの結びつきから Wilson のループが計算できる．

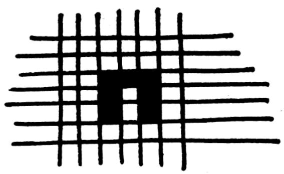
もつれていたり絡んでいたりする環状 DNA が本質的には Wilson のループ，すなわち DNA をとりまく生物学の分野からの情報の受け取り手，そのものなのである．この考えが成り立つならば，結び目理論，量子場の理論と分子生物学は本来一つの科学的学問である．情報は離散的なモードでのみ運ばれるわけではない．DNA を形態発生の分野におけるトランシーバーと思うのはどうか．結び目という形で表すのは異なる分野の情報を受け入れるためであり，結び目はその分野における言葉のアルファベットであると考えられる．このような考え方は，生物学的立場からみると変かもしれないが，物理学では少しも珍しいことではない．例えば，Lee

Smolin と Carlo Rovelli は, 結び目が (Wilson のループの積分を介して) 量子力学的な様相の基底を表している量子重力の理論を提唱している ([RS],[LS2]).

しかしその一方で, 生物学的な例を求めたいと考える. このため, 形態発生の分野を, 物理学の分野とさらに形と反復の分野からなるものとみなす. 単純な例でこの見方を理解しよう. John H.Conway の細胞オートマトン “ライフゲーム” を紹介する. これは 2 次元オートマトンであり, 適当な大きさの矩形格子上で, できなくなるまで繰り返すゲームである. 格子の中の矩形には印が付いている  か, 付いていない  かのどちらかである. 次のようなルールでゲームを進める:

1. 2 つ以下の隣接する矩形を ■ → □.
2. 4 つ以上の隣接する矩形を ■ → □.
3. 3 つの隣接する矩形を ■ → □.

各ステップごとに, 格子上でこれらの規則を同時に適用する. その結果, 次の図



のような非常に単純な形に印をつけたものから始めると, 長く, 複雑な一生を送ることができる. ゲームの過程の各段階で 1 つの印の付いた矩形は (それに隣接する印の付いた矩形との関係を含めて) 形態発生学の分野における探知機の 1 つにあたり, 逆に 1 つの探知機はオートマトンにおける規則構造なのである. 場は格子上いたるところにあり, 形の場, 非数値の場である. 格子上の局部的に特定の形が, 場に付随するゲームの展開の可能性を左右する.

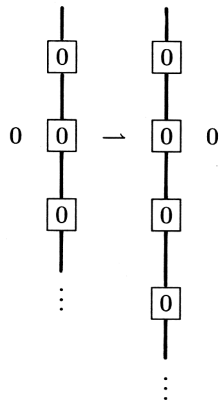
他の例は, サイマティックス (Cymatics [JEN]) の中に自然に現れる. サイマティックスでは, 振動の影響を受けて作り出す形, 例えば振動している板の上の砂が描く結節点の形や振動によってできる液体の表面の形, について研究している. 観測者には, 全体が相互に関係づけられた部分からなる有機体に分解されているように思えるが, このような部分が観測者にとってはすべてであり, 実際には振動の場を通して全体のなかで統一的に調節されているのである. 見た目にわかる部分 (“それ” は部分と思える程度の大きさである) は, それぞれ, 場からの情報を受け取る場所であり, 振動によって物質に生じる形と局所的な影響の場の一部分である.

もう一つの例をあげる. それは Varela, Maturana, Uribe が [VMU] で述べてい

る“オートポエシス (autopoesis)”の具体例である．コドン 0, 印を付けたコドン □, 触媒 $*$ で構成される細胞の空間を考える．印の付いたコドンはつながっている: $\cdots - \boxed{0} - \boxed{0} - \boxed{0} - \cdots$. 触媒は 2 つのコドンから 1 つの印の付いたコドンになることを促す: $0\,0 * \to \boxed{0}$. 印の付いたコドンは自然に崩壊したり

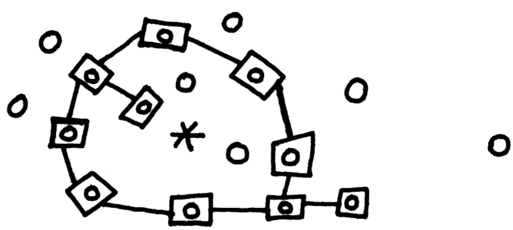
$$\boxed{0} \to 0\,0,$$

あるいは印の付いたコドンどうしが結合したり，分解したりする．コドンは結合の壁を通り抜けることができる:



一方，触媒は通り抜けることは**できない**.

このシステムには，コドンや印の付いたコドンや触媒のスープの中で，無作為にこの規則が適用されるという不安定さがある．印の付いたコドンで，ひとたび 1 つの触媒を取り囲むように閉じたループ状のものは，安定した形を保とうとする．



というのは，触媒にはループの切れたところの修復を促す働きがあり，さらにループを形作っている結合を触媒は通り抜けることができないので，ループの外へ出ていくことが難しいからである．

この例では，細胞がその構成に必要なものを含む一連の生成物によって，その構造をどのように保っているのかということを，縮図として見ることができる．コド

ンがループ状になっているのは本質的に形状を保つためである. ループの結合力は, 形状を保つ一単位のそれである.

以上のような例から, $SU(2)$ ゲージにおけるトポロジー的量子場の理論の汎関数積分ともみなせる Jones 多項式と, 分子生物学におけるもつれた DNA の役割の間には, 実際に深い関係があるのではないかと考えられる. (Dirac の紐トリックに関して議論したように) $SU(2)$ は 3 次元空間内の物体における局所回転の構造 ([BAT] 参照) と関係があり, したがって直接, 生物学と関係するような幾何の言葉で Wilson のループを解釈することができるかもしれない. これはアイデアのためのアイデアである.

このアイデアを具体的なものに近づけるために, [WIL] で述べられている変形可能な物体のゲージ理論について考えよう. ここでは, 向きの付いていない形の列に対し, 変形可能な物体が, 外から力を加えられることなしに, その列を通り抜けるとき生ずる実質的回転を決定したい. つまり, 位置の定まっていない形の空間で道が与えられたとき (泳いでいる人や落下する猫, 移動している細胞はそのような状態にある), 位置の定まった形の配置空間で対応する道は何なのか, 実際どのように移動するのかということをである. 位置の定まっている形と定まっていない形を比べるために, 位置の定まっていない形それぞれに標準的な向きを付け, 実際の道に関係している $SO(3)$ の元を抽象の道に当てはめなければならない. これは結局, $SO(3)$ ゲージ理論として公式化される. 標準的な形 $S_0(t)$ の与えられた列に対応して, 移動の実際の道に対応する向き付けられた形 $S(t)$ の列を求めたい. この 2 つの道は, 方程式

$$S(t) = R(t)S_0(t)$$

によって関係づけられている. ただし, $R(t)$ は $SO(3)$ における道である. $R(t)$ を求めることは, 方程式

$$\frac{dR}{dt} = R(t)A(t) \qquad \left(A(t) = R^{-1}(t)\frac{dR}{dt}\right)$$

を解くことに等しい. 一度 A がわかれば, 全回転 $R(t)$ は経路積指数関数

$$R(t) = \mathbf{P}\exp\left(\int_{t_0}^{t} A(t)\,dt\right)$$

として表される. Wilczek は, **位置の定まらない形 S_0 の空間** (これもまた A と書く) 上にゲージ・ポテンシャルを次の式で定義した:

$$A_{\dot{S}_0}[S_0(t)] \equiv A(t).$$

すなわち, A は $\mathcal{S}_0$ の接空間 (これは形の空間において各方向の成分をもつベクトル場) 上に定義され, $SO(3)$ の Lie 代数に値をもつものである. 通常, 曲率テンソル (または場の強度)

$$F_{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial w_j} - \frac{\partial A_j}{\partial w_i} + [A_i, A_j]$$

(ここで, w_i は $\mathcal{S}_0$ の接ベクトルの基底である) が, $\mathcal{S}_0$ の無限小変形による回転を決定する.

ある特定の場合に, ゲージ・ポテンシャルは, 問題とされるシステムにおける物理学的仮定や保存の法則から定まる. 変形可能な物体のゲージ理論をこの視点から述べてきたが, それはゲージ理論や Wilson のループそして経路積分の形式が, 動物や細胞そしてその構成物質の移動を実際に表すととてもよく似ことがわかるからである. (Dirac の紐トリックのときと同じように) 向きを考慮した関係を追うことによって $SO(2)$ ゲージに移ることができるが, すると Wilson のループの値の平均は移動の統計量を表すには自然となる. これはゲージ場の理論と分子生物学の関係の深い背景を明らかに示している.

16節 力学系における結び目 ——Lorenzアトラクター

原書の表紙 (本書では p.437 の図参照)に描かれた絵は **Lorenz 結び目** (Lorenz knot) である; すなわち, それは Lorenz[LOR] が発見した 3 次元空間における連立常微分方程式の周期軌道のことである. その連立常微分方程式とは, 特に

$$X' = \sigma(Y - X)$$
$$Y' = X(r - Z) - Y$$
$$Z' = XY - bZ$$

である. ただしここで σ, r, b は定数とする. (Lorenz は $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28$ としていた.) 定数 r は Lorenz 系の **Reynolds 数** (Reynolds number) とよばれている.

Lorenz 系はいわゆるカオス的な力学系として最もよく知られた例である. これは初期条件に非常に影響され, Reynolds 数が小さいときにはすべての周期軌道が (実際に存在するなら) 不安定である. したがって, 系において一般的な軌道は, 2 つの不安定アトラクターの中心の周りを行ったり来たりして, ふらふらしており予測ができない. この軌道の全体としての形は安定している. この集合を, しばしば, Lorenz アトラクターという. 以後 Lorenz アトラクターにおける軌道について考察する.

Lorenz アトラクターの力学的な側面の定性的な解析は, Birman と Williams によって行われた [B3]. それによると, 周期軌道 (実はもっと一般に軌道) は彼らが "**結び目ホルダー**(knot holder)" とよんでいる特異曲面上にある. 図 16.2 は Lorenz アトラクターの一般的な様相を示しており, 図 16.1 はそれに対応する結び目ホルダーである.

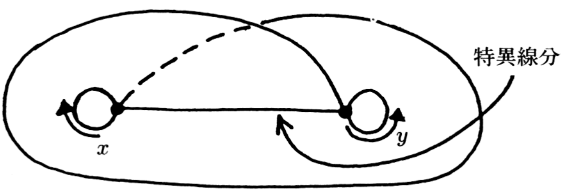


図 16.1　結び目ホルダー

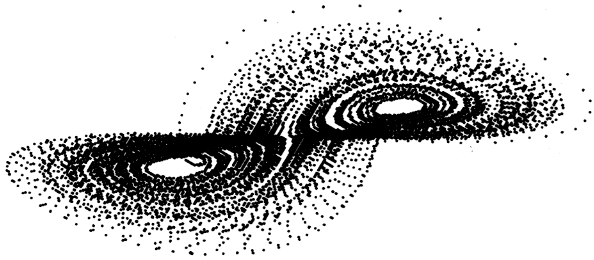


図 16.2　Lorenz アトラクター

結び目ホルダーは, 円環の境界の一部を, 内側と外側の境界をつなぐ線分に下図のように張り付けたものと考えられる:

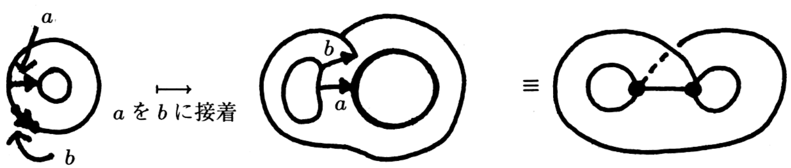
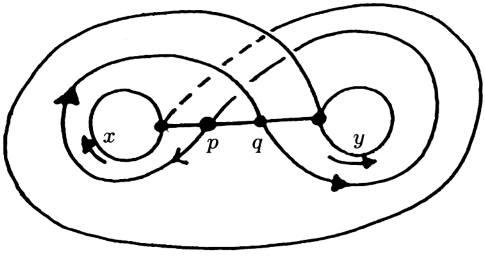


図 16.1 で, 2 つの基本となる循環, x と y を示しておいた. x は結び目ホルダーの左側の穴の周りを回ることを表し, y は右側を回ることとする. 特異線分上から出発すると, x とは上側にある曲面上を巡ることを意味しており, 一方 y は下側の曲面上を巡ることになる. 特異線分上から出発する x を考えると, それは特異線分に戻ってくるが, 最初は線分上のどこへでも戻ることができる.

Birman と Williams の解析によると, Lorenz アトラクターにおける点の軌道は x, y の無限個の文字列で表される. したがって, $xy\,xy\,xy\,xy\cdots$ は次に示される単純な周期軌道を表していることになる.



$w = xy\,xy\,xy\,xy\cdots$

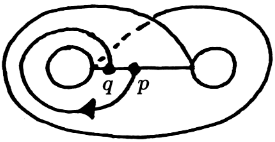
これにはすでに, 一般的な場合の多くの特徴が現われている. また, この軌道が点 p, q で特異線分と交差しており, q から出発すると $yx\,yx\,yx\cdots$ と表すことができ

る. そこで, 次のように書くことにする.

$$w_p = xy\,xy\,xy\cdots,\qquad w_q = yx\,yx\,yx\cdots$$

$x < y$ とし, 特異線分と同相な単位区間における一般的な順序で $p < q$ ならば, w_p, w_q は辞書式順序で並んでいることに注意する.

$xy\,xy\,xy\cdots$ で表される軌道はほかにもあるのだろうか? 例えば, $q < p$ であるような点 q に戻ってくる x の場合について考えてみよう:



このとき軌道は (Lorenz ベクトル場の定義の妥当性に反して) 自己交差をもつことになるので, 循環 y を行うことができない. よって $q < p$ の場合,

$$w_p = xx*,\qquad w_q = x*$$

となり, $w_p \le w_q$ であることがわかる. $w_p = w_q$ のときは $w_p = w_q = xxxx\cdots$, すなわち, らせん状無限軌道となる. これは $r = 28$ である Lorenz 系では現れないが, 組合せ論的にはあり得る. ほかには, (例えば)

$$w_p = xxxxy\cdots,\qquad w_q = xxxy\cdots$$

は, $w_p < w_q$ であるような例となる. 付け加えると, $xxx\cdots$ は, 通常は, 結び目ホルダーの左側の穴の周りを回る単純な周期軌道とみなす.

次に,

$$w = (xyxyy)(xyxyy)(xyxyy)\cdots$$

というタイプの周期軌道について考える. これは特異線分と 5 つの点で交わるが, その交点は $xyxyy$ という語の 5 つの巡回置換に対応している:

1. $xyxyy: \; w_1 = xyxyy\,xyxyy\cdots$
4. $yxyyx: \; w_4 = yxyyx\,yxyyx\cdots$
2. $xyyxy: \; w_2 = xyyxy\,xyyxy\cdots$
5. $yyxyx: \; w_5 = yyxyx\,yyxyx\cdots$
3. $yxyxy: \; w_3 = yxyxy\,yxyxy\cdots$

ここで, $xyxyy$ の巡回置換を順序よく書き並べ, それぞれの語の辞書式順序がわかるように整数 1, 2, 3, 4, 5 を対応させた. 軌道は結び目ホルダーにおける特異線分上の点 p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 を通り抜けなければならない. すると w_i は p_i から出発する軌道を表している. (先に述べたもっとも簡単な例について考える

ので) $p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5$ であることが必要だが, それは辞書式順序で $w_1 < w_2 < w_3 < w_4 < w_5$ となっているからである. 図 16.3 には, 軌道が結び目ホルダー上に描かれている.

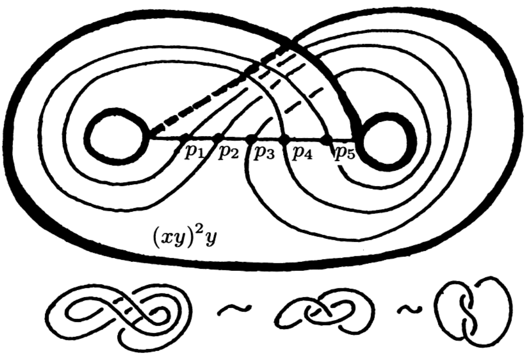


図 16.3

x と y からなる任意の非周期な語に対応している Lorenz 結び目を描くための簡単なアルゴリズムが, いままでの考察よりわかる.

1) 語の最初の文字を次々と一番後ろにもっていくことで, その語の巡回置換を順に書き出す.
2) 書き出した語に, 辞書式順序に従って整数を対応させる.
3) 結び目ホルダーにおける特異線分上に, 数値順序に従って語と同じラベルを付けた点を考える.
4) 語のリストに従って一番上から順に, 語のラベルに対応する特異線分上の点 p_i を次の p_j と x または y, すなわち語 i の最初の文字, でつなぐ.

図 16.3 では $(xy)^2y$ に対応した結び目を描く際に, このアルゴリズムを厳密に適用した. 図中で示されているように, $(xy)^2y$ は実際にもつれていることに注意されたい. これは三葉結び目である.

次に原書の表紙 (本書では p.437 の図を参照) にある結び目にアルゴリズムを用いてみよう. すると図 16.4 のような立体的な 2 つの図が得られる.

この結び目は, 筆者と Ivan Handler がコンピュータを用いて発見した Lorenz 結び目である. 我々のとった方法は偶然性の高いやり方である. この結び目は, **コンピュータでは** $r = 60, \sigma = 10, b = 8.3$ の場合にできた周期軌道であるが, この手法は他に応用できるような方法ではない! 個々の Lorenz 結び目をコンピュータによって求めるには, 一般化された Newton の方法を用いるが, それには [CUR] を

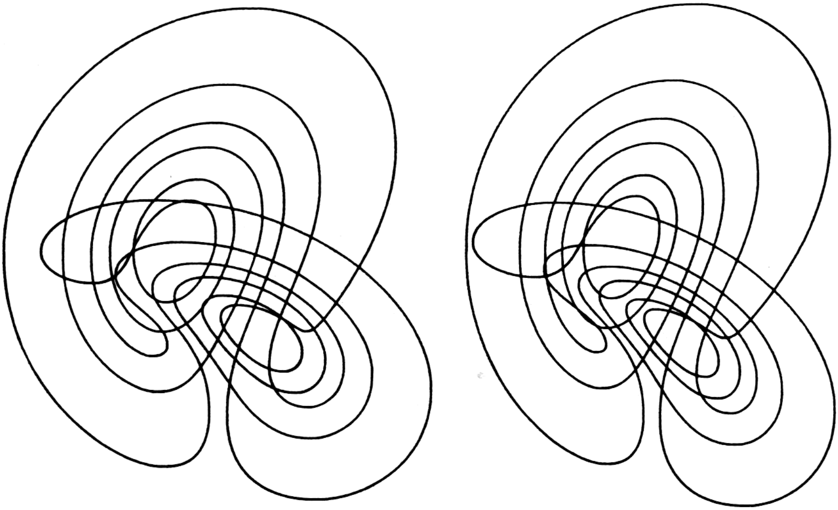


図 16.4

参照するとよい. また, [JACK] では Reynolds 数が大きい場合 ($r \doteqdot 200$) の結び目の生成について論じている. この範囲では, 絡んでいない安定周期軌道が得られる; Reynolds 数が小さくなると, それらは, 安定結び目 (安定であると判断するのは難しい) の周期が 2 の倍数のカスケードに分かれる.

ともあれ, 図 16.4 の結び目の話にもどると, これは語 x^3yxy^3xy に対応していることが容易にわかる.

練習問題 16.1. 語 x^3yxy^3xy に Lorenz 結び目のアルゴリズムを適用し, さらに対応する結び目が (3, 4) 型トーラス結び目であることを示せ.

練習問題 16.2. 語 $w = xyxyyxyyyx\cdots$ に対応する無限軌道を結び目ホルダー上に描け. 図 16.5 は語の初めの部分を表している.

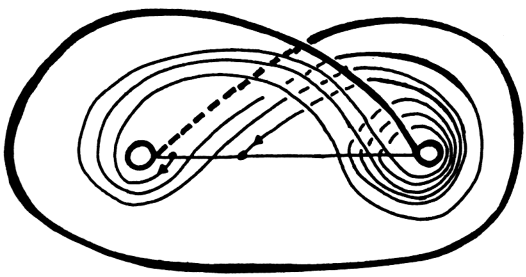


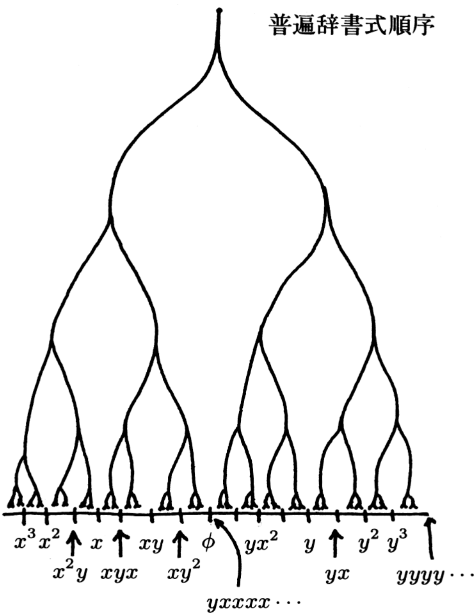
図 16.5　$xyxy^2xy^3xy^4\cdots$

注意. 有限あるいは無限の語に関しては, 面白いことに, 結び目ホルダー上を巡る旅の辞書式順序と John H.Conway [CON2] による拡大数の系における数表現の間に対応がある. その関係を理解するために, Martin Kruskal による Conway 数の表現を用いる. Kruskal にとって Conway 数とは x と y からなる順序列である. x を**左**, y を**右**と思う. すると x や y からなる語はすべて次のような "数" の列を与える.

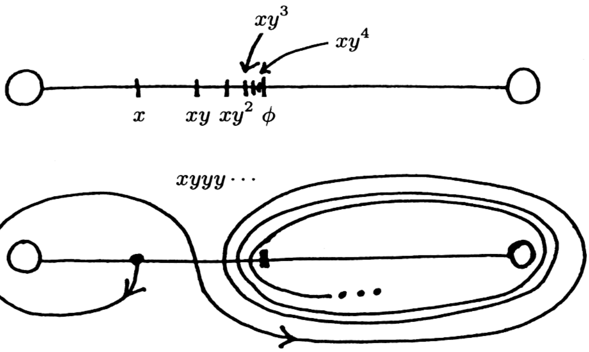
$$
\begin{aligned}
0 &\longleftrightarrow \emptyset \quad \text{空語} \\
+1 &\longleftrightarrow y \\
+2 &\longleftrightarrow yy \\
-1 &\longleftrightarrow x \\
-2 &\longleftrightarrow xx \\
&\cdots \\
-\frac{1}{2} &\longleftrightarrow xy
\end{aligned}
$$

つまり, x とは, 新たにできる 2 つの数のうち, まん中より後ろにある方に進むことであり, y は前へ進むことである. **辞書式順序で ω が τ より前にある場合, Conway 直線上では常に $\omega < \tau$ である.**

例 16.1.



例 16.2. $xyyyyy\cdots$ (これは無限に零に近づく数である.)



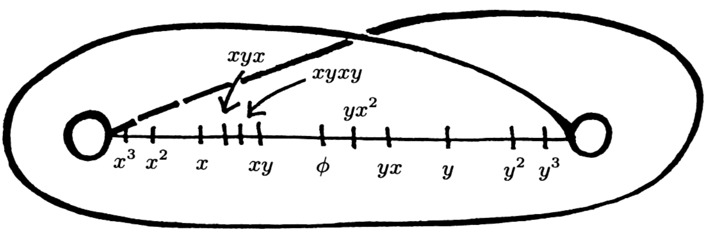
一般に, 無限の語 $w = e_1e_2e_3e_4\cdots$ ($e_i = x$ または y) が任意に与えられると, **Conway 区間** $\mathcal{I}$ に埋め込まれた Conway 数の無限列が得られる:

$$w_1 = e_1e_2e_3e_4\cdots$$

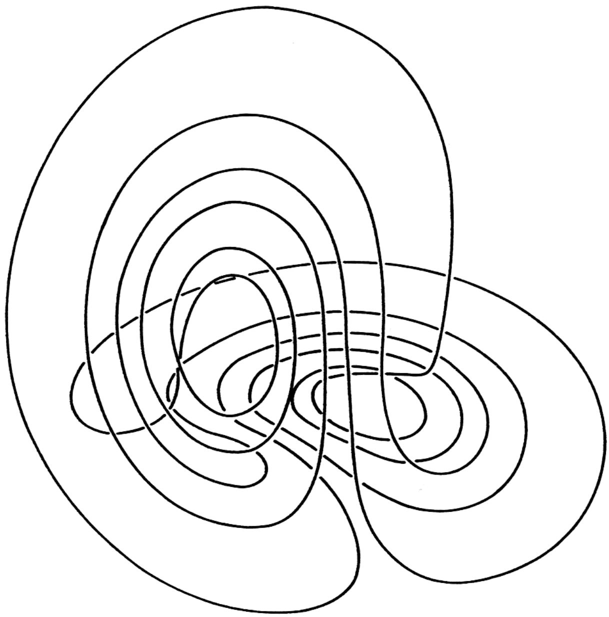
$$w_2 = e_2e_3e_4\cdots$$

$$w_3 = e_3e_4e_5\cdots$$

$$\cdots$$



拡大 Lorenz ホルダーを $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{I} \sim$ と定義する. ここで $\mathcal{S}^1$ とは Conway の円であり, $\sim$ は特異線分をもつように Conway の円環 $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{I}$ を同一視することである. したがって, 任意の w に対し, 点 $w_1, w_2, w_3, \cdots$ は拡大 Lorenz ホルダー上の自己交差をもたない軌道の記号力学系を与える.



CODA

In the beginning was the word.
The word became self-referential/periodic.
In the sorting of its lexicographic orders,
The word became topology, geometry and
The dynamics of forms;
Thus were chaos and order
Brought forth together
From the void.

"That from which creation came into being,
Whether it had held it together or it had not
He who watches in the highest heaven
He alone knows, unless...
He does not know."

(Stanza 7 of **The Hymn of Creation**, RG VEDA 10.129 [DN]).

文　献

[AR] C. Agnes and M. Rasetti. Piecewise-linear category approach to entanglement. *I1. Nuovo Cimento*, vol. 3D, No. 1 (1984), pp. 121–136.

[AB] Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of electromagnetic potentials in quantum theory. *Phys. Rev.*, **115**(1959), pp. 485-491.

[AH] Y. Aharonov and L. Susskind. Observability of the Sign Change of Spinors under 2π Rotations. *Phys. Rev.*, vol. 158, No. 5. June 1967, pp. 1237.

[AW1] Y. Akutsu and M. Wadati. Knot invariants and critical statistical systems. *J. Phys. Soc. Japan,* **56**(1987), 839-842.

[AW2] Y. Akutsu and M. Wadati. Exactly solvable models and new link polynomials. I. N-state vertex models. *J. Phys. Soc. Japan,* **56**(1987), 3039-3051.

[AW3] Y. Akutsu and M. Wadati. Knots, links, braids and exactly solvable models in statistical mechanics. *Comm. Math. Phys.,* **117**(1988), 243-259.

[AW4] Y. Akutsu, A. Kuniba and M. Wadati. Virasoro algebra, von Neumann algebra and critical eight-vertex SOS models. *J. Phys. Soc. Japan,* vol. 55, no. 10. October 1986, pp. 3285-3288.

[AW5] Y. Akutsu and M. Wadati. From solitons to knots and links. *Progress of Theoretical Physics Supplement,* no. 94 (1988), pp. 1-41.

[ADW1] Y. Akutsu, T. Deguchi and M. Wadati. Exactly solvable models and new link polynomials II. Link polynomials for closed 3-braids. *J. Phys. Soc. Japan,* **56**(1987), 3464-3479.

[ADW2] Y. Akutsu, T. Deguchi and M. Wadati. Exactly solvable and new link polynomials III. Two-variable polynomial invariants. *J. Phys. Soc. Japan,* **57**(1988), pp. 757-776.

[ALEX1] J. W. Alexander. A lemma on systems of knotted curves. *Proc. Nat. Acad. Sci., USA* **9**(1923), pp. 93-95.

[ALEX2] J. W. Alexander. Topological invariants of knots and links. *Trans. Amer. Math. Soc.,* **20**(1923), 275-306.

[ASH] A. Ashtekar. **New perspectives in canonical gravity**. Bibliopolis (1988).

[A1] M. F. Atiyah. **K-Theory**. W. A. Benjamin Inc. (1967).

[A2] M. F. Atiyah. **Geometry of Yang-Mills Fields**. Accademia Nazionale dei Lincei Scuola Normale Superiore - Lezioni Fermiane. Pisa (1979).

[A3] M. F. Atiyah. **The Geometry and Physics of Knots**. Cambridge University Press. (1990).

[BE] H. J. Bernstein and A. V. Phillips. Fiber bundles and quantum theory. *Scientific American,* vol. 245, no. 1. July 1981, pp. 122-137.

[BS] L. Baulieu and I. M. Singer. Topological Yang-Mills symmetry. *Nuclear Phys.* B (Proc. Suppl.) B(1988) pp. 12-19.

[BA1] R. J. Baxter. **Exactly Solved Models in Statistical** Mechanics. Academic Press (1982).

[BA2] R. J. Baxter. Chromatic polynomials of large triangular lattices. *J. Phys. A.: Math. Gen.*, **20**(1987), 5241-5261.

[BN] D. Bar-Natan. Perturbative Chern-Simons Theory. (Preprint 1990).

[BAT] E. P. Battey-Pratt and T. J. Racey. Geometric Model for Fundamental Particles. *Int. J. Theo. Phys.*, vol. 19, no. 6, (1980), pp. 437-475.

[BCW] W. R. Bauer, F. H. C. Crick and J. H. White. Supercoiled DNA. *Scientific American*, vol. 243. July 1980, pp. 118-133.

[BAY] B. F. Bayman. Theory of Hitches, *Amer. J. Physics*, vol. 45, no. 2, (1977), pp. 185-190.

[B1] J. S. Birman and H. Wenzl. Braids, link polynomials and a new algebra. *Trans. AMS*, **313** (1989), pp. 249–273.

[B2] J. S. Birman. **Braids, links and mapping class groups**. Annals of Math Study, no. 82. Princeton University Press (1974).

[B3] J. S. Birman and R. F. Williams. Knotted Periodic Orbits in Dynamical Systems - I. Lorenz's Equations. *Topology*, vol. 22, no. 1, (1983), pp. 47-82.

[B4] J. S. Birman. On the Jones polynomial of closed 3-braids. *Invent. Math.*, **81**(1985), pp. 287-294.

[BO] H. Bondi. **Relativity and Common Sense**. Dover Pub. (1977).

[BR] R. D. Brandt, W. B. R. Lickorish, K. C. Millett. A polynomial invariant for unoriented knots and links. *Invent. Math.*, **84**(1986), 563-573.

[BUC] G. Buck. Knots as dynamical systems. (Preprint 1990.)

[BZ] G. Burde and H. Zieschang. **Knots**. deGruyter (1986).

[BUR] P. N. Burgoyne. Remarks on the combinatorial approach to the Ising problem. *J. Math. Phys.*, vol. 4, no. 10, Oct. 1963.

[CLM] S. E. Cappell, R. Lee, E. Y. Miller. Invariants of 3-manifolds from conformal field theory. (Preprint 1990.)

[CG] Casson, A. and C. M. Gordon. On slice knots in dimension three. In **Geometric Topology**, R. J. Milgram ed., pp. 39-53, *Proc. Symp. Pure Math.*, XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R. I.

[CL] T. P. Cheng and L. F. Li. **Gauge Theory of Elementary Particle Physics**. Clarendon Press - Oxford (1988).

[CH] G. F. Chew and V. Poenaru. Single-surface basis for topological particle theory. *Phys. Rev. D.*, vol. 32, no. 10, pp. 2683-2697.

[CON] J. H. Conway. An enumeration of knots and links and some of their algebraic properties. **Computational Problems in Abstract Algebra**. Pergamon Press, New York (1970), 329-358.

[CON1] J. H. Conway. (Lecture at the University of Illinois at Chicago, Spring 1979.)

[CON2] J. H. Conway. **On Numbers and Games**. Academic Press (1976).

[COR] E. Corrigan, D. B. Fairlie, P. Fletcher and R. Sasaki. Some aspects of quantum groups and supergroups. (Preprint 1990.)

[COTT] P. Cotta-Ramusino, E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev. Quantum field theory and link invariants. (Preprint 1989).

[CSS] N. R. Cozzarelli, S. J. Spengler, A. Stasiak. The stereostructure of knots and catenanes produced by phase λ integrative recombination: implications for mechanism and DNA structure. *Cell* **42**(1985), pp. 325-334.

[CR1] L. Crane. Topology of three manifolds and conformal field theories. (Preprint 1989).

[CR2] L. Crane. 2-D Physics and 3-D Topology. *Commun. Math. Phys.*, **135** (1991), 615–640.

[CR3] L. Crane. Conformal Field Theory, Spin Geometry and Quantum Gravity. (Preprint 1990).

[CF] R. H. Crowell, R. H. Fox. **Introduction to Knot Theory**. Blaisdell Pub. Co., (1963).

[CUR] J. H. Curry. An algorithm for finding closed orbits. *Lecture Notes in Mathematics*, no. 819, Springer-Verlag (1979) pp. 111-120.

[DN] A. T. de Nicolás. **Meditations through the Rg Veda**. Shambala Press (1978).

[DIR] P. A. M. Dirac. **The Principles of Quantum Mechanics**. Oxford University Press (1958).

[DRIN1] V. G. Drinfeld. Quantum Groups, *Proc. Intl. Congress Math.*, Berkeley, Calif. USA (1986), 789-820.

[DRIN2] V. G. Drinfeld. Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter Equation. *Soviet Math. Dokl.*, **32**(1985), no. 1.

[ES] C. Ernst and D. W. Summers. A calculus for rational tangles: applications to DNA recombination. Math. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **108** (1990), pp. 489–515.

[EL] B. Ewing and K. Millett. A load balanced algorithm for the calculation of the polynomial knot and link invariants. (Preprint 1989.)

[FWu] C. Fan and F. Y. Wu. General lattice model of phase transitions. *Phys. Rev. B.*, vol. 2, no. 3, (1970), pp. 723-733.

[FRT] L. D. Faddeev, N. Yu Reshetikhin, L. A. Takhtajan. Quantization of Lie groups and Lie algebras. LOMI Preprint E-14-87, Steklov Mathematical Institute, Leningrad, USSR.

[FR] R. A. Fenn and C. P. Rourke. On Kirby's calculus of links. *Topology*, **18**(1979), pp. 1-15.

[FE] R. P. Feynman. **Theory of Fundamental Processes**. W. A. Benjamin Pub., (1961).

[FE1] R. P. Feynman and S. Weinberg. **Elementary Particles and the Laws of Physics – The 1986 Dirac Memorial Lectures**. Cambridge University Press (1987).

[FI1] D. Finkelstein. Kinks. *J. Math. Phys.*, **7**(1966), pp. 1218-1225.

[FI2] D. Finkelstein. Space-Time Code. *Phys. Rev.*, **184**(1969), pp. 1261-1271.

[FR] D. Finkelstein and J. Rubenstein. Connection between spin, statistics and kinks. *J. Math. Phys.*, **9**(1968), pp. 1762-1779.

[FOX1] R. H. Fox and J. W. Milnor. Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots. *Osaka J. Math.*, **3**, 257-267.

[FOX2] R. H. Fox. A quick trip through knot theory. In **Topology of 3-Manifolds**. Ed. by M. K. Fort Jr., Prentice-Hall (1962), pp. 120-167.

[FRA] G. K. Francis. **A Topologists Picturebook**. Springer-Verlag (1987).

[FW] J. Franks and R. Williams. Braids and the Jones polynomial. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **303** (1987), pp. 97–108.

[FG] D. S. Freed and R. E. Gompf. Computer calculation of Witten's 3-Manifold Invariant. (Preprint 1990).

[F] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. C. Millett and A. Ocneanu. A new polynomial invariant of knots and links. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **12**(1985), 239-246.

[FQS] D. Friedan, Z. Qui, S. Shenker. Conformal invariance, unitarity and two-dimensional critical exponents. In **Vertex operators in Mathematics and Physics**. Ed. by J. Lepowsky, S. Mandelstam, and I. M. Singer, pp. 419-450, (1985).

[FRO] J. Frohlich. Statistics of fields, the Yang-Baxter Equation and the theory of knots and links. (Preprint 1987).

[FROM] J. Frohlich and P. Marchetti. Quantum field theories of vortices and anyons. (Preprint 1988).

[FU] B. Fuller. Decomposition of the linking number of a closed ribbon: a problem from molecular biology. *Proc. Natl. Acad. Sci.* USA, vol. 75, no. 8. pp. 3557-3561 (1978).

[GA] K. Gawedski. Conformal Field Theory. Sem. Bourbaki. 41e annee (1988-89), 704, pp. 1-31.

[GE] M. L. Ge, N. Jing and Y. S. Wu. New quantum group associated with a "non-standard" braid group representation. (Preprint 1990.)

[GL] M. L. Glasser. Exact partition function for the two-dimensional Ising model. *Amer. J. Phys.*, vol. 38, no. 8, August 1970, pp. 1033-1036.

[G1] D. L. Goldsmith. The Theory of Motion Groups. *Michigan Math. J.*, **28**(1981), pp. 3-17.

[G2] D. L. Goldsmith. Motion of Links in the Three Sphere, *Math. Scand.*, **50**(1982), pp. 167-205.

[GR] B. Grossman. Topological quantum field theories: relations between knot theory and four manifold theory. (Preprint 1989.)

[GMM] E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev. Perturbative aspects of the Chern-Simons field theory. *Phys. Lett.*, B227 (1989), p. 111.

[HKC] P. de la Harpe, M. Kervaire and C. Weber. On the Jones polynomial. *L'Enseign Math.*, **32**(1986), 271-335.

[HA] R. Hartley. Conway potential functions for links. *Comment. Math. Helv.*, **58**(1983), pp. 365-378.

[HAS] B. Hasslacher and M. J. Perry. Spin networks are simplicial quantum gravity. *Phys. Lett.*, vol. 103B, no. 1, July (1981), pp. 21-24.

[HAY] M. V. Hayes. **A Unified Field Theory**. The Stinehour Press. (1964).

[HE1] M. A. Hennings. A polynomial invariant for oriented banded links. (Preprint 1989.)

[HE2] M. A. Hennings. A polynomial invariant for unoriented banded links. (Preprint 1989.)

[HE3] M. A. Hennings. Hopf algebras and regular isotopy invariants for link diagrams. (To appear in *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*).

[HE4] M. A. Hennings. Invariants of links and 3-manifolds obtained from Hopf algebras. (To appear.)

[HO] C. F. Ho. A new polynomial invariant for knots and links - preliminary report. AMS Abstract, vol. 6, no. 4, Issue **39**(1985), 300.

[HOP] H. Hopf. Über die abbildungen der drei dimensionalen Sphäre die Kugelfläche. *Math. Ann.*, **104**(1931), pp. 637-665.

[HOS1] J. Hoste. A polynomial invariant of knots and links. *Pacific J. Math.*, **124**(1986), 295-320.

[HOS2] J. Hoste and M. Kidwell. Dichromatic link invariants. *Trans. A.M.S.*, vol. 321, no. 1, (1990), pp. 197–229.

[HOS3] J. Hoste and J. H. Przytycki. Homotopy skein modules of orientable 3-manifolds. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **108**(1990), pp. 475-488.

[HU] A. Hurwitz. "Über die Composition der quadratischen Formen von Beliebig vielen Variablen," **Nachrichten von der königlichen Gersellschaft der Wissenshaften in Göttingen** (1898), pp. 309-316; *Mathematische Werke*, vol. 11, pp. 565-571. Basel, 1932.

[HW] L. P. Hughston and R. S. Ward. **Advances in Twistor Theory**. Pitman (1979).

[IM1] T. D. Imbo, C. S. Imbo, R. S. Mahajan and E. C. G. Sudarshan. A User's Guide to Exotic Statistics. (Preprint 1990).

[IM2] T. D. Imbo and R. Brownstein. (private communication).

[IM3] T. D. Imbo, C. S. Imbo and E. C. G. Sudarshan. Identical particles, exotic statistics and braid groups. (Preprint 1990).

[JACI] R. Jackiw. Topological investigations of quantized gauge theories. In **Current Algebra and Anomalies**. Ed. by S. B. Treiman, R. Jackiw, B. Zumino, E. Witten. (1985), World Sci. Pub., pp. 211-340.

[JACK] E. A. Jackson. **Perspectives of Nonlinear Dynamics Vols. I and II**. Cambridge University Press (1990).

[JR] G. Jacussi and M. Rasetti. Exploring the use of artificial intelligence, logic programming, and computer-aided symbolic manipulation in computational physics I. 1. The mathematical structure of phase transition theory. *J. Phys. Chem.*, **91**(1987), pp. 4970-4980.

[JA1] F. Jaeger. A combinatorial model for the Homfly polynomial. (Preprint 1988).

[JA2] F. Jaeger. On Tutte polynomials and cycles of plane graphs. *J. Comb. Theo. (B)*, **44**(1988), pp. 127-146.

[JA3] F. Jaeger. On transition polynomials of 4-regular graphs. (Preprint 1987).

[JA4] F. Jaeger. Composition products and models for the Homfly polynomial. *L'Enseignment Math.*, t35, (1989), pp. 323-361.

[JA5] F. Jaeger. Tutte polynomials and link polynomials. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **103** (1988), pp. 647–654.

[JA6] F. Jaeger. On edge colorings of cubic graphs and a formula of Roger Penrose. *Ann. of Discrete Math.*, **41**(1989), pp. 267-280.

[JA7] F. Jaeger, D. L. Vertigan and D. J. A. Welsh. On the computational complexity of the Jones and Tutte polynomials. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **108**(1990), pp. 35-53.

[JA8] F. Jaeger, L. H. Kauffman and H. Saleur. (In preparation.)

[JA9] F. Jaeger. (Announcement 1989.)

[JE] H. Jehle. Flux quantization and particle physics. *Phys. Rev. D.*, vol. 6, no. 2 (1972), pp. 441-457.

[JEN] H. Jenny. **Cymatics**, Basel: Basilius Presse, (1974).

[JI1] M. Jimbo. A q-difference analogue of $U(q)$ and the Yang-Baxter Equation. *Lect. in Math. Physics,* **10**(1985), 63-69.

[JI2] M. Jimbo. Quantum R-matrix for the generalized Toda system. *Comm. Math. Phys.*, **102**(1986), 537-547.

[JO1] V. F. R. Jones. A new knot polynomial and von Neumann algebras. *Notices of AMS,* **33**(1986), 219-225.

[JO2] V. F. R. Jones. A polynomial invariant for links via von Neumann algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **129**(1985), 103-112.

[JO3] V. F. R. Jones. Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials. *Ann. of Math.*, **126**(1987), 335-388.

[JO4] V. F. R. Jones. On knot invariants related to some statistical mechanics models. *Pacific J. Math.*, vol. 137, no. 2, (1989), 311-334.

[JO5] V. F. R. Jones. On a certain value of the Kauffman polynomial. (To appear in *Comm. Math. Phys.*).

[JO6] V. F. R. Jones. Subfactors and related topics. In **Operator algebras and Applications**, vol. 2. Edited by D. E. Evans and M. Takesaki. Cambridge University Press (1988), pp. 103–118.

[JO7] V. F. R. Jones. Index for subfactors. *Invent. Math.*, **72**(1983), pp. 1-25.

[JO8] V. F. R. Jones. (Private communication.)

[JS] A. Joyal and R. Street. Braided monoidal categories. Macquarie reports 86008 (1986).

[JOY] D. Joyce. A classifying invariant of knots, the knot quandle. *J. Pure Appl. Alg.*, **23**, 37-65.

[KVA] L. H. Kauffman and F. J. Varela. Form dynamics. *J. Social and Bio. Struct.*, **3**(1980), pp. 171-206.

[LK] L. H. Kauffman. Link Manifolds. *Michigan Math. J.*, **21**(1974), pp. 33-44.

[LK1] L. H. Kauffman. The Conway polynomial. *Topology,* **20**(1980), 101-108.

[LK2] L. H. Kauffman. **Formal Knot Theory**. Princeton University Press, Mathematical Notes #30 (1983).

[LK3] L. H. Kauffman. **On Knots.** *Annals of Mathematics Studies* **115**, Princeton University Press (1987).

[LK4] L. H. Kauffman. State Models and the Jones Polynomial. *Topology*, **26**(1987), 395-407.

[LK5] L. H. Kauffman. Invariants of graphs in three-space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 311, **2** (Feb. 1989), 697-710.

[LK6] L. H. Kauffman. New invariants in the theory of knots. (Lectures given in Rome, June 1986). – *Asterisque*, 163-164 (1988), pp. 137-219.

[LK7] L. H. Kauffman. New invariants in the theory of knots. *Amer. Math. Monthly*, vol. 95, no. 3, March 1988, pp. 195-242.

[LK8] L. H. Kauffman. An invariant of regular isotopy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 318, no. 2, (1990), pp. 417-471.

[LK9] L. H. Kauffman. Statistical Mechanics and the Alexander polynomial. *Contemp. Math.*, **96**(1989), Amer. Math. Soc. Pub., pp. 221-231.

[LK10] L. H. Kauffman. Statistical mechanics and the Jones polynomial. (Proceedings of the 1986 Santa Cruz conference on Artin's Braid Group. AMS Contemp. Math. Series (1989), vol. 78, pp. 263-297. Reprinted in **New Problems and Methods and Techniques in Quantum Field Theory and Statistical Mechanics.** pp. 175-222. Ed. by M. Rasetti. World Scientific Pub. (1990).

[LK11] L. H. Kauffman. A Tutte polynomial for signed graphs. *Discrete Applied Math.*, **25**(1989), pp. 105-127.

[LK12] L. H. Kauffman. State models for knot polynomials - an introduction. (In the Proceedings of the meeting of the Brasilian Mathematical Society - July 1987.)

[LK13] L. H. Kauffman. State models for link polynomials. *l'Enseignment Mathematique*, t. 36 (1990), pp. 1-37.

[LK14] L. H. Kauffman. Knot polynomials and Yang-Baxter models. **IXth International Congress on Mathematical Physics – 17-27 July 1988 - Swansea, Wales,** Ed. Simon, Truman, Davies, Adam Hilger Pub. (1989), pp. 438-441.

[LK15] L. H. Kauffman. Polynomial Invariants in Knot Theory. **Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics.** Ed. C. N. Yang and M. L. Ge. *World Sci. Pub. Advanced Series in Mathematical Physics*, **9**(1989), 27-58.

[LK16] L. H. Kauffman. Spin networks and knot polynomials. *Intl. J. Mod. Phys. A.*, vol. 5, no. 1 (1990), pp. 93-115.

[LK17] L. H. Kauffman. Transformations in Special Relativity. *Int. J. Theo. Phys.*, vol. 24, no. 3, pp. 223-236, March 1985.

[LK18] L. H. Kauffman and H. Saleur. Free fermions and the Alexander-Conway polynomial. (To appear in *Comm. Math. Phys.*).

[LK19] L. H. Kauffman. Knots, Spin Networks and 3-Manifold Invariants. (To appear in the Proceedings of KNOTS 90 – Osaka Conference.)

[LK20] L. H. Kauffman and S. Lins. A 3-manifold invariant by state summation. (Preprint 1990).

[LK21] L. H. Kauffman and S. Lins. Computing Turaev-Viro invariants for 3-manifolds. (Preprint 1990).

[LK22] L. H. Kauffman and R. Baadhio. Classical knots, gravitational anomalies and exotic spheres. (To appear.)

[LK23] L. H. Kauffman. Knots, abstract tensors, and the Yang-Baxter Equation. In **Knots, Topology and Quantum Field Theories** - Proceedings of the Johns Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory 13. Florence (1989). Ed. by L. Lussana. World Scientific Pub. (1989), pp. 179-334.

[LK24] L. H. Kauffman and P. Vogel. Link polynomials and a graphical calculus. (Announcement 1987. Preprint 1991.)

[LK25] L. H. Kauffman. Map coloring and the vector cross product. *J. Comb. Theor. B.*, vol. 48, no. 2. April 1990, pp. 145-154.

[LK26] L. H. Kauffman. From knots to quantum groups (and back). In **Proceedings of the CRM Workshop on Hamiltonian Systems, Transformation Groups and Spectral Transform Methods**. Ed. by J. Harnad and J. E. Marsden. Les Publications CRM (1990), pp. 161-176.

[LK27] L. H. Kauffman. **Map Reformulation**. Princelet Editions (1986).

[LK28] C. Anezeris, A. P. Balachandran, L. Kauffman and A. M. Srivastava. Novel statistics for strings and string 'Chern Simons' terms. (Preprint 1990.)

[LK29] L. H. Kauffman. An integral heuristic. *Intl. J. Mod. Phys. A.*, vol. 5, no. 7, (1990), pp. 1363-1367.

[LK30] L. H. Kauffman. Special relativity and a calculus of distinctions. In **Proceedings of the 9th Annual International Meeting of the Alternative Natural Philosophy Association - Cambridge, England (September 23, 1987)**. Published by ANPA West, Palo Alto, Calif., pp. 290-311.

[KA] T. Kanenobu. Infinitely many knots with the same polynomial. *Amer. Math. Soc.*, **97**(1986), pp. 158-161.

[KE] A. B. Kempe. On the geographical problem of four colors. *Amer. J. Math.*, **2**(1879), pp. 193-200.

[KV] M. A. Kervaire and J. W. Milnor. Groups of Homotopy Spheres: I. *Ann. of Math.*, vol. 77, no. 3, May 1963, pp. 504–537.

[K] M. Khovanov. New geometrical constructions in low dimensional topology. (Preprint 1990).

[KID] M. Kidwell. On the degree of the Brandt-Lickorish-Millett polynomial of a link. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **100**(1987), pp. 755-762.

[KIRB] R. Kirby. A calculus for framed links in S^3. *Invent. Math.*, **45**(1978), 35–56.

[KM] R. Kirby and P. Melvin. On the 3-manifold invariants of Reshetikhin-Turaev for $sl(2, \mathrm{C})$. (Preprint 1990.)

[KI] T. P. Kirkman. The enumeration, description and construction of knots with fewer than 10 crossings. *Trans. Royal Soc. Edin.*, **32**(1865), 281-309.

[KR] A. N. Kirillov and N. Y. Reshetikhin. Representations of the algebra $U_q(sl\,2)$, q-orthogonal polynomials and invariants of links. In **Infinite dimensional Lie algebras and groups**, Ed. V. G. Kac, *Adv. Ser. in Math. Phys.*, **7**(1988), pp. 285-338.

[KO1] T. Kohno. Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter Equations. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **37**, 4 (1987), 139-160.

[KO2] T. Kohno. Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups I. (Preprint 1990.)

[KON] M. Kontsevich. Rational conformal field theory and invariants of 3-dimensional manifolds. (Preprint 1988.)

[KU] P. P. Kulish, N. Yu, Reshetikhin and E. K. Skylyanin. Yang-Baxter Equation and representation theory: I. *Letters in Math. Physics*, **5**(1981), 393-403.

[KUS] P. P. Kulish and E. K. Sklyanin. Solutions of the Yang-Baxter Equation. *J. Soviet Math.*, **19**(1982), pp. 1596-1620. (Reprinted in **Yang-Baxter Equation in Integrable Systems**. Ed. by M. Jimbo. World Scientific Pub. (1990).)

[KAW] A. Kuniba, Y. Akutsu, M. Wadati. Virasoro algebra, von Neumann algebra and critical eight-vertex SOS models. *J. Phys. Soc. Japan*, **55**, no. 10 (1986), 3285-3288.

[KUP1] G. Kuperberg. Involutory Hopf algebras and 3-manifold invariants. (Preprint 1990.)

[KUP2] G. Kuperberg. The quantum G_2 link invariant. (Preprint 1990.)

[KMU] B. I. Kurpita and K. Murasugi. On a hierarchical Jones invariant. (Preprint 1990.)

[LAR] L. A. Lambe and D. E. Radford. Algebraic aspects of the quantum Yang-Baxter Equation. (Preprint 1990.)

[LAT] R. G. Larson and J. Towber. Braided Hopf algebras: a dual concept to quasitriangularity. (Preprint 1990.)

[LAW1] R. Lawrence. A universal link invariant using quantum groups. (Preprint 1988).

[LAW2] R. Lawrence. A functorial approach to the one-variable Jones polynomial. (Preprint 1990.)

[LEE1] H. C. Lee. Q-deformation of $s\ell(2, C) \times Z_N$ and link invariants. (Preprint 1988.)

[LEE2] H. C. Lee. Tangles, links and twisted quantum groups. (Preprint 1989.)

[LCS] H. C. Lee, M.Couture and N. C. Schmeling. Connected link polynomials (Preprint 1988).

[LM1] W. B. R. Lickorish and K. C. Millett. A polynomial invariant for oriented links. *Topology*, **26**(1987), 107-141.

[LM2] W. B. R. Lickorish and K. C. Millett. The reversing result for the Jones polynomial. *Pacific J. Math.*, **124**(1986), pp. 173-176.

[LICK1] W. B. R. Lickorish. A representation of orientable, combinatorial 3-manifolds. *Ann. Math.*, **76**(1962), pp. 531-540.

[LICK2] W. B. R. Lickorish. Polynomials for links. *Bull. London Math. Soc.*, **20**(1988), 558-588.

[LICK3] W. B. R. Lickorish. 3-Manifolds and the Temperley-Lieb Algebra. (Preprint 1990.)

[LICK4] W. B. R. Lickorish. Calculations with the Temperley-Lieb algebra. (Preprint 1990.)

[LIP1] A. S. Lipson. An evaluation of a link polynomial. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **100**(1986), 361-364.

[LIP2] A. S. Lipson. Some more states models for link invariants. *Pacific J. Math.*, (To appear).

[LIP3] A. S. Lipson. Link signatures, Goeritz matrices and polynomial invariants, *L'Enseignment Math.*, t.36, (1990), pp. 93-114.

[LIT] C. N. Little. Non-alternate + – knots. *Trans. Royal Soc. Edin.*, **35**(1889), 663-664.

[LOR] E. N. Lorenz. Nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, **20**(1963), pp. 130-141.

[M] S. Mac Lane. **Categories for the Working Mathematician.** Springer-Verlag (1971). GTM 5.

[MN] J. M. Maillet and F. W. Nijhoff. Multidimensional integrable lattices, quantum groups and the D-simplex equations. (Preprint – Institute for Non-Linear Studies – Clarkson University – INS #131 (1989).)

[MAJ] S. Majid. Quasitriangular Hopf algebras and Yang-Baxter equations. (Preprint 1988).

[MAN1] Yu. I. Manin. Quantum groups and non-commutative geometry. (Lecture Notes, Montreal, Canada, July 1988).

[MAN2] Yu. I. Manin. Some remarks on Kozul algebras and Quantum groups. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, **37**, 4 (1987), 191-205.

[MAR] P. P. Martin. Analytic properties of the partition function for statistical mechanical models. *J. Phys. A: Math. Gen.*, **19**(1986), pp. 3267-3277.

[MAT] S. V. Matveev. Transformations of special spines and the Zeeman conjecture. *Math. USSR Izvestia* 31: 2 (1988), pp. 423-434.

[ME] D. A. Meyer. State models for link invariants from the classical Lie groups. (Preprint 1990.)

[MIE] E. W. Mielke. Knot wormholes in geometrodynamics. *General Relativity and Gravitation*, vol. 8, no. 3, (1977), pp. 175-196.

[MI] J. W. Milnor. **Singular Points of Complex Hypersurfaces.** *Annals Studies* **61**, Princeton University Press (1968).

[MD] J. Moody. A link not detected by the Burau matrix. (Preprint 1989.)

[MS] G. Moore and N. Seiberg. Classical and quantum conformal field theory. *Commun. Math. Phys.*, **123**(1989), pp. 177-254.

[MO1] H. R. Morton. The Jones polynomial for unoriented links. *Quart. J. Math. Oxford (2)*. **37**(1986), pp. 55-60.

[MO2] H. R. Morton. Seifert circles and knot polynomials. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **99**(1986), pp. 107-109.

[MO3] H. R. Morton and H. B. Short. The two-variable polynomial for cable knots. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **101**(1987), pp. 267-278.

[MO4] H. R. Morton and P. M. Strickland. Satellites and surgery invariants. (Preprint 1990.)

[MOU] J. P. Moussouris. **Quantum Models of Space-Time Based on Recoupling Theory**. (Thesis, Oxford Univ., 1983).

[MUK1] J. Murakami. The parallel version of link invariants. (Preprint Osaka University (1987).)

[MUK2] J. Murakami. A state model for the multi-variable Alexander polynomial. (Preprint 1990.)

[MUK3] J. Murakami. On local relations to determine the multi-variable Alexander polynomial of colored links. (Preprint 1990.)

[MUR1] K. Murasugi. The Jones polynomial and classical conjectures in knot theory. *Topology,* **26**(1987), 187-194.

[MUR2] K. Murasugi. Jones polynomials and classical conjectures in knot theory II. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,* **102**(1987), 317-318.

[N] M. H. A. Newman. On a string problem of Dirac. *J. London Math. Soc.,* **17**(1942), pp. 173-177.

[O] E. Oshins. Quantum Psychology Notes. Vol. 1: A Personal Construct Notebook (1987). (Privately distributed.)

[PEN1] R. Penrose. Applications of negative dimensional tensors. **Combinatorial Mathematics and its Applications**. Edited by D. J. A. Welsh, Academic Press (1971).

[PEN2] R. Penrose. Theory of quantized directions. (Unpublished.)

[PEN3] R. Penrose. Angular momentum: an approach to Combinatorial Space-Time. In **Quantum Theory and Beyond**. Ed. T. A. Bastin. Cambridge University Press, (1969).

[PEN4] R. Penrose. Combinatorial quantum theory and quantized directions. **Advances in Twistor Theory**. Ed. by L. P. Hughston and R. S. Ward. Pitman (1979), pp. 301-307.

[PW] J. H. H. Perk and F. Y. Wu. Nonintersecting string model and graphical approach: equivalence with a Potts model. *J. Stat. Phys.*, vol. 42, nos. 5/6, (1986), pp. 727-742.

[PS] J. H. H. Perk and C. L. Schultz. New families of commuting transfer matrices in q-state vertex models. *Physics Letters*, vol. 84A, no. 8, August 1981, pp. 407-410.

[PO] A. M. Polyakov. Fermi-Bose transmutations induced by gauge fields. *Mod. Phys. Lett.,* A3 (1987), pp. 325-328.

[PT] J. H. Przytycki and P. Traczyk. Invariants of links of Conway type. *Kobe J. Math.,* 4(1987), pp. 115-139.

[Q] C. Quigg. **Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions**. Benjamin Pub. (1983).

[RAD] D. E. Radford. Solutions to the quantum Yang-Baxter Equation: the two-dimensional upper triangular case. (Preprint 1990.)

[RA] M. Rasetti and T. Regge. Vortices in He II, Current Algebras and Quantum Knots. *Physica* 80a (1975), pp. 217-233, Quantum vortices. In **Highlights of Condensed Matter Theory** (1985). Soc. Italiana di Fiscia - Bologna, Italy.

[REI] K. Reidemeister. **Knotentheorie**. Chelsea Publishing Co., New York (1948). Copyright 1932. Julius Springer, Berlin.

[RES] N. Y. Reshetikhin. Quantized universal enveloping algebras, the Yang-Baxter Equation and invariants of links, I and II. LOMI reprints E-4-87 and E-17-87, Steklov, Institute, Leningrad, USSR.

[RT1] N. Y. Reshetikhin and V. Turaev. Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups. *Comm. Math. Phys.*, **127**(1990), pp. 1-26.

[RT2] N. Y. Reshetikhin and V. Turaev. Invariants of three manifolds via link polynomials and quantum groups. *Invent. Math.*, **103** (1991), 547–597.

[ROB] G. D. Robertson. Torus knots are rigid string instantons. University of Durham - Centre for Particle Theory. (Preprint 1989.)

[ROLF] D. Rolfsen. **Knots and Links**. Publish or Perish Press (1976).

[ROSS1] M. Rosso. Groupes quantiques de Drinfeld et Woronowicz. (Preprint 1988).

[ROSS2] M. Rosso. Groupes quantiques et modeles a vertex de V. Jones en theorie des noeuds. *C. R. Scad. Sci. Paris,* t.307 (1988), pp. 207-210.

[RS] C. Rovelli and L. Smolin. Knot theory and quantum gravity. (Preprint 1988).

[RY] L. H. Ryder. **Quantum Field Theory**. Cambridge University Press (1985).

[SA] T. L. Saaty and P. C. Kainen. **The Four Color Problem**. Dover Pub. (1986).

[SAL1] H. Saleur. Virasoro and Temperley-Lieb algebras. In **Knots, Topology and Quantum Field theories** – Proceedings of the Johns Hopkins Workshop on Current Problems in Particle Theory 13. Florence (1989). Ed. by L. Lussana. World Scientific Pub. (1989), pp. 485-496.

[SAL2] H. Saleur. Zeroes of chromatic polynomials: a new approach to Beraha conjecture using quantum groups. *Commun. Math. Phys.*, **132**(1990), pp. 657-679.

[SAM] S. Samuel. The use of anticommuting variable integrals in statistical mechanics. I. The computation of partition functions. II. The computation of correlation functions. III. Unsolved models. *J. Math. Phys.*, **21(12)**(1980), pp. 2806-2814, 2815-2819, 2820-2833.

[SE] G. Segal. Two-dimensional conformal field theories and modular functors. **IXth International Congress on Mathematical Physics – 17-27 July-1988-Swansea, Wales.** Ed. Simon, Truman, Davies, Adam Hilger Pub. (1989), pp. 22-37.

[CS] C. Shultz. Solvable q-state models in lattice statistics and quantum field theory. *Phys. Rev. Letters.* **46** no. 10, March 1981.

[SI] L. Silberstein. **The Theory of Relativity**. MacMillan and Co. Ltd. (1914).

[SIM] J. Simon. Topological chirality of certain molecules. *Topology,* vol. 25, no. 2, (1986), pp. 229-235.

[SK] E. K. Skylanin. Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter Equation. Representation of quantum algebras. *Funct. Anal. Appl.*, **17**(1983), pp. 273-284.

[LS1] L. Smolin. Link polynomials and critical points of the Chern-Simon path integrals. *Mod. Phys. Lett. A.*, vol. 4, no. 12, (1989), pp. 1091-1112.

[LS2] L. Smolin. Quantum gravity in the self-dual representation. *Contemp. Math.*, **28**(1988).

[SO1] R. Sorkin. Particle statistics in three dimensions. *Phys. Dev.*, D27, (1983), pp. 1787-1797.

[SO2] R. Sorkin. A general relation between kink exchange and kink rotation. *Commun. Math. Phys.*, **115**(1988), pp. 421-434.

[SB1] G. Spencer-Brown. **Cast and Formation Properties of Maps**. Privately distributed manuscript. Deposited in the Library of the Royal Society, London, March 1980.

[SB2] G. Spencer-Brown. **Laws of Form**. George Allen and Unwin Ltd., London (1969).

[STEW] R. L. Stewart. Pure field electromagnetism. (Unpublished - 1971).

[ST] J. Stillwell. **Classical Topology and Combinatorial Group Theory**. Springer-Verlag (1980).GTM 72.

[S] D. W. Sumners. Untangling DNA. *Math. Intelligencer*. vol. 12, no. 3, (1990), pp. 71-80.

[TAIT] P. G. Tait. On Knots I, II, III. Scientific Papers, vol. I, Cambridge University Press, London, 1898, 273-347.

[TEL] H. N. V. Temperley and E. H. Lieb. Relations between the 'percolation' and 'coloring' problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the 'percolation' problem. *Proc. Roy. Soc. Lond. A.*, **322**(1971), pp. 251-280.

[TEU] R. D. Teuschner. Towards a topological spin-statistics theorem in quantum field theory, (Preprint 1989.)

[TH1] M. B. Thistlethwaite. Knot tabulations and related topics. **Aspects of Topology**. Ed. I. M. James and E. H. Kronheimer, Cambridge University Press (1985), 1-76.

[TH2] M. B. Thistlethwaite. A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology*, **26**(1987), pp. 297-309.

[TH3] M. B. Thistlethwaite. On the Kauffman polynomial of an adequate link. *Invent. Math.*, **93**(1988), pp. 285-296.

[TH4] M. B. Thistlethwaite. Kauffman's polynomial and alternating links. *Topology*, **27**(1988), pp. 311-318.

[TH5] M. B. Thistlethwaite. (Unpublished tables.)

[T] W. Thompson (Lord Kelvin). On vortex atoms. *Philosophical Magazine*, **34** July 1867, pp. 15-24. **Mathematical and Physical Papers**, vol. 4, Cambridge (1910).

[TR] B. Trace. On The Reidemeister moves of a classical knot. *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 89, no. 4, (1983).

[TU1] V. G. Turaev. The Yang-Bater equation and invariants of links. LOMI preprint E-3-87, Steklov Institute, Leningrad, USSR, *Inventiones Math.*, **92**, Fasc. **3**, 527–553.

[TU2] V. G. Turaev and O. Viro. State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ symbols. (Preprint 1990.)

[TU3] V. G. Turaev. Quantum invariants of links and 3-valent graphs in 3-manifolds. (Preprint 1990.)

[TU4] V. G. Turaev. Shadow links and face models of statistical mechanics. Publ. Inst. Recherche Math. Advance. Strasbourg (1990).

[TU5] V. G. Turaev. Quantum invariants of 3-manifolds and a glimpse of shadow topology. (Preprint 1990.)

[TU6] V. G. Turaev. The Conway and Kauffman modules of the solid torus with an appendix on the operator invariants of tangles. LOMI Preprint E-6-88.

[TU7] V. G. Turaev. Algebras of loops on surfaces, algebras of knots, and quantization. LOMI Preprint E-10-88. In **Braid Group, Knot Theory and Statistical Mechanics**. Ed. C. N. Yang and M. L. Ge. World Sci. Pub. *Advanced Series in Mathematical Physics*, **9**(1989), pp. 59-96.

[TUT] W. T. Tutte. Graph Theory. **Encyclopedia of Mathematics and its Applications**. **21**, Cambridge University Press, (1984).

[VMU] F. Varela, H. Maturana, R. Uribe. Autopoiesis: the organization of living systems, its characterization and a model. *Biosystems,* 5:187, (1974).

[V] P. Vogel. Representations of links by braids: A new algorithm. *Comment. Math. Helvetici,* **65**(1990), pp. 104-113.

[WE] H. Wenzl. Representations of braid groups and the quantum Yang-Baxter Equation, *Pacific J. Math.*, **145**(1990), pp. 153-180.

[WEYL] H. Weyl. Gravitation und Elektrizitat. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenshäften,* **26**(1918), pp. 465-480.

[W] J. H. White. Self-linking and the Gauss integral in higher dimensions. *Amer. J. Math.*, **91**(1969), pp. 693-728.

[WH1] H. Whitney. On regular closed curves in the plane. *Comp. Math.*, **4**(1937), 276-284.

[WH2] H. Whitney. A logical expansion in mathematics. . *Bull. Amer. Math. Soc.*, **38**(1932), 572-579.

[WI] A. S. Wightman. (Private communication.)

[WIL] F. Wilczek. Gauge theory of deformable bodies. IASSNS-HEP-88/41 (Preprint 1988), in *Intl. Congress on Math. Phys.* Ed. by B. Simon, A. Truman and I. M. Davies. Adam Hilger (1989), pp. 220-233.

[WZ] F. Wilczek and A. Zee. Linking numbers, spin and statistics of solitons. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 51, no. 25, (1983), pp. 2250-2252.

[WIT1] E. Witten. Physics and geometry. *Proc. Intl. Congress Math.*, Berkeley, Calif., USA (1986), 267-303.

[WIT2] E. Witten. Quantum field theory and the Jones polynomial. *Comm. Math. Phys.*, **121**(1989), 351-399.

[WIT3] E. Witten, Gauge theories vertex models and quantum groups. *Nucl. Phys. B.*, **330**(1990), pp. 225–246.

[WIT4] E. Witten. Global gravitational anomalies. *Comm. Math. Phys.*, **100**(1985), pp. 197-229.

[WIN] S. Winker. **Quandles, Knots Invariants and the N-fold Branched Cover**. Ph.D. Thesis, University of Illinois at Chicago, (1984).

[WU1] F. Y. Wu. The Potts Model. *Rev. Mod. Phys.*, vol. 54, no. 1, Jan. 1982, pp. 235-268.

[WU2] F. Y. Wu. Graph theory in statistical physics. In **Studies in Foundations and Combinatorics** - Advances in Mathematics Supplementary Studies. Vol. 1, (1978). Academic Press Inc., pp. 151-166.

[Y] S. Yamada. The minimum number of Seifert circles equals the braid index of a link. *Invent. Math.*, **89**(1987), pp. 346-356.

[YGW] K. Yamagishi, M. Ge, Y. Wu. New hierarchies of knot polynomials from topological Chern-Simons gauge theory. *Lett. Math. Phys.*, **19**(1990), pp. 15-24.

[YE] D. Yetter. Quantum groups and representations of monodial categories. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **108**(1990), pp. 197-229.

[ZA] M. Zaganescu. Bosonic knotted strings and cobordism theory. *Europhys. Lett.*, **4**(**5**)(1987), pp. 521-525.

[Z1] A. B. Zamolodchikov. Factorized S matrices and lattice statistical systems. *Soviet Sci. Reviews*. Part A (1979-1980).

[Z2] A. B. Zamolodchikov. Tetrahedron equations and the relativistic S-matrix of straight strings in $2+1$ dimensions. *Comm. Math, Phys.*, **79**(1981), 489-505.

訳者補充

[河内]* 河内明夫 編著: 結び目理論, シュプリンガー・フェアラーク東京 (株), 1990.

[神保]* 神保道夫: 量子群とヤン・バクスター方程式, シュプリンガー・フェアラーク東京 (株), 1990.

[鈴木]* 鈴木晋一: 結び目理論入門, 数理科学ライブラリー 1 , サイエンス社, 1991.

[村杉]* 村杉邦男: 結び目理論とその応用, 日本評論社, 1993.

[河野]* 河野俊丈: 組みひもの数理, アウト・オブ・コース 4 , 遊星社, 1993.

[小林]* 小林一章: 空間グラフの理論, 培風館, 1995.

[BA]* J.Baez(ed.). **Knots and Quantum Gravity.** Oxford Lecture Series in Math.& its Appl., vol.1, Oxford Univ.Press, 1994.

[BM]* J.Baez and J.P.Muniain. **Gauge Fields, Knots and Gravity.** Series on Knots and Everything, vol.4, World Sci.Pub., 1994.

[AD]* T.Deguchi and Y.Akutsu. Graded solutions of Yang-Baxter relations and link polynomials. J.Phys.A:Math.Gen., **23** (1990), pp.1861-1875.

[DE]* T.Deguchi. Braid group representations and link polynomials derived from generalized SU(n) vertex model. J.Phys.Soc.Japan, **58** (1989), pp.3441-3444.

[DOI]* Y.Doi. Braided bialgebras and quadratic bialgebras. Comm.Algebra, **21** (5)(1993), pp.1731-1749.

[DRIN3]* V.G.Grinfeld. On the almost cocomutative Hopf algebras, Leningrad Math.J., **1**(1990), pp.1419-1457.

[LK31]* L.H.Kauffman and S.Lins. **Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds.** Ann.Math.Studies #134, Princeton Univ. Press, 1994.

[KSS]* A.Kawauchi, T.Shibuya and S.Suzuki. Descriptions on surfaces in four-space,I; Normal forms. Math.Sem.Notes Kobe Univ., **10** (1982), pp.75-125.

[MAJ2]* S.Majid. Doubles of quasitriangular Hopf algebras, Algebra, **19** (1991), pp.3061-3073.

[MUK4]* J.Murakami. The Kauffman polynomial of links and representation theory. Osaka J.Math., **24** (1987), pp.745-758.

[MS]* K.C.Millett and D.W.Sumners. **Random knotting and linking.** Series on Knots and Everything, vol.7, World Sci.Pub., 1994.

[S2]* De Witt L.Sumners(ed.). **New Scientific Applications of Geometry and Topology.** Proc.Sympo.in Applied Math.,vol.45, Amer.Math.Soc., 1992.

[SAA]* K.Soga, Y.Akutsu and T.Abe. New factorized S-matrix and its applications to exactly solvable q-state model,I. Prog.Theor.Phys. **70** (1983), pp.730-738.

[TU8]* V.G.Turaev. **Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds.** Studies in Math., vol.18, de Gruyter, 1994.

索　引

L

M

N

P

Q

R

S

Z

訳 者 一 覧

すずきしんいち
鈴木 晋一
1967 年　早稲田大学大学院理工学研究科修士課程終了
1974 年　理学博士
現　在　早稲田大学教育学部教授

かわうちあきお
河内 明夫
1977 年　大阪市立大学大学院理学研究科博士課程終了（理学博士）
現　在　大阪市立大学理学部教授

でぐちてつお
出口 哲生
1989 年　東京大学大学院理学系研究科修士課程終了
1990 年　同上博士課程退学
1992 年　理学博士
現　在　お茶の水女子大学理学部助教授

おおやまよしゆき
大山 淑之
1990 年　早稲田大学大学院理工学研究科博士課程単位取得・退学
1992 年　理学博士
現　在　名古屋工業大学講師

はらまさお
原　正雄
1991 年　早稲田大学大学院理工学研究科博士課程単位取得・退学
1992 年　理学博士
現　在　東海大学理学部講師

えとうかずふみ
衛藤 和文
1994 年　早稲田大学大学院理工学研究科博士課程単位取得・退学
1995 年　理学博士
現　在　早稲田大学教育学部助手

みやざわはるこ
宮澤 治子
1994 年　津田塾大学大学院理学研究科博士課程単位取得・退学
現　在　津田塾大学学芸学部助手

しおみまさえ
塩見 真枝
1991 年　大阪大学大学院理学研究科修士課程終了
1992 年　同上博士課程退学
現　在　早稲田大学大学院理工学研究科研究生

おかもとみゆき
岡本 美雪
1993 年　津田塾大学大学院理学研究科修士課程終了
現　在　早稲田大学大学院理工学研究科博士課程在学中

1995年10月30日 初 版 発 行

結び目の数学と物理

原著者 L. H. カウフマン
監訳者 鈴 木 晋 一
河 内 明 夫
発行者 山 本 格

発 行 所 株式会社 培 風 館
東京都千代田区九段南 4 - 3 -12・郵便番号102
電話(03)3262-5256(代表)・振替00140-7-44725

中央印刷・坂本製本

PRINTED IN JAPAN